

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC  
—o0o—

NGÔ MẠNH TƯỜNG

PHƯƠNG PHÁP KHÔNG LƯỚI THÍCH NGHI RBF-FD  
GIẢI SỐ BÀI TOÁN DIRICHLET CHO PHƯƠNG  
TRÌNH ELLIPTIC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng  
Mã số: 9 46 01 12

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN- NĂM 2023

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Người hướng dẫn khoa học: 1. GS. TS. Oleg Davydov  
2. TS. Đặng Thị Oanh

Phản biện 1: .....

Phản biện 2: .....

Phản biện 3: .....

Luận văn được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Đại học họp tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên vào hồi ... giờ ... ngày ... tháng ... năm 2023

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Thư viện Quốc gia.
- Trung tâm học liệu Đại học Thái Nguyên.
- Thư viện Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

## PHẦN MỞ ĐẦU

Luận án nghiên cứu phương pháp không lưới RBF-FD (Radial Basis Function-Finite Different) giải số bài toán Dirichlet cho phương trình Elliptic trong không gian 2 chiều và 3 chiều. Bài toán được phát biểu như sau: Cho miền mở  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , (với  $d = 2$  hoặc  $d = 3$ ) và các hàm số  $f$  xác định trên  $\Omega$ ,  $g$  xác định trên  $\partial\Omega$ . Tìm hàm số  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn

$$\begin{aligned} Du &= f & \text{trong } \Omega, \\ u &= g & \text{trên } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

trong đó  $D$  là toán tử vi phân tuyến tính Elliptic bậc 2.

Phương pháp RBF-FD giải phương đạo hàm riêng (1), là phương pháp không lưới sử dụng nội suy hàm cơ sở bán kính với cách tiếp cận địa phương, dựa trên sự rời rạc hóa giống như phương pháp FD. Khi sử dụng phương pháp RBF-FD giải bài toán trong không gian  $d$  chiều, thay vì phải làm việc với hàm  $d$  biến, ta chỉ cần làm việc với hàm một biến. Một lợi thế của kỹ thuật rời rạc không lưới là chỉ cần dựa trên tập điểm độc lập phân bố bất kỳ, không cần tạo ra cấu trúc lưới. Do đó, không còn cần chi phí dành cho sinh lưới, duy trì lưới và cập nhật lưới.

Phương pháp RBF-FD được công bố đầu tiên năm 2003 bởi Tolstykh và Shirobokov, dựa trên cấu trúc của phương pháp sai phân hữu hạn. Năm 2006, Wright và Fornberg đề xuất phương pháp RBF-FD, sử dụng nội suy Hermite. Năm 2011, Oleg Davydov và Đặng Thị Oanh công bố phương pháp RBF-FD dựa trên nội suy đa điểm, thuật toán chọn tâm hỗ trợ phương pháp không lưới, thuật toán làm mịn thích nghi và thuật toán ước lượng tham số hình dạng tối ưu cho nội suy hàm RBF. Những năm gần đây, kỹ thuật làm mịn thích nghi và kỹ thuật chọn tâm cho phương pháp RBF-FD nhận được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học.

Các kết quả đã đạt được theo hướng nghiên cứu này là: Phát triển được một số cách tính véc tơ trọng số dựa trên ý tưởng của phương pháp FD và FEM, xây dựng thuật toán ước lượng tham số hình dạng tối ưu, xây dựng thuật toán chọn tâm nội suy, và xây dựng thuật toán làm mịn thích nghi. Các kết quả nghiên cứu theo phương pháp RBF-FD chủ yếu đang dừng lại trên các bài toán mẫu trong không gian 2 chiều, chưa có chứng minh chặt chẽ về mặt lý thuyết đối với tính xấp xỉ, ổn định và hội tụ của nghiệm xấp xỉ. Đây

là công việc khó giải quyết trong tương lai gần. Hơn nữa, với lợi thế của phương pháp RBF-FD cũng cần phát triển trong không gian 3 chiều. Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu kỹ thuật sinh tâm thích nghi và chọn tâm nội suy hỗ trợ tính véc tơ trọng số RBF trong không gian 2 chiều cho các bài toán có miền hình học phức tạp, nghiệm có kỳ dị hoặc độ dao động lớn dựa trên ý tưởng của Đặng Thị Oanh, Oleg Davydov và Hoàng Xuân Phú, đồng thời phát triển kỹ thuật chọn tâm trong không gian 3 chiều, cụ thể luận án đã thực hiện các nội dung:

1. Đề xuất thuật toán chọn tâm nội suy mới cho phương pháp RBF-FD trong không gian 2 chiều, gọi là *giá véc tơ trọng số*.
2. Phát triển các thuật toán chọn tâm cho phương pháp không lưới RBF-FD trong không gian 3 chiều.
3. Cải tiến thuật toán sinh tâm thích nghi cho phương pháp không lưới RBF-FD trong không gian 2 chiều từ các thuật toán sinh tâm thích nghi được đề xuất bởi Đặng Thị Oanh, Oleg Davydov và Hoàng Xuân Phú.
4. Đề xuất các thử nghiệm số trong không gian 3 chiều, đối sánh nghiệm của phương pháp không lưới RBF-FD khi sử dụng các thuật toán chọn tâm với nghiệm của FEM.

Luận án gồm 3 chương:

Chương 1: Kiến thức cơ sở.

Chương 2: Phương pháp không lưới thích nghi RBF-FD giải bài toán Dirichlet cho phương trình Elliptic.

Chương 3: Thử nghiệm số.

# Chương 1

## KIẾN THỨC CƠ SỞ

Trong chương này chúng tôi sẽ trình bày một số kiến thức chuẩn bị cho việc trình bày các kết quả chính trong Chương 2 và Chương 3.

### 1.1 Nội suy dữ liệu phân tán

**Định nghĩa 1.1.1.** Giả sử  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  chứa ít nhất  $n$  điểm và  $V \subset C(\Omega)$  là không gian tuyến tính  $n$  chiều. Ta nói  $V$  là không gian Haar  $n$  chiều trên  $\Omega$  nếu với bất kỳ các điểm phân biệt  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega$  và  $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbb{R}$ , thì tồn tại duy nhất hàm  $s \in V$  sao cho  $s(x_i) = f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### 1.2 Hàm cơ sở bán kính

**Định nghĩa 1.2.1.** Hàm số  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  được gọi là hàm bán kính nếu tồn tại hàm số một biến  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sao cho

$$\Phi(x) = \varphi(\|x\|) = \varphi(r),$$

trong đó  $r = \|x\|$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  và  $\|\cdot\|$  là chuẩn Euclid trên  $\mathbb{R}^d$ .

### 1.3 Ma trận xác định dương, hàm xác định dương

#### 1.3.1 Ma trận xác định dương

**Định nghĩa 1.3.1.** Ma trận thực, đối xứng  $A = [A_{ij}]_{n \times n}$  được gọi là xác định dương nếu dạng toàn phương tương ứng không âm, tức là

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j A_{ij} \geq 0, \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

hay

$$c^T A c \geq 0, \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $c = (0, 0, \dots, 0)^T$ .

#### 1.3.2 Hàm xác định dương

**Định nghĩa 1.3.2.** Hàm số liên tục  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ , được gọi là xác định dương trên  $\mathbb{R}^d$  nếu với mọi bộ tâm phân biệt  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ , với mọi véc tơ  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{C}^n$ , dạng toàn phương

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k \Phi(x_j - x_k) \geq 0. \quad (1.1)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $c$  là véc tơ 0.

Nếu

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k \Phi(x_j - x_k) > 0, \quad c \neq 0, \quad (1.2)$$

thì hàm  $\Phi$  được gọi là xác định dương chặt trên  $\mathbb{R}^d$ .

**Định nghĩa 1.3.3.** Hàm liên tục, chẵn  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  được gọi là xác định dương bậc  $m$  nếu với mọi  $n \in \mathbb{N}$ , mọi cặp tâm phân biệt từng đôi một  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$  và mọi véc tơ  $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  thỏa mãn

$$\sum_{j=1}^n c_j p(x_j) = 0 \quad (1.3)$$

với mọi đa thức giá trị thực bậc nhỏ hơn  $m$ , thì dạng toàn phương

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j c_k \Phi(x_j - x_k) \geq 0. \quad (1.4)$$

Hàm  $\Phi$  được gọi là xác định dương chặt bậc  $m$  nếu dạng toàn phương (1.4) dương và bằng 0 khi  $c$  là véc tơ không.

## 1.4 Nội suy hàm cơ sở bán kính

Tìm hàm

$$F(x) = \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi(\|x - x_k\|),$$

trong đó hệ số  $c_1, c_2, \dots, c_n$  được tìm bằng điều kiện nội suy, hay nó là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} \varphi(\|x_1 - x_1\|) & \varphi(\|x_1 - x_2\|) & \cdots & \varphi(\|x_1 - x_n\|) \\ \varphi(\|x_2 - x_1\|) & \varphi(\|x_2 - x_2\|) & \cdots & \varphi(\|x_2 - x_n\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\|x_n - x_1\|) & \varphi(\|x_n - x_2\|) & \cdots & \varphi(\|x_n - x_n\|) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

## 1.5 Sai số và số điều kiện của nội suy RBF

### 1.5.1 Sai số

**Định nghĩa 1.5.1** (Tập các tâm rời rạc). Cho miền mở, bị chặn  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ . Tập  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \bar{\Omega}$  được gọi là tập các tâm rời rạc nếu  $X$  gồm tất cả các điểm trong miền và các điểm trên biên.

**Định lý 1.5.1.** Cho  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  là miền mở và  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \Omega$  là tập các tâm rời rạc,  $\Phi \in C(\Omega \times \Omega)$  là hàm xác định dương chặt trên  $\Omega$ . Ký hiệu  $F$  là nội suy của hàm  $f \in \mathcal{N}_\Phi(\Omega)$  trên  $X$ . Khi đó

$$|f(x) - F(x)| \leq P_{\Phi, X}(x) \|f\|_{\mathcal{N}_\Phi(\Omega)}, \quad x \in \Omega.$$

### 1.5.2 Số điều kiện và sự ổn định của nội suy RBF

Với nội suy RBF, do  $\Phi$  là hàm cơ sở bán kính nên  $A$  là ma trận xác định dương và

$$\text{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}(A_{\Phi, X})}{\lambda_{\min}(A_{\Phi, X})},$$

trong đó  $\lambda_{\max}(A_{\Phi, X}), \lambda_{\min}(A_{\Phi, X})$  là các giá trị riêng lớn nhất và nhỏ nhất của  $A$  trên  $X$ .

**Định lý 1.5.2.** Cho  $u_j^*(x)$ ,  $1 \leq j \leq n$  là các hàm chính tắc sinh bởi  $\Phi$  trên  $X \subseteq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Khi đó với mọi  $x \in \Omega \setminus X$  ta có

$$1 \leq 1 + \sum_{j=1}^n [u_j^*(x)]^2 \leq P_{\Phi, X}^2(x) / \lambda_{\min}(A_{\Phi, X \cup \{x\}}),$$

trong đó

$$\lambda_{\min}(A_{\Phi, X}) = \inf_{c \neq 0} \frac{c^T A_{\Phi, X} c}{c^T c}$$

và  $A_{\Phi, X}$  là ma trận nội suy của  $\Phi$  trên  $X \cup \{x\}$ .

### 1.6 Phương pháp lưới giải phương trình đạo hàm riêng

**Định nghĩa 1.6.1** (Véc tơ trọng số hay stencil). Cho  $D$  là toán tử vi phân tuyến tính xác định trên  $\mathbb{R}^d$  và  $X = \{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^d$  là tập các tâm phân tán được chọn. Một xấp xỉ đối với toán tử  $D$ ,

$$Du(x) \approx \sum_{i=1}^n w_i u(x_i),$$

được xác định bởi các hệ số

$$w_i = w_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Véc tơ  $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$  được gọi là véc tơ trọng số hay stencil.

**Định nghĩa 1.6.2** (Giá véc tơ trọng số  $\Xi_\zeta$ ). Cho  $\Xi \subset \bar{\Omega}$  là tập hữu hạn các tâm rời rạc có biên là  $\partial\Xi := \Xi \cap \partial\Omega$ . Với mỗi  $\zeta \in \Xi \setminus \partial\Xi$  ta chọn được tập các tâm  $\Xi_\zeta$  gồm  $\zeta$  và các điểm lân cận của  $\zeta$ . Tập  $\Xi_\zeta$  được gọi là giá véc tơ trọng số.

**Định nghĩa 1.6.3** (Tập các tâm trùng khớp  $\Theta$ ). Cho  $\Xi \subset \bar{\Omega}$  là tập hữu hạn các tâm rời rạc có biên là  $\partial\Xi := \Xi \cap \partial\Omega$ . Với mỗi  $\zeta \in \Xi \setminus \partial\Xi$  ta chọn được một giá véc tơ trọng số  $\Xi_\zeta$ . Gọi  $\Theta_\zeta$  là tập các trọng tâm của tam giác trong giá véc tơ trọng số  $\Xi_\zeta$ , với quy tắc các điểm xung quanh  $\zeta$  được xếp theo chiều ngược chiều kim đồng hồ và tạo thành các tam giác có chung đỉnh  $\zeta$ . Khi đó tập

$$\Theta = \bigcup_{\zeta \in \Xi \setminus \partial\Xi} \Theta_\zeta$$

được gọi là tập các tâm trùng khớp.

### 1.6.1 Phương pháp sai phân hữu hạn

Cho  $\Xi \subset \overline{\Omega}$  là tập hữu hạn các tâm rời rạc và  $\partial\Xi := \Xi \cap \partial\Omega$ . Khi đó bài toán (1) với  $D$  là toán tử Laplace, được rời rạc thành hệ phương trình

$$\sum_{\xi \in \Xi_\zeta} w_{\zeta, \xi} \hat{u}(\xi) = f(\zeta), \quad \zeta \in \Xi \setminus \partial\Xi, \quad (1.5)$$

$$\hat{u}(\xi) = g(\xi), \quad \xi \in \partial\Xi. \quad (1.6)$$

Năm 2011, Oleg Davyov và Dang Thi Oanh đã giới thiệu lược đồ sai phân tổng quát với 2 tập hữu hạn các tâm rời rạc là  $\Xi \subset \overline{\Omega}$  và  $\Theta \subset \overline{\Omega}$  tập các tâm trùng khớp. Khi đó, bài toán (1) được rời rạc bởi hệ phương trình tuyến tính

$$\sum_{\xi \in \Xi_\zeta} w_{\zeta, \xi} \hat{u}_\xi = \sum_{\theta \in \Theta_\zeta} \sigma_{\zeta, \theta} f(\theta), \quad \zeta \in \Xi \setminus \partial\Xi, \quad (1.7)$$

$$\hat{u}_\xi = g(\xi), \quad \xi \in \partial\Xi. \quad (1.8)$$

### 1.6.2 Phương pháp phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn rời rạc bài toán (1) với  $D$  là toán tử Laplace, dựa trên bài toán biên phân như sau: Tìm  $u \in H^1(\Omega)$  sao cho  $u|_{\partial\Omega} = g$  và

$$-\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \text{với mọi hàm thử } v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.9)$$

Xét bài toán 1.9 trong không gian 2 chiều. Phương pháp phần tử hữu hạn rời rạc miền  $\Omega$  bởi hữu hạn các phần tử tam giác. Gọi  $\Xi$  là tập đỉnh của các tam giác và hàm  $\varphi_\xi$ ,  $\xi \in \Xi$  là các hàm nón. Khi đó phương pháp phần tử hữu hạn cũng rời rạc Bài toán (1) ở dạng (1.7)-(1.8), với

$$w_{\zeta, \xi} = -\int_{\Omega} \nabla \varphi_\xi \nabla \varphi_\zeta \, dx, \quad \xi \in \Xi_\zeta, \quad \sigma_{\zeta, \theta} := \frac{\text{area}(T_\theta)}{3}.$$

## 1.7 Giải phương trình đạo hàm riêng bằng nội suy RBF trùng khớp

Giả sử miền  $\Omega$  được rời rạc bởi tập các tâm trùng khớp  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ . Tìm nghiệm xấp xỉ của Bài toán (1) bởi nội suy RBF có dạng

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\|x - \xi_i\|), \quad x \in \Xi, \quad (1.10)$$

trong đó các hệ số  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  tìm được bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} D\varphi(\|\xi_1 - \xi_1\|) & \cdots & D\varphi(\|\xi_1 - \xi_n\|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D\varphi(\|\xi_m - \xi_1\|) & \cdots & D\varphi(\|\xi_m - \xi_n\|) \\ \varphi(\|\xi_{m+1} - \xi_1\|) & \cdots & \varphi(\|\xi_{m+1} - \xi_n\|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\|\xi_n - \xi_1\|) & \cdots & \varphi(\|\xi_n - \xi_n\|) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\xi_1) \\ \vdots \\ f(\xi_m) \\ g(\xi_{m+1}) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$



## Chương 2

# PHƯƠNG PHÁP KHÔNG LƯỚI THÍCH NGHI RBF-FD GIẢI BÀI TOÁN DIRICHLET CHO PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC

Trong chương này, bên cạnh việc trình bày cách rời rạc bài toán trên miền có tâm phân bố bất kỳ bởi phương pháp sai phân hữu hạn, chúng tôi còn giới thiệu cách tính trọng số bằng nội suy RBF, các thuật toán chọn giá véc tơ trọng số trong không gian 2 chiều và phát triển thuật toán chọn giá véc tơ trọng số trong không gian 3 chiều, đồng thời trình bày các thuật toán sinh tâm thích nghi cho phương pháp RBF-FD.

### 2.1 Rời rạc bài toán

Giả sử  $\Xi \subset \bar{\Omega}$  tập hữu hạn các tâm rời rạc. Gọi  $\Xi_{\text{int}} := \Xi \cap \Omega$  là tập hợp các tâm trong miền,  $\partial\Xi := \Xi \cap \partial\Omega$  là tập hợp các tâm trên biên. Khi đó, phương pháp sai phân hữu hạn rời rạc bài toán (1) với  $D$  là toán tử Laplace, bởi hệ phương trình

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in \Xi_{\zeta}} w_{\zeta, \xi} \hat{u}(\xi) &= f(\zeta), \quad \zeta \in \Xi_{\text{int}}; \\ \hat{u}(\xi) &= g(\xi), \quad \xi \in \partial\Xi, \end{aligned} \tag{2.1}$$

với  $\hat{u}(\xi)$  là nghiệm xấp xỉ của nghiệm  $u$  của bài toán (1) tại điểm  $\xi \in \Xi$ .

### 2.2 Nội suy RBF tính véc tơ trọng số

#### 2.2.1 Véc tơ trọng số

**Mệnh đề 2.2.1.** Cho  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm xác định dương, xác định bởi  $\Phi(x) = \varphi(\|x\|)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , trong đó  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  và  $\|\cdot\|$  là chuẩn Euclid trong  $\mathbb{R}^d$ . Giả sử  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$  là tập các tâm rời rạc và hàm số liên tục  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  có hàm nội suy RBF là

$$s(x) = \sum_{j=1}^n a_j \Phi(x - x_j), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Khi đó véc tơ trọng số được tính bằng nội suy RBF bởi công thức

$$w := [w_1, w_2, \dots, w_n]^T = (\Phi_X)^{-1} D\Phi(x - \cdot)|_X, \tag{2.2}$$

trong đó  $D$  là toán tử vi phân và

$$\begin{aligned} \Phi_X &:= [\Phi(x_i - x_j)]_{i,j=1}^n, \\ D\Phi(x - \cdot)|_X &:= [D\Phi(x - x_1), D\Phi(x - x_2), \dots, D\Phi(x - x_n)]^T, \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

### 2.2.2 Véc tơ trọng số với thành phần hằng số

**Mệnh đề 2.2.2.** Cho  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm xác định dương, xác định bởi  $\Phi(x) = \varphi(\|x\|)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , trong đó  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  và  $\|\cdot\|$  là chuẩn Euclid trong  $\mathbb{R}^d$ . Giả sử  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$  là tập các tâm rời rạc và hàm số liên tục  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  có hàm nội suy RBF với thành phần hằng số là

$$s(x) = \sum_{j=1}^n a_j \Phi(x - x_j) + c, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Khi đó véc tơ trọng số  $w$  được tính bằng nội suy RBF bởi công thức

$$\begin{bmatrix} \Phi_X & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D\Phi(x - \cdot)|_X \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

trong đó  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $D$  là toán tử vi phân và

$$\begin{aligned} \Phi_X &:= [\Phi(x_i - x_j)]_{i,j=1}^n, \\ D\Phi(x - \cdot)|_X &:= [D\Phi(x - x_1), D\Phi(x - x_2), \dots, D\Phi(x - x_n)]^T, \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

### 2.2.3 Véc tơ trọng số với thành phần đa thức

**Mệnh đề 2.2.3.** Cho  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm xác định dương, xác định bởi  $\Phi(x) = \varphi(\|x\|)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , trong đó  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  và  $\|\cdot\|$  là chuẩn Euclid trong  $\mathbb{R}^d$ . Giả sử  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$  là tập các tâm rời rạc và hàm số liên tục  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  có hàm nội suy RBF với thành phần đa thức là

$$s(x) = \sum_{j=1}^n a_j \Phi(x - x_j) + \sum_{j=1}^k c_j p_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

với  $\{p_1, \dots, p_k\}$  là một cơ sở của không gian tuyến tính các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng  $\ell$ . Khi đó véc tơ trọng số  $w \in \mathbb{R}^n$  được tính bởi công thức

$$\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_X & P_X \\ P_X^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D\Phi(x - \cdot)|_X \\ DP(x) \end{bmatrix},$$

trong đó  $v \in \mathbb{R}^k$ ,  $D$  là toán tử vi phân và

$$\begin{aligned} \Phi_X &:= [\Phi(x_i - x_j)]_{i,j=1}^n, \\ P_X &:= [p_j(x_i)]_{i,j=1}^{n,k}, \quad DP := [Dp_1, Dp_2, \dots, Dp_k]^T, \\ D\Phi(x - \cdot)|_X &:= [D\Phi(x - x_1), D\Phi(x - x_2), \dots, D\Phi(x - x_n)]^T, \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Nếu  $k = 1$  và  $p_1$  là hằng số thì ta nhận được Mệnh đề 2.2.2.

## 2.3 Một số thuật toán chọn tâm trong không gian 2 chiều

### 2.3.1 Một số thuật toán chọn tâm phổ biến

Năm 2011, Oleg Davydov và Dang Thi Oanh đã thử nghiệm các thuật toán 6near, nn, 4quad, LLF, SLS cho phương pháp RBF-FD trên bài toán sinh lưới thích nghi của FEM.

### 2.3.2 Các thuật toán chọn tâm cho phương pháp không lưới RBF-FD

#### a) Thuật toán chọn với số tâm cố định và 1 điều kiện dừng D01

Thuật toán chọn tâm D01 được Oleg Davydov và Dang Thi Oanh giới thiệu năm 2011 cùng với thuật toán sinh tâm D02. Các thử nghiệm số cho thấy sự hiệu quả của phương pháp RBF-FD khi sử dụng thuật toán D01, D02 so với kết quả của FEM.

#### b) Thuật toán chọn với số tâm cố định và 2 điều kiện dừng ODP1

**Thuật toán 1** (Thuật toán chọn ODP1).

*Input:*  $\Xi, \zeta$ .

*Output:*  $\Xi_\zeta$ .

*Parameters:*  $k$  (the number of points in  $\Xi_\zeta \setminus \{\zeta\}$ ),  $\nu > 1.0$  (the angle uniformity tolerance),  $c > 1.0$  (distance tolerance), and  $m > k$  (the increment size of the local cloud). Parameter values used in our numerical experiments:  $k = 6$ ,  $\nu = 2.5$ ,  $c = 3.0$  and  $m = 50$ .

I. Find  $m$  nearest points  $\xi_1, \dots, \xi_m$  in  $\Xi \setminus \{\zeta\}$  to  $\zeta$ , sorted by increasing distance to  $\zeta$ , and initialize  $\Xi_\zeta := \{\zeta, \xi_1, \dots, \xi_k\} = \{\zeta, \xi_1, \dots, \xi_k\}$  and  $i := k + 1$ .

II. While  $i \leq m$ :

1. If  $\|\zeta - \xi_i\| \geq \frac{c}{2k} \sum_{j=1}^k (\|\zeta_j - \zeta\| + \|\zeta_j - \zeta_{j+1}\|)$ , then STOP and return  $\Xi_\zeta$ .

2. Compute the angles  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{k+1}$  formed by the extended set  $\{\zeta'_1, \dots, \zeta'_{k+1}\} = \{\zeta_1, \dots, \zeta_k, \xi_i\}$ . If both angles between  $\zeta \xi_i$  and its two neighboring rays are greater than the minimum angle  $\underline{\alpha}' := \underline{\alpha}(\zeta'_1, \dots, \zeta'_{k+1})$ :

i. Find  $j$  such that  $\alpha'_j = \underline{\alpha}'$ . Choose  $p = j$  or  $p = j + 1$  depending on whether  $\alpha'_{j-1} < \alpha'_{j+1}$  or  $\alpha'_{j-1} \geq \alpha'_{j+1}$ .

ii. If  $\mu(\{\zeta'_1, \dots, \zeta'_{k+1}\} \setminus \{\zeta'_p\}) < \mu(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ :

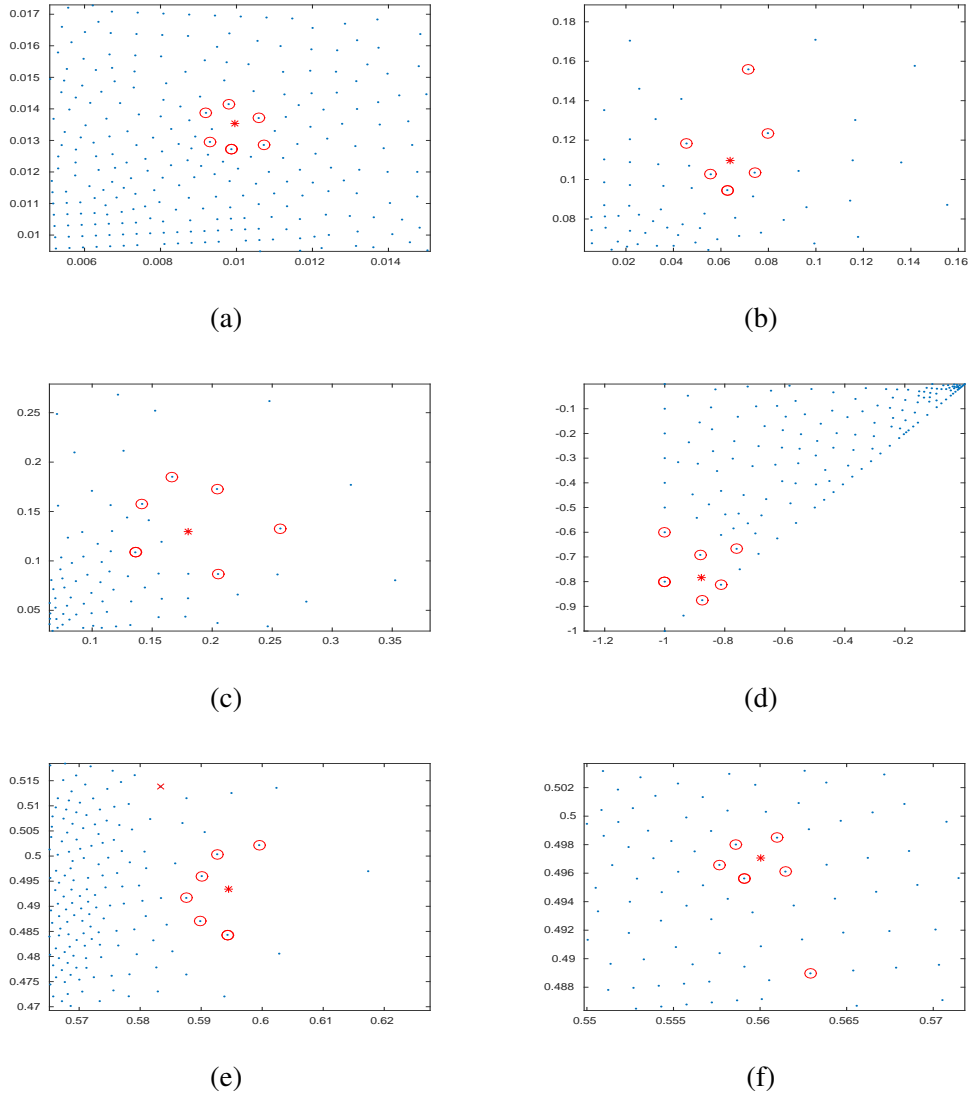
a. Update  $\Xi_\zeta := \{\zeta, \zeta_1, \dots, \zeta_k\} = \{\zeta, \zeta'_1, \dots, \zeta'_{k+1}\} \setminus \{\zeta'_p\}$ .

b. If  $\bar{\alpha}(\zeta_1, \dots, \zeta_k) \leq \nu \underline{\alpha}(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ , then STOP and return  $\Xi_\zeta$ .

3. If  $i = m$ :

Find the next  $m$  nearest points  $\xi_{m+1}, \dots, \xi_{2m}$  in  $\Xi \setminus \{\zeta\}$  to  $\zeta$ , sorted by increasing distance to  $\zeta$ , and set  $m := 2m$ .

4. Set  $i := i + 1$ .



Hình 2.1: Cấu trúc  $\Xi_\zeta$  thu được bởi Thuật toán ODP1. Dấu "\*" biểu diễn vị trí của  $\zeta$  và các hình tròn " $\odot$ " là vị trí của các điểm  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6$ .

**Mệnh đề 2.3.1.** Ký hiệu  $n := \#\Xi$ ,  $N_{\text{int}} := \#\Xi_{\text{int}}$ ,  $k$  là số tâm cần chọn của tập  $\Xi_\zeta$  và  $m > k$  là số tâm gần  $\zeta$  nhất được chọn ban đầu. Khi đó, độ phức tạp của Thuật toán ODP1 là  $\mathcal{O}(N_{\text{int}} m \log n)$ .

c) Thuật toán chọn với số tâm thay đổi và 1 điều kiện dừng OT1

Thuật toán cũng bắt đầu với  $m$  điểm  $\Xi_0^m := \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\} \subset \Xi \setminus \{\zeta\}$  thỏa mãn  $\|\zeta - \xi_1\| \leq \|\zeta - \xi_2\| \leq \dots \leq \|\zeta - \xi_m\|$  và  $\|\zeta - \xi_i\| \leq \|\zeta - \xi_j\|$  với  $\xi_i \in \Xi_0^m$ ,  $\xi_j \in \Xi \setminus \{\Xi_0^m \cup \{\zeta\}\}$ , thuật toán sử dụng 1 điều kiện dừng

$$\bar{\alpha}(\Xi_\zeta) - \underline{\alpha}(\Xi_\zeta) \leq \delta, \quad (2.4)$$

trong đó hằng số  $\delta \in (0, \pi/2)$ , giá trị của  $\delta$  thể hiện sự khác biệt giữa góc lớn nhất  $\bar{\alpha}$  và góc nhỏ nhất  $\underline{\alpha}$ .

**Thuật toán 2** (Thuật toán chọn OT1).

*Input:*  $\Xi, \zeta$ .

*Output:*  $\Xi_\zeta$ .

*Parameters:*  $m$  (the number of points in the local cloud),  $v \in \{3, 4, 5\}$  (the number of points in  $\Xi_\zeta \setminus \{\zeta\}$ ), and  $\delta := \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_v\}$  (the angle uniformity tolerance). In our experiments,  $m = 200$  and  $\delta := \{0.0001, \pi/4, \pi/3, \pi/4, \pi/8\}$ .

Ia. Determine the set  $\Xi_0^m := \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\}$ . Initialize  $I := \emptyset$  and  $i := 0$ .

Ib. *While*  $i \leq v$ :

1. Set  $i:=i+1$  and  $\Xi^{(i)} := \Xi_0^k \cup \{\zeta\}$  where  $k = i+3$  and  $k_c^{(i)} := i+4$ .
2. *If*  $\bar{\alpha}(\Xi^{(i)}) - \underline{\alpha}(\Xi^{(i)}) \leq \delta_i$ , *then* STOP and return  $\Xi_\zeta := \Xi^{(i)}$ .

IIa. *While*  $k_c^{(v)} \leq m$  and  $i \geq 1$

1. Compute the angles  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{i+4}$  formed by the extended set  $\Xi'^{(i)} := \Xi^{(i)} \cup \{\xi_{k_c^{(i)}}\}$ .
2. *If* angles between  $\zeta \xi_{k_c^{(i)}}$  and its two neighboring rays are greater than  $\underline{\alpha}'(\Xi'^{(i)})$ , *then*:
  - i. Find  $j$  such that  $\alpha'_j = \underline{\alpha}'(\Xi'^{(i)})$ , and *then* choose  $p = j$  or  $p = j+1$  depending on whether  $\alpha'_{j-1} < \alpha'_{j+1}$  or  $\alpha'_{j-1} \geq \alpha'_{j+1}$ , respectively.
  - ii. *If*  $\mu(\Xi'^{(i)} \setminus \{\xi'_p\}) < \mu(\Xi^{(i)})$ , *then*:
    - a. Update  $\Xi^{(i)} := \Xi'^{(i)} \setminus \{\xi'_p\}$  and  $I := I \cup \{i\}$ .
    - b. *If*  $\bar{\alpha}(\Xi^{(i)}) - \underline{\alpha}(\Xi^{(i)}) \leq \delta_i$ , *then* STOP and return  $\Xi_\zeta := \Xi^{(i)}$ .
3. *If*  $i = 1$ , *then*  $k_c^{(v)} := k_c^{(v)} + 1$  and  $i := v$ , *Else*  $i := i - 1$ .

IIb. *If*  $\bar{\alpha}(\Xi_0^k) < \pi$  or  $I = \emptyset$ , *then*  $\Xi_\zeta = \Xi_0^k \cup \{\zeta\}$  where  $k = v+3$ , *Else*  $\Xi_\zeta := \Xi^{(i)}$  where  $i := \max(\{I\})$ .

**Mệnh đề 2.3.2.** Đặt  $n = \#\Xi$ ,  $k$  là số tâm cần chọn của tập  $\Xi_\zeta$ . Giả sử đầu vào của Thuật toán OT1 là các tập  $\Xi_0^m$ , ( $m > k$ ). Khi đó độ phức tạp tính toán của Thuật toán OT1 là  $\mathcal{O}(n)$ .

## 2.4 Một số thuật toán chọn tâm trong không gian 3 chiều

### 2.4.1 Thuật toán k-near

Với mỗi  $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$ , thuật toán chọn tập tâm hỗ trợ  $\Xi_\zeta = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$  là  $k$  điểm thuộc  $\Xi \setminus \{\zeta\}$  gần  $\zeta$  nhất.

### 2.4.2 Thuật toán dựa trên các tứ diện chọn tet

Thuật toán dựa trên kết quả rời rạc miền  $\Omega$  bằng các tứ diện và tập  $\Xi$  là tất cả các đỉnh của tứ diện. Với mỗi  $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$ , thuật toán chọn tập  $\Xi_\zeta$  gồm  $\zeta$  và các điểm  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\} \subset \Xi \setminus \{\zeta\}$  là đỉnh của tất cả các tứ diện có chung đỉnh  $\zeta$ .

### 2.4.3 Thuật toán dựa trên các Octant

**Thuật toán 3** (Thuật toán 8-Octants).

*Input:*  $\Xi, \zeta \in \Xi_{\text{int}}$ .

*Output:*  $\Xi_\zeta, \Xi'_\zeta$ .

*Parameter:*  $m \geq 16$  (the number of nodes in the local cloud excluding  $\zeta$ ); we use  $m = 99$  in our numerical experiments.

*Initialization:*  $\Xi_\zeta := \{\zeta\}, \Xi'_\zeta := \emptyset$ .

- I. Find  $m$  points  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  in  $\Xi \setminus \{\zeta\}$  closest to  $\zeta$ .
- II. Distribute the points  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  into eight sets  $O_j = \{\xi_{j1}, \xi_{j2}, \dots\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 8$ , corresponding to the octants such that  $\|\xi_{j1} - \zeta\| \leq \|\xi_{j2} - \zeta\| \leq \dots$ .
- III. For  $j = 1$  to 8
  - a. If  $\#O_j = 1$  then  $\Xi_\zeta := \Xi_\zeta \cup \{\xi_{j1}\}$ .
  - b. ElseIf  $\#O_j > 1$  then  $\Xi_\zeta := \Xi_\zeta \cup \{\xi_{j1}, \xi_{j2}\}$ .
- IV. For each  $\xi \in \Xi_\zeta \setminus \{\zeta\}$  consider the segment  $(\zeta, \xi) = \{\zeta + \alpha(\xi - \zeta) : 0 < \alpha < 1\}$ . If  $(\zeta, \xi) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ , then  $\Xi_\zeta := \Xi_\zeta \setminus \{\xi\} \cup \{\xi'\}$  and  $\Xi'_\zeta := \Xi'_\zeta \cup \{\xi'\}$ , where  $\xi'$  is the point in  $(\zeta, \xi) \cap \partial\Omega$  closest to  $\zeta$ .

Sau khi áp dụng Thuật toán 8-Octants cho tất cả các điểm  $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$ , ta cập nhật tập  $\Xi$  bởi công thức

$$\Xi := \Xi \cup \bigcup_{\zeta \in \Xi_{\text{int}}} \Xi'_\zeta. \quad (2.5)$$

**Thuật toán 4** (Thuật toán 16-Octants).

*Input:*  $\Xi, \zeta \in \Xi_{\text{int}}$ .

*Output:*  $\Xi_\zeta, \Xi'_\zeta$ .

*Parameter:*  $m \geq 16$  (the number of nodes in the local cloud excluding  $\zeta$ ); we use  $m = 99$  in our numerical experiments.

*Initialization:*  $\Xi_\zeta := \{\zeta\}, \Xi'_\zeta := \emptyset$ .

- I. Find  $m$  points  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  in  $\Xi \setminus \{\zeta\}$  closest to  $\zeta$ .
- II. Distribute the points  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  into 16 sets  $O_j = \{\xi_{j1}, \xi_{j2}, \dots\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 16$ , corresponding to the half-octants such that  $\|\xi_{j1} - \zeta\| \leq \|\xi_{j2} - \zeta\| \leq \dots$ .

III. For  $j = 1$  to 16.

If  $\#O_j \geq 1$  then  $\Xi_\zeta := \Xi_\zeta \cup \{\xi_{j1}\}$ .

IV. For each  $\xi \in \Xi_\zeta \setminus \{\zeta\}$  consider the segment  $(\zeta, \xi)$ .

If  $(\zeta, \xi) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ , then  $\Xi_\zeta := \Xi_\zeta \setminus \{\xi\} \cup \{\xi'\}$  and  $\Xi'_\zeta := \Xi'_\zeta \cup \{\xi'\}$ , where  $\xi'$  is the point in  $(\zeta, \xi) \cap \partial\Omega$  closest to  $\zeta$ .

Sau khi áp dụng Thuật toán 16-Octants cho tất cả các điểm  $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$ , ta cập nhật  $\Xi$  bởi công thức (2.5).

**Mệnh đề 2.4.1.** Đặt  $n = \#\Xi$ . Khi đó độ phức tạp tính toán của Thuật toán 8-Octants và Thuật toán 16-Octants là  $\mathcal{O}(mn \log n)$ , với  $m$  là số điểm được chọn ban đầu.

#### 2.4.4 Thuật toán cải tiến thuật toán dựa trên octant oct-dist

**Thuật toán 5** (Thuật toán oct-dist).

*Input:*  $\Xi$  and  $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$ .

*Output:*  $\Xi_\zeta$ .

*Parameters:*

- $m$ : the number of nodes in the initial local cloud including  $\zeta$ ;
- $k$ : the target number of nodes in  $\Xi_\zeta$ ;
- $s \in \{1, 2, 3\}$ : the number of subdivisions of octants;
- $n$ : the number of candidate nodes in each octant,  $n = sv$  for some  $v \in \mathbb{N}$ ;
- $0 < \delta < 1$ : the standard distance tolerance.

I. Choose a set  $\Xi_{\text{cand}} \subset \Xi \setminus \{\zeta\}$  of candidate neighbors.

1. Choose the initial cloud  $\Xi_{\text{Init}} := \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}\} \subset \Xi \setminus \{\zeta\}$  consisting of  $m - 1$  nodes closest to  $\zeta$ , sorted by increasing distance to  $\zeta$ .
2. Compute  $\rho_\zeta := \frac{\delta}{6} \sum_{i=1}^6 \|\zeta - \xi_i\|$ .
3. Determine  $8s$  sets  $\tilde{O}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 8s$ , corresponding to the octants, for  $s = 1$ , half-octants for  $s = 2$ , or one-third-octants for  $s = 3$ , by collecting in each  $\tilde{O}_j$  at most  $v$  nodes in  $\Xi_{\text{Init}}$  closest to  $\zeta$  and lying in the corresponding octant, half-octant or one-third-octant. We set  $\Xi_{\text{cand}} := \bigcup_{j=1}^{8s} \tilde{O}_j$ .
4. Determine subsets  $O_j = \{\xi_1^j, \xi_2^j, \dots\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 8$ , of  $\Xi_{\text{cand}}$  consisting of the nodes lying in the eight octants as follows. If  $s = 1$ , then  $O_j = \tilde{O}_j$ ; otherwise  $O_j$  is the union of  $s$  sets of the type  $\tilde{O}_i$ . Assume that the numbering of the nodes is such that  $\|\zeta - \xi_1^j\| \leq \|\zeta - \xi_2^j\| \leq \dots \leq \|\zeta - \xi_{n_j}^j\|$ , with  $0 \leq n_j \leq n$ . Note that some  $O_j$  may be empty.

5. If  $\#\Xi_{\text{cand}} \leq k - 1$ , then STOP and return  $\Xi_\zeta := \Xi_{\text{cand}} \cup \{\zeta\}$ .

II. Choose the influence set  $\Xi_\zeta \subset \Xi_{\text{cand}} \cup \{\zeta\}$ .

*Initialization:*  $\Xi_\zeta := \emptyset$ .

1. For  $j = 1$  to 8:

If  $O_j \neq \emptyset$ , then  $\Xi_\zeta := \Xi_\zeta \cup \{\xi_1^j\}$ .

2. Set  $\Xi_{\text{cand}} := \Xi_{\text{cand}} \setminus \Xi_\zeta$ , such that  $\Xi_{\text{cand}} = \{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots\}$ , where  $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots$  are sorted by increasing distance to  $\zeta$ .

3. For  $i = 1$  to  $\#\Xi_{\text{cand}}$ :

If  $\text{dist}(\bar{\xi}_i, \Xi_\zeta) \geq \rho_\zeta$ , then:

a.  $\Xi_\zeta := \Xi_\zeta \cup \{\bar{\xi}_i\}$ .

b. If  $\#\Xi_\zeta = k - 1$ , then STOP and return  $\Xi_\zeta := \Xi_\zeta \cup \{\zeta\}$ .

4. Set  $\rho_\zeta := \delta\rho_\zeta$  and GOTO II.2.

**Mệnh đề 2.4.2.** Đặt  $n = \#\Xi$  và  $k$  là số tâm cần chọn của tập  $\Xi_\zeta$ . Khi đó độ phức tạp tính toán của Thuật toán oct-dist là  $\mathcal{O}(mn \log n)$ , với  $m$  là số điểm được chọn ban đầu.

### 2.4.5 Thuật toán pQR

Thuật toán pQR được Oleg Davydov và Mansour Safarpoor giới thiệu năm 2021. Chúng tôi áp dụng thuật toán pQR với các phiên bản pQRse1, pQR3, pQR4.

## 2.5 Thuật toán làm mịn thích nghi không lưới

**Định nghĩa 2.5.1.** Với mỗi  $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$ , độ lệch (error indicator)  $\varepsilon(\zeta, \xi)$  ứng với ‘cạnh’  $\zeta\xi$ ,  $\xi \in \Xi_\zeta \setminus \{\zeta\}$  được tính bởi công thức

$$\varepsilon(\zeta, \xi) := |\hat{u}_\zeta - \hat{u}_\xi|, \quad (2.6)$$

trong đó  $\hat{u}$  là nghiệm xấp xỉ của Bài toán (1) được xác định bởi hệ phương trình (2.1) trên miền rời rạc  $\Xi$ .

**Định nghĩa 2.5.2.** Với mỗi  $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$ , độ lệch  $\varepsilon(\zeta, \xi)$  ứng với ‘cạnh’  $\zeta\xi$ ,  $\xi \in \Xi_\zeta \setminus \{\zeta\}$  được tính bởi công thức

$$\varepsilon(\zeta, \xi) = \varepsilon_1(\zeta, \xi) := |(\hat{u}_\zeta - \hat{u}_\xi) - (\ell_\zeta(\zeta) - \ell_\zeta(\xi))|, \quad (2.7)$$

trong đó  $\hat{u}$  là nghiệm xấp xỉ của Bài toán (1) được xác định bởi hệ phương trình (2.1) trên miền rời rạc  $\Xi$  và

$$\ell_\zeta(x) := a + b^T(x - \zeta)$$



là đa thức tuyến tính ứng với dữ liệu  $\{(\xi, \hat{u}_\xi) : \xi \in \Xi_\zeta\}$ , với các hệ số  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^2$  được chọn thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{\xi \in \Xi_\zeta} |\hat{u}_\xi - \ell_\zeta(\xi)|^2$$

đạt cực tiểu.

Ngưỡng độ lệch  $\tau := \gamma \varepsilon_1$ , với hệ số  $\gamma \in (0, 1)$ . Đây là chiến lược tối đa và được áp dụng cho một trong ba trường hợp đặc biệt sau: Với tập khởi tạo  $\Xi$  hoặc  $\varepsilon_1 \geq 2$  hoặc  $\varepsilon_1 \geq 10^2 \varepsilon_1^{\text{prev}}$ , với  $\varepsilon_1^{\text{prev}}$  là giá trị độ lệch lớn nhất của lần làm mịn trước và

$$\varepsilon(\Xi) := \{\varepsilon(\zeta, \xi) : \zeta \in \Xi_{\text{int}}, \xi \in \Xi_\zeta \setminus \{\zeta\}\}, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon^{\text{D}} := \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N\}, \text{ trong đó } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_N, \varepsilon^{\text{D}} \subseteq \varepsilon(\Xi). \quad (2.9)$$

**Định nghĩa 2.5.3.** Khoảng cách tách biệt của tâm  $\xi'$  với tập  $\Xi'$  được xác định bởi công thức

$$\text{sep}_{\xi'}(\Xi') := \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \text{dist}(\xi_i, \Xi' \setminus \{\xi_i\}), \quad (2.10)$$

trong đó  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_4$  là 4 điểm thuộc  $\Xi'$  gần  $\xi'$  nhất và

$$\text{dist}(x, Y) := \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}$$

là khoảng cách từ  $x$  đến tập  $Y$ .

### 2.5.1 Thuật toán sinh tâm trung điểm D02

Năm 2011, Oleg Davydov và Dang Thi Oanh đã giới thiệu thuật toán sinh tâm trung điểm D02 cho phương pháp RBF-FD cùng với thuật toán chọn tâm D01.

### 2.5.2 Thuật toán sinh 5 tâm ODP2

**Thuật toán 6** (Thuật toán ODP2).

*Input:* The set of centers  $\Xi$  and stencil supports  $\{\Xi_\zeta : \zeta \in \Xi_{\text{int}}\}$ .

*Output:* The refined set of centers  $\Xi'$ .

*Parameters:*  $\gamma = 0.5$  (error indicator tolerance),  $\mu = 0.8$  (separation tolerance) and  $n = 15$  (percentage of added centers).

- I. Compute the error indicator threshold  $\bar{\varepsilon} = \gamma \bar{\varepsilon}(\Xi)$  and initialize  $\Xi' := \Xi$ .
- II. For each edge  $\zeta \xi$ ,  $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$ ,  $\xi \in \Xi_\zeta \setminus \{\zeta\}$ , such that  $\varepsilon(\zeta, \xi) \geq \bar{\varepsilon}$ :
  1. Compute  $\xi_{\text{mid}} := (\zeta + \xi)/2$ ,  $\xi_{\text{mid}}^+ := \xi_{\text{mid}} + d\bar{\mathbf{v}}$  and  $\xi_{\text{mid}}^- := \xi_{\text{mid}} - d\bar{\mathbf{v}}$ , where  $d := \|\zeta - \xi\|/2$  and  $\bar{\mathbf{v}}$  is the unit vector perpendicular to the edge  $\zeta \xi$ .  
Initialize  $\Xi_C := \emptyset$ .

2. If  $\xi \in \Xi_{\text{int}}$ , then for each  $\xi' \in \{\xi_{\text{mid}}, \xi_{\text{mid}}^+, \xi_{\text{mid}}^-\}$ :  
 If  $\text{dist}(\xi', \partial\Omega) \geq d/2$  and  $\text{dist}(\xi', \Xi') \geq \mu \text{sep}_{\xi'}(\Xi')$ , then set  $\Xi_C := \Xi_C \cup \{\xi'\}$ .
  3. ElseIf  $\xi \in \partial\Xi$ :
    - i. For each  $\xi' \in \{\xi_{\text{mid}}, \xi_{\text{mid}}^+, \xi_{\text{mid}}^-\}$ :  
 If  $\text{dist}(\xi', \partial\Omega) \geq d/2$  and  $\text{dist}(\xi', \Xi') \geq d/2$ , then set  $\Xi_C := \Xi_C \cup \{\xi'\}$ .
    - ii. If  $\Xi_C \neq \emptyset$  or  $\text{dist}(\xi_{\text{mid}}, \partial\Omega) < d/2$ :  
 Find two neighbors  $\xi_-, \xi_+$  of  $\xi$  in  $\partial\Xi$ , one in each direction from  $\xi$  along the boundary, and compute two middle points  $\xi'_-, \xi'_+ \in \partial\Omega$  defined by the pairs  $\xi, \xi_-$  and  $\xi, \xi_+$ , respectively. Set  $\Xi_C := \Xi_C \cup \{\xi'_+, \xi'_-\}$ .
  4. Set  $\Xi' := \Xi' \cup \Xi_C$ .
- III. If the number of centers in  $\Xi'_{\text{int}} \setminus \Xi_{\text{int}}$  is less than  $n\%$  of the number of centers in  $\Xi_{\text{int}}$ , then set  $\bar{\varepsilon} := \gamma\bar{\varepsilon}$  and goto Step II.  
 Else STOP and return  $\Xi'$ .

**Mệnh đề 2.5.1.** Đặt  $n = \#\Xi$  và  $N_c$  là số tâm ứng viên. Khi đó độ phức tạp tính toán của Thuật toán ODP2 là  $\mathcal{O}(N_c \log n)$ .

### 2.5.3 Thuật toán cải tiến sinh 5 tâm OT2

**Thuật toán 7** (Thuật toán OT2).

*Input:* The set of centers  $\Xi$  and the stencil supports  $\{\Xi_\zeta : \zeta \in \Xi_{\text{int}}\}$ .

*Output:* The refined set of centers  $\Xi'$ .

*Parameters:*  $\gamma$  (error indicator tolerance),  $\sigma, \rho$  (ratios),  $\mu$  (separation tolerance). Initialize  $\Xi' := \Xi$ .

#### I. Compute the error indicator threshold

1. Compute sets  $\varepsilon(\Xi)$  (2.8) and set  $\varepsilon^D$  (2.9).
2. If  $\varepsilon_1 \geq 5$ , or  $\varepsilon_1 \leq 10^{-10}$ , or  $\varepsilon_1 > 10^2 \varepsilon_1^{\text{prev}}$ , then  $\mu := \mu - 0.2$ .
3. If  $\Xi$  is the initial set, or  $\varepsilon_1 > 10^2 \varepsilon_1^{\text{prev}}$ , or  $\varepsilon_1 \geq 2$ , then  $\tau := \gamma \varepsilon_1$ ; Else  $\tau := \max(\gamma \tau^{\text{prev}}, \varepsilon_j)$ , where  $j := \lfloor \rho n \rfloor$ .

#### II. For each candidate edge $\zeta \xi$ :

1. If  $\xi \in \Xi_{\text{int}}$ , then For each  $\xi' \in \{\xi_{\text{mid}}, \xi_{\text{mid}}^+, \xi_{\text{mid}}^-\}$ , if  $\text{dist}(\xi', \Xi') \geq \mu \text{sep}_{\xi'}(\Xi')$ , then  $\Xi' := \Xi' \cup \{\xi'\}$ .
2. Else:

- i. For each  $\xi' \in \{\xi_{\text{mid}}, \xi_{\text{mid}}^+, \xi_{\text{mid}}^-\}$ , if  $\min(\text{dist}(\xi', \partial\Omega), \text{dist}(\xi', \Xi')) \geq \sigma \|\zeta - \xi\|$ , then  $\Xi' := \Xi' \cup \{\xi'\}$ .
- ii. Determine two middle points  $\xi'_-, \xi'_+ \in \partial\Omega$  and set  $\Xi' := \Xi' \cup \{\xi'_+, \xi'_-\}$ .

III. If  $\Xi'_{\text{int}} = \Xi_{\text{int}}$ , then  $\tau := \gamma\tau$  and go to Step II, Else STOP and return  $\Xi'$ .

**Mệnh đề 2.5.2.** Đặt  $n = \#\Xi$  và  $N_c$  là số tâm ứng viên. Khi đó độ phức tạp tính toán của Thuật toán OT2 là  $\mathcal{O}(N_c \log(n))$ .

## 2.6 Kết luận

Trong chương đã trình bày các kết quả:

- Cách tính trọng số RBF-FD bằng nội suy RBF với 3 trường hợp, trọng số RBF-FD không có thành phần hằng số, trọng số RBF-FD với thành phần hằng số và trọng số RBF-FD với thành phần đa thức. Các cách tính này là cơ sở của phương pháp không lưới RBF-FD.
- Các thuật toán chọn tâm (chọn giá véc tơ trọng số  $\Xi_\zeta$ ) cho phương pháp RBF-FD trong không gian 2 chiều, đồng thời đề xuất thuật toán mới OT1 cho các bài toán có miền hình học phức tạp, nghiệm có kỳ dị, hoặc có độ dao động mạnh. Thuật toán đề xuất có độ phức tạp  $\mathcal{O}(n)$  nếu đầu vào của thuật toán là  $m$  điểm gần nhất. So với các thuật toán đã công bố trước thì thuật toán được đề xuất có chi phí tính toán giảm.
- Đề xuất các thuật toán chọn giá véc tơ trọng số  $\Xi_\zeta$  cho phương pháp RBF-FD trong không gian 3 chiều, như 8-Octants, 16-Octants, oct-dist, đồng thời giới thiệu các thuật toán tet, k-near, pQR4sel, pQR3, pQR4 áp dụng cho phương pháp RBF-FD.
- Các thuật toán sinh tâm thích nghi cho phương pháp RBF-FD trong không gian 2 chiều. Đề xuất thuật toán sinh tâm thích nghi mới OT2, có độ phức tạp là  $\mathcal{O}(N_c \log n)$ . Thuật toán được đề xuất có chi phí tính toán giảm so với các thuật toán trước đó.

## Chương 3

# THỬ NGHIỆM SỐ

Để đánh giá hiệu quả của các thuật toán sinh tâm thích nghi và thuật toán chọn giá véc tơ trọng số, trong chương này chúng tôi trình bày các thử nghiệm số trong không gian 2 chiều và trong không gian 3 chiều. Thử nghiệm số trong không gian 2 chiều trên các bài toán có miền hình học phức tạp, hàm có kỳ dị hoặc dao động mạnh, còn trong không gian 3 chiều, là các thử nghiệm số trên các bài toán có miền lỗi hoặc miền hình học phức tạp trong thực tế, với tập  $\Xi \subset \Omega$  của các bài toán được rời rạc bởi các cách khác nhau, như đỉnh của các tứ diện 3D, lưới đều hoặc điểm Halton.

### 3.1 Thử nghiệm số trong không gian 2 chiều

#### 3.1.1 Bài toán có miền hình học phức tạp

**Bài toán 1.** Xét bài toán Dirichlet với phương trình Laplace  $\Delta u = 0$  trong miền hình quạt  $\Omega$  được xác định bởi bất phương trình  $r < 1$ ,  $-3\pi/4 < \varphi < 3\pi/4$  trong tọa độ cực, điều kiện biên Dirichlet được cho bởi  $u(r, \varphi) = \cos(2\varphi/3)$  dọc theo cung cong và  $u(r, \varphi) = 0$  dọc theo hai đoạn thẳng. Nghiệm giải tích là  $u(r, \varphi) = r^{2/3} \cos(2\varphi/3)$ .

**Bài toán 2** (William F. Mitchell, Phần 2.2, năm 2013). Xét bài toán elliptic với phương trình Laplace  $\Delta u = 0$  trong miền  $\Omega_\omega = (-1, 1)^2 \cap \{(r, \varphi) : 0 < \varphi < \omega\}$ , trong đó  $r, \varphi$  là hệ tọa độ cực, với một số giá trị  $\omega \in (0, 2\pi]$ . Điều kiện biên Dirichlet được chọn thỏa mãn nghiệm giải tích  $r^\alpha \sin(\alpha\varphi)$  trong hệ tọa độ cực, trong đó  $\alpha = \pi/\omega$  trong các trường hợp sau

- |                             |                         |
|-----------------------------|-------------------------|
| (a) $\omega = \pi + 0.01$ . | (b) $\omega = 5\pi/4$ . |
| (c) $\omega = 7\pi/4$ .     | (d) $\omega = 2\pi$ .   |

**Bài toán 3** (Dang Thi Oanh và các cộng sự, Phần 4, năm 2017). Xét bài toán elliptic (1) với phương trình Laplace  $\Delta u = 0$  trên miền  $\Omega_\omega = (-1, 1)^2$  loại đi các điểm thuộc cung cong của đường tròn tâm tại  $(1, -0.75)$  bán kính 1.25 từ điểm  $(0, 0)$  đến  $(1, 0.5)$ . Điều kiện biên Dirichlet thỏa mãn nghiệm giải tích của bài toán là  $u(x, y) = \operatorname{Re} \sqrt{(3 - 4i)z/(z - 2)}$ , với  $z = x + iy$ .

#### 3.1.2 Bài toán nghiệm có kỳ dị hoặc dao động mạnh

**Bài toán 4.** Xét phương trình Laplace  $\Delta u = 0$  trong miền  $\Omega = (0.01, 1.01)^2$  và điều kiện biên Dirichlet thỏa mãn nghiệm giải tích  $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ .

**Bài toán 5** (William F. Mitchell, Phần 2.8, năm 2013). Xét bài toán elliptic (1) với phương trình Helmholtz  $-\Delta u - \frac{1}{(\alpha+r)^4}u = f$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , trên miền  $\Omega = (0, 1)^2$ , trong đó vế phải và điều kiện biên được chọn thỏa mãn nghiệm giải tích là  $u = \sin(\frac{1}{\alpha+r})$  với các trường hợp

$$(a) \quad \alpha = \frac{1}{10\pi}. \quad (b) \quad \alpha = \frac{1}{50\pi}.$$

**Bài toán 6** (William F. Mitchell, Phần 2.4, năm 2013). Xét bài toán elliptic (1) với phương trình Poisson  $\Delta u = f$  trong miền  $\Omega = (0, 1)^2$ , trong đó vế phải  $f$  và điều kiện biên Dirichlet thỏa mãn nghiệm giải tích  $u(x) = e^{-\alpha\|x-x_0\|^2}$ . Các giá trị tham số  $\alpha$  (độ dao động) và  $x_0$  (vị trí) như sau

$$(a) \quad \alpha = 1000, x_0 = (0.5, 0.5). \quad (b) \quad \alpha = 100000, x_0 = (0.51, 0.117).$$

Bảng 3.1: Kết quả thử nghiệm số của các bài toán: TP là tên bài toán;  $\#\Xi_{\text{init}}$  là số tâm trong miền của FEM được tạo bởi PDE Toolbox trong MATLAB;  $\#\text{Ref}i$  là số lần làm mịn tương ứng của mỗi bài toán;  $\#\Xi_{\text{end}}$  là  $\#\Xi_{\text{init}}$  của lần làm mịn cuối cùng;  $\sum\#\Xi_{\text{init}}$  là tổng số tâm trong miền của số lần làm mịn tại cột  $\#\text{Ref}i$ .

TP	$\#\Xi_{\text{init}}$	FEM		RBF-FD 17			RBF-FD		
		$\#\text{Ref}i$	$\#\Xi_{\text{end}}$	$\#\text{Ref}i$	$\#\Xi_{\text{end}}$	$\sum\#\Xi_{\text{init}}$	$\#\text{Ref}i$	$\#\Xi_{\text{end}}$	$\sum\#\Xi_{\text{init}}$
1	82	28	19 394	14	21 929	45 125	14	15 384	37 154
2a	67	19	17 059	14	19 328	39 665	11	18 417	37 265
2b	83	24	26 721	12	25 825	52 394	12	26 511	57 835
2c	122	33	23 008	17	22 184	46 951	16	23 598	73 904
2d	142	36	20 430	21	21 016	98 208	15	25 138	76 868
3	133	39	36 938	26	39 176	187 189	18	40 676	117 473
4	137	19	24 153	13	26 442	54 666	11	20 107	42 577
5a	137	28	56 998	20	50 095	161 954	16	40 059	108 518
5b	137	32	60 531	21	44 258	170 073	18	40 355	119 533
6a	137	21	137 077	22	124 755	366 662	9	95 019	153 287
6b	137	28	116 783	22	95 367	274 260	12	86 633	154 307

Kết quả các thử nghiệm số trong không gian 2 chiều cho thấy: Sai số trên các tâm thích nghi  $E_{rc}$  và sai số trên lưới đều  $E_{rg}$  của RBF-FD mịn, ổn định và thường nhỏ hơn kết quả sai số của FEM và RBF-FD 17, điều đó cũng được thể hiện qua việc so sánh hiệu  $u - \hat{u}$  của nghiệm RBF-FD với nghiệm RBF-FD 17 ứng với tập các tâm thích nghi trên các bài toán thử nghiệm số. Bên cạnh đó, các tâm thích nghi được sinh bởi Thuật toán OT2 cũng đều hơn các tâm thích nghi sinh bởi Thuật toán ODP2 và Thuật toán DO2, đặc biệt với các bài toán khó, như Bài toán 6, cho thấy sự vượt trội của RBF-FD so với RBF-FD 17. Ngoài ra, so sánh độ lệch lớn nhất  $\max(\{\varepsilon(\zeta, \xi)\})$ , ngưỡng độ lệch  $\tau$  tính tại Bước I.1. của Thuật toán ODP2 và tại Bước I.1, I.3. của Thuật toán OT2 cũng cho thấy sự ổn định

Bảng 3.2: Các giá trị  $\alpha_{Aver}$ ,  $\delta_{aver}$ ,  $i_{aver}$ ,  $c_{max}$ ,  $c_{aver}$ ,  $k_{aver}$  và  $p_1$  xác định tại lần làm mịn cuối cùng của các phương pháp RBF-FD 17 và RBF-FD.

TP	RBF-FD 17					RBF-FD						
	$\delta_{aver}$	$\alpha_{Aver}$	$i_{aver}$	$c_{max}$	$c_{aver}$	$\delta_{aver}$	$\alpha_{Aver}$	$i_{aver}$	$c_{max}$	$c_{aver}$	$k_{aver}$	$p_1$
1	0.76	0.76	8.56	2.45	1.30	0.64	0.83	6.70	2.55	1.24	5.89	75
2a	0.76	0.76	8.44	2.38	1.29	0.63	0.84	6.81	2.39	1.23	5.91	78
2b	0.76	0.76	8.40	2.52	1.29	0.65	0.83	6.82	3.14	1.24	5.90	75
2c	0.76	0.76	8.89	2.39	1.30	0.65	0.82	6.63	2.47	1.24	5.90	77
2d	0.75	0.75	9.08	2.52	1.30	0.66	0.81	6.88	2.64	1.24	5.94	74
3	0.76	0.75	8.72	2.46	1.30	0.65	0.82	7.04	2.71	1.24	5.94	77
4	0.76	0.76	8.32	2.43	1.29	0.62	0.86	6.70	2.32	1.24	5.81	78
5a	0.77	0.76	8.34	2.69	1.28	0.57	0.93	6.44	2.41	1.24	5.64	81
5b	0.77	0.77	8.25	2.47	1.28	0.56	0.95	6.52	2.55	1.24	5.59	81
6a	0.76	0.77	8.81	2.50	1.26	0.51	1.00	6.34	2.61	1.23	5.49	78
6b	0.77	0.77	8.17	2.46	1.27	0.40	1.14	5.73	2.98	1.20	5.16	90

của RBF-FD so với RBF-FD 17. Đồng thời kết quả mật độ ma trận hệ số, số tâm được chọn trung bình  $k_{aver}$ , số lần sinh tâm thích nghi #Refi và  $p_1$  số % Thuật toán OT1 dừng lại ở Bước II trên mỗi bài toán, cho thấy chi phí tính toán của RBF-FD cũng giảm đáng kể.

### 3.2 Thử nghiệm số trong không gian 3 chiều

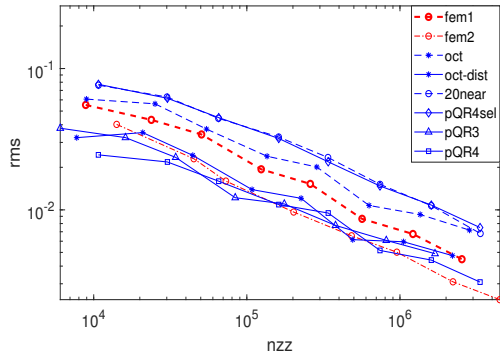
Để đánh giá hiệu quả các phương pháp RBF-FD, tập các tâm  $\Xi \subset \Omega$  của các bài toán được tạo bởi một số cách khác nhau, như đỉnh của tứ diện hoặc dưới dạng lưới đều Descartes hoặc điểm Halton kết hợp với một số tùy chọn tạo điểm trên biên của miền rời rạc.

#### 3.2.1 Bài toán có miền hình học lồi

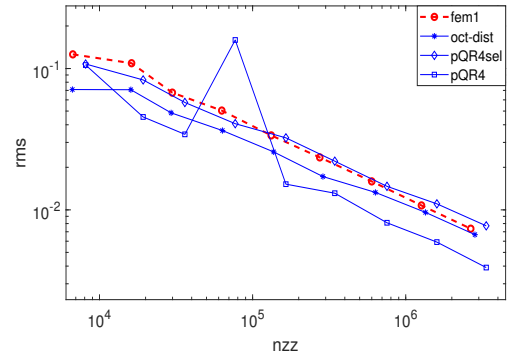
**Bài toán 7.** Xét phương trình Poisson  $\Delta u = 3e^{x+y+z}$  với miền  $\Omega$  là khối cầu  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$  với điều kiện biên Dirichlet được chọn thỏa mãn nghiệm chính xác  $u(x, y, z) = e^{x+y+z}$ .

#### 3.2.2 Bài toán có miền hình học phức tạp thực tế

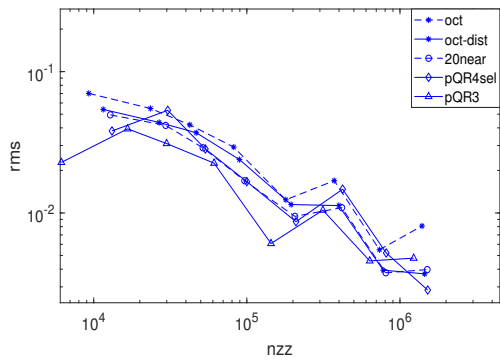
**Bài toán 8** (BracketTwoHoles). Xét phương trình Poisson  $\Delta u = -10$  với điều kiện biên Dirichlet  $u|_{\partial\Omega} = 0$  trên miền  $\Omega$  được xuất ra từ file STL 'BracketTwoHoles.stl' trong PDE Toolbox của MATLAB.



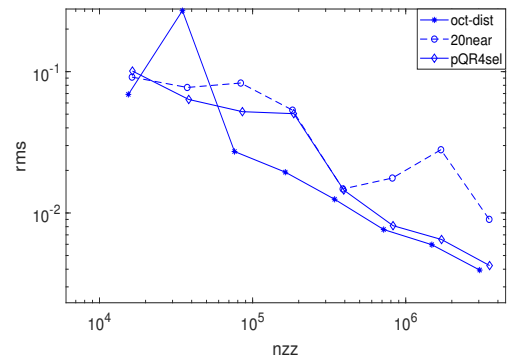
(a) Sai số trên đỉnh của các tứ diện tối ưu



(b) Sai số trên đỉnh của các tứ diện không tối ưu



(c) Sai số trên lưới đều và các điểm biên của (a)



(d) Sai số trên điểm Halton và các điểm biên

Hình 3.1: Kết quả thử nghiệm số của Bài toán 8: Các sai số  $E_{\text{ref}}$ : (a) Sai số trên đỉnh của các tứ diện tối ưu, (b) Sai số trên đỉnh của các tứ diện không tối ưu, (c) Sai số trên lưới đều và các điểm biên là đỉnh của các tứ diện biên tối ưu và (d) Sai số trên điểm Halton và các điểm biên.

**Bài toán 9** (Forearm Link). Xét phương trình Poisson  $\Delta u = -10$  với điều kiện biên Dirichlet đồng nhất  $u|_{\partial\Omega} = 0$  trên miền  $\Omega$  xác định bởi file STL ‘ForearmLink.stl’ trong PDE Toolbox của MATLAB.

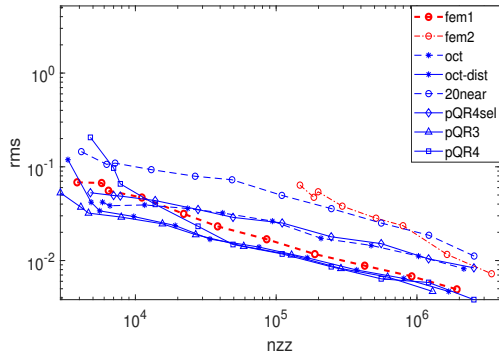
**Bài toán 10** (BeamTrussJunction). Xét phương trình Poisson  $\Delta u = -10$  với điều kiện biên Dirichlet đồng nhất bằng không trên miền  $\Omega$ , được xác định bởi mô hình trong file STL tại địa chỉ

<https://cults3d.com/en/3d-model/various/beam-truss-cross-and-t-junction-134>.

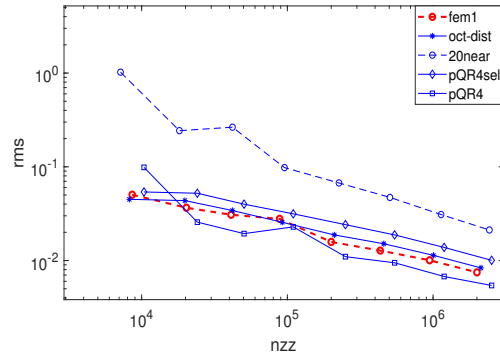
Từ các kết quả thử nghiệm số trong không gian 3 chiều cho thấy:

- Phương pháp không lưới RBF-FD sử dụng các thuật toán chọn tập các tâm khác nhau để tính trọng số có sai số tốt so với FEM trên các bài toán có miền phức tạp.

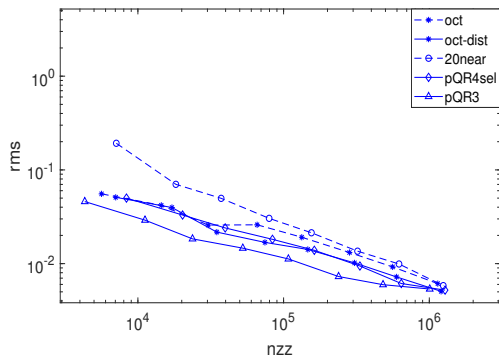
- Cấu trúc tứ diện đều để tạo các điểm trong  $\Xi$  không quan trọng đối với các phương pháp RBF-FD, điều này đã được đưa ra trong thử nghiệm số của Bài toán 7. Trong các bài toán thử nghiệm khác, hiệu quả của RBF-FD trên đỉnh của các tứ diện chưa tối ưu kém



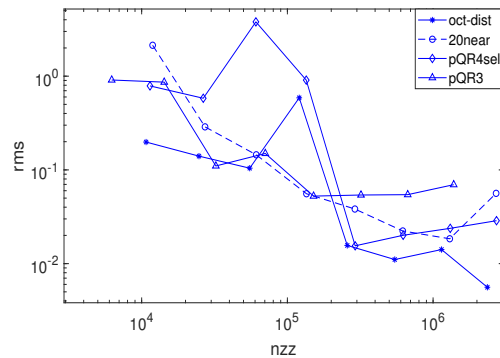
(a) Sai số trên đỉnh của các tứ diện tối ưu



(b) Sai số trên đỉnh của các tứ diện không tối ưu



(c) Sai số trên lưới đều và các điểm biên của (a)



(d) Sai số trên điểm Halton và các điểm biên

Hình 3.2: Kết quả thử nghiệm số của Bài toán 10: Các sai số  $E_{ref}$ : (a) Sai số trên đỉnh của các tứ diện tối ưu, (b) Sai số trên đỉnh của các tứ diện không tối ưu, (c) Sai số trên lưới đều và các điểm biên là đỉnh của các tứ diện biên tối ưu và (d) Sai số trên điểm Halton và các điểm biên.

hơn đáng kể, nguyên nhân có thể do các yếu tố khác, như các thuật toán tạo tứ diện áp dụng cho các miền xuất từ file STL, (xem phần thử nghiệm của Bài toán 8). Việc rời rạc điểm biên trên các miền không lỗi được xác định bởi các mô hình trong file STL là rất quan trọng để phương pháp RBF-FD đạt hiệu quả. Phương pháp tạo điểm biên tốt nhất trong các thử nghiệm là sử dụng các điểm biên được tạo bởi các đỉnh của tứ diện tối ưu. Đối với các điểm bên trong miền, phương pháp rẻ nhưng cho hiệu quả tốt để tạo tứ diện tối ưu là tạo các nút lưới đều Descartes, bộ tâm này cũng có lợi thế là làm cho mật độ ma trận hệ số rất thấp và cung cấp khả năng sử dụng tính trọng số 7- điểm như phương pháp sai phân hữu hạn, cho hầu hết các tâm bên trong miền. Tuy nhiên, với bất kỳ cách tạo điểm nào, nếu chọn được bộ tâm để tính trọng số tốt thì nghiệm của phương pháp RBF-FD sẽ tốt.

- Hệ số số ổn định  $\sigma$  được giới thiệu trong Bài toán 8 như một cách để đánh giá hiệu quả của các phương pháp RBF-FD. Trong một số trường hợp của tập  $\Xi$ , hệ số ổn định của



2 phương pháp đáng tin cậy nhất oct-dist và pQR4sel cũng không tránh khỏi tăng đột biến và khó dự đoán, nhưng ít nhất chúng có thể được phát hiện nếu  $\sigma$  được tính.

- Các phương pháp chọn tâm là các điểm gần nhất không phải là một trong những phương pháp tốt nhất, như 20near có sai số cao nhất trên bộ tâm là đỉnh của các tứ diện tối ưu trong tất cả các bài toán có miền xuất ra từ file STL và thường bị lỗi trên các nút lưới đều. Việc tăng thêm số điểm gần nhất cũng không cải thiện được kết quả như trong Bài toán 8. Phương pháp oct-dist có kết quả tốt nhất trong số các phương pháp chọn tâm được xem xét. Một phương pháp cũng hoạt động ổn định trên tập  $\Xi$  được tạo bởi các cách khác nhau là pQR4sel, tuy nhiên sai số của nó thường cao hơn sai số của oct-dist.

### 3.3 Kết luận

Các kết quả đạt được trong chương này là:

- Trình bày chi tiết các thử nghiệm số trong không gian 2 chiều cho phương pháp RBF-FD, sử dụng kết hợp 2 thuật toán chọn giá véc tơ trọng số OT1 và thuật toán sinh tâm thích nghi OT2 mới được đề xuất trên các bài toán có miền hình học phức tạp, nghiệm có kỳ dị hoặc dao động mạnh, đối sánh kết quả của phương pháp RBF-FD trên tâm thích nghi không lưới mới với kết quả của FEM trên lưới thích nghi và kết quả của phương pháp RBF-FD sử dụng kết hợp 2 thuật toán chọn tâm ODP1 và thuật toán sinh tâm thích nghi ODP2 trên tâm thích nghi. Kết quả thử nghiệm số cho thấy nghiệm của phương pháp RBF-FD sử dụng kết hợp 2 thuật toán mới được đề xuất OT1, OT2, ổn định và độ chính xác cao hơn so với nghiệm của FEM và nghiệm của phương pháp RBF-FD sử dụng kết hợp 2 thuật toán ODP1, ODP2, đồng thời chi phí tính toán của các thuật toán mới cũng giảm đáng kể.

- Giới thiệu tỉ mỉ các thử nghiệm số trong không gian 3 chiều cho phương pháp RBF-FD sử dụng các thuật toán chọn tâm được đề xuất 8-Octants, 16-Octants, oct-dist, đồng thời áp dụng các thuật toán tet, k-near, pQR4sel, pQR3, pQR4 cho phương pháp RBF-FD trên các bài toán có miền hình lồi hoặc miền hình học phức tạp trong thực tế với các cách rời rạc miền khác nhau, đối sánh các kết quả của phương pháp RBF-FD với kết quả của FEM. Kết quả thử nghiệm số cho thấy, nghiệm của phương pháp RBF-FD sử dụng các thuật toán chọn khác nhau có độ chính xác tốt và có thể so sánh với nghiệm của FEM.

## KẾT LUẬN

Luận án nghiên cứu phương pháp không lưới RBF-FD giải phương trình đạo hàm riêng elliptic, các kết quả Luận án đạt được:

- Đề xuất thuật toán chọn tâm mới hỗ trợ tính véc tơ trọng số cho phương pháp RBF-FD giải phương trình đạo hàm riêng elliptic trong không gian 2 chiều.
- Đề xuất thuật toán sinh tâm thích nghi cho phương pháp RBF-FD giải phương trình đạo hàm riêng elliptic trong không gian 2 chiều trên các bài toán có miền hình học phức tạp, nghiệm có kỳ dị hoặc dao động lớn.
- Đề xuất 3 thuật toán chọn tâm mới cho phương pháp RBF-FD trong không gian 3 chiều trên các bài toán có miền lồi hoặc miền hình học phức tạp.
- Nghiên cứu chi tiết các thử nghiệm số cho phương pháp RBF-FD sử dụng các thuật toán được đề xuất giải phương trình đạo hàm riêng elliptic trong không gian 2 chiều trên các bài toán có miền hình học phức tạp, nghiệm có kỳ dị hoặc dao động lớn. Đồng thời xây dựng các thử nghiệm số cho phương pháp RBF-FD trong không gian 3 chiều trên các bài toán miền lồi hoặc miền hình học phức tạp trong thực tế, với các cách tạo điểm của miền rời rạc khác nhau.

Các kết quả thử nghiệm số cho thấy, kết quả của phương pháp RBF-FD sử dụng các thuật toán mới được đề xuất có độ chính xác cao hơn kết quả của FEM và kết quả của phương pháp RBF-FD sử dụng các thuật toán đã được đề xuất, đồng thời chi phí tính toán của các thuật toán mới cũng giảm.

Luận án cũng mở ra một số hướng để có thể tiếp tục nghiên cứu:

- Nghiên cứu phương pháp RBF-FD giải phương trình đạo hàm riêng elliptic với điều kiện biên Neumann hoặc điều kiện biên hỗn hợp.
- Phát triển thuật toán sinh tâm cho phương pháp RBF-FD trong không gian 3 chiều.
- Vấn đề tăng tốc độ tính toán của phương pháp cũng cần được nghiên cứu.
- Nghiên cứu phương pháp RBF-FD giải các bài toán có chứa tham số bé.
- Chứng minh tính xấp xỉ, ổn định và hội tụ của nghiệm xấp xỉ.

## CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC ĐÃ CÔNG BỐ

1. Dang Thi Oanh, Ngo Manh Tuong (2022), "An Approach to Adaptive Refinement for the RBF-FD Method for 2D Elliptic Equations", *Applied Numerical Mathematics*, 178, 123–154 (SCI-E, Q1).
2. Oleg Davydov, Dang Thi Oanh, Ngo Manh Tuong (2020), "Octant-based stencil selection for meshless finite difference methods in 3D", *Vietnam Journal of Mathematics*, 48, 93–106 (ESCI, Q2).
3. Oleg Davydov, Dang Thi Oanh, Ngo Manh Tuong (2023), "Improved Stencil Selection for Meshless Finite Difference Methods in 3D", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 425, 115031 (SCI, Q2).

## CÁC KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO TẠI

1. Seminar phòng Giải tích số và tính toán khoa học, Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, các năm 2017, 2018, 2019.
2. Seminar của Bộ môn Toán ứng dụng và Tin học, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, các năm 2017, 2018, 2019, 2020.
3. Hội thảo Tối ưu và Tính toán khoa học lần thứ 15, 16, 17, tháng 4 các năm 2017, 2018, 2019.
4. Hội nghị Khoa học và Công nghệ Quốc gia lần thứ X (Fair), "Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng Công nghệ thông tin", Đà Nẵng, tháng 8 năm 2017.
5. Hội thảo Quốc tế HPSC lần thứ 7, "7th International Conference on High Performance Scientific Computing", Hà Nội, tháng 3 năm 2018.
6. Hội thảo tại Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông - Đại học Thái Nguyên, các năm 2017, 2018, 2019, 2020.
7. Hội thảo Khoa học "Một số vấn đề trong Toán học đương đại", Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, ngày 10/11/2020.