ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG THỊ NGOAN

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU VÀ PHÂN TÍCH ĐỘ NHẠY NGHIỆM CHO MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN TỐI ƯU

Ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 9 46 01 12

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

Thái Nguyên – 2026

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Người hướng dẫn khoa học: 1. TS. Dương Thị Việt An
2. PGS. TS. Nguyễn Văn Tuyên

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3: .

.

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án cấp Trường họp tại: ..... vào hồi ... giờ ... phút ngày ... tháng ... năm 2026.

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- .....
- .....
- .....

Các công trình đã công bố liên quan đến luận án

(CT1) D.T.V. An, D.T. Ngoan, N.V. Tuyen, "Optimality conditions and sensitivity analysis in parametric convex minimax programming", *Applicable Analysis* 103, 2997–3016 (2024)

(CT2) D.T.V. An, N.H. Hung, D.T. Ngoan, N.V. Tuyen, "Optimality conditions and sensitivity analysis in parametric nonconvex minimax programming", *Journal of Global Optimization* 90, 53–72 (2024)

(CT3) D.T. Ngoan, C. Gutiérrez, D.T.V. An, "Two-variable domination structures and applications in vector optimization", *Journal of Optimization Theory and Applications* 208, 36 (2026)

Mở đầu

Điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm là hai chủ đề trung tâm của lý thuyết tối ưu. Khi bài toán tối ưu có tham số, hàm giá trị tối ưu (optimal value function) là một hàm theo tham số. Điểm đáng lưu ý là, hàm giá trị tối ưu có thể không khả vi theo tham số, ngay cả khi các dữ liệu ban đầu của bài toán đều khả vi. Do đó, các nghiên cứu về độ nhạy nghiệm thường được thực hiện thông qua các đạo hàm suy rộng hoặc dưới vi phân. Các khái niệm này được xây dựng theo hai hướng tiếp cận: trên không gian nền (primal approach) và trên không gian đối ngẫu (dual approach). Cả hai hướng tiếp cận này đều hiệu quả, nhưng trong một số trường hợp, hướng tiếp cận trên không gian đối ngẫu tỏ ra vượt trội hơn. Lý thuyết vi phân cho lớp hàm không trơn cùng với các ứng dụng quan trọng của nó trong quy hoạch toán học và điều khiển tối ưu đã được phát triển bởi nhiều nhà toán học, trong đó phải kể đến lý thuyết do Mordukhovich xây dựng vào những năm 80 của thế kỷ XX. Lý thuyết này cho đến nay vẫn đang tiếp tục được phát triển và đưa đến những thành quả mới.

Cần nhấn mạnh rằng, để thu được các quy tắc tính toán của giải tích không trơn, ta cần một số điều kiện chính quy (qualification condition) thích hợp. Việc nới lỏng các điều kiện này sẽ giúp mở rộng phạm vi áp dụng của các kết quả nghiên cứu. Điều kiện chính quy metric (metric qualification condition), được phát biểu thông qua các hàm khoảng cách, lần đầu tiên được nghiên cứu và phát triển trong các công trình của Ioffe, Penot, Jourani và Thibault và gần đây là bởi Huong và cộng sự cho trường hợp không lồi. Theo Ioffe, điều kiện chính quy metric thậm chí còn yếu hơn cả những điều kiện đủ yếu nhất được sử dụng trong giải tích lồi. Mối quan hệ giữa điều kiện chính quy metric và các điều kiện đủ khác đã được nghiên cứu, qua đó cho phép chúng ta khảo sát đầy đủ hơn về điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu có tham số.

Bài toán tối ưu minimax là lớp bài toán tối ưu trong đó xét cả hai quá trình cực tiểu hóa và cực đại hóa. Các bài toán này có nhiều ứng dụng trong toán học, kinh tế học và khoa học máy tính, ví dụ: đa thức xấp xỉ tốt nhất theo nghĩa Chebyshev, tối ưu đa mục tiêu, lý thuyết trò chơi. Theo Demyanov và Malozemov, bài toán tối

ưu minimax có thể được chia thành hai loại: bài toán minimax rời rạc và bài toán minimax liên tục. Xấp xỉ tốt nhất theo nghĩa Chebyshev có thể mô hình hóa dưới dạng một bài toán minimax rời rạc, trong khi trò chơi ma trận dẫn đến một bài toán minimax liên tục. Một phần quan trọng trong các chủ đề về bài toán tối ưu minimax là nghiên cứu các điều kiện tối ưu, cũng như các kết quả đối ngẫu. Các tác giả đã sử dụng dưới vi phân Mordukhovich và một số công cụ tiên tiến khác của giải tích biến phân. Trong đó, tính liên tục Lipschitz là yếu tố cơ bản để suy ra quy tắc dưới vi phân của tổng các hàm, cũng như quy tắc dưới vi phân của hàm maximum. Liên quan đến chủ đề phân tích độ nhạy nghiệm trong các bài toán tối ưu minimax có tham số, theo hiểu biết của chúng tôi, các kết quả của Darkhovskii và Levitin năm 1976 là những kết quả đầu tiên. Cụ thể, các tác giả đã thu được một khai triển vi phân của hàm giá trị tối ưu trong lân cận của một điểm nhất định (Định lý 1 và 2). Cho đến nay, chúng tôi chưa tìm thấy thêm công trình nào khác nghiên cứu về phân tích độ nhạy nghiệm cho các bài toán tối ưu minimax có tham số. Vì vậy, luận án nghiên cứu thiết lập điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu minimax có tham số trường hợp lồi và trường hợp không lồi, dựa trên hai loại điều kiện chính quy: điều kiện chính quy metric và điều kiện liên tục (hoặc liên tục Lipschitz) của các hàm thành phần.

Lớp bài toán thứ hai chúng tôi nghiên cứu là bài toán tối ưu véctơ. Cần nhấn mạnh rằng trong tối ưu véctơ, khái niệm nghiệm tối ưu là một trong những điểm cốt lõi. Khái niệm này thường được xây dựng dựa trên giả thiết rằng không gian ảnh Y của bài toán được sắp thứ tự bộ phận bởi một nón lồi nhọn không tầm thường. Trong trường hợp hữu hạn chiều, nón sắp thứ tự phổ biến nhất là nón orthant gồm các điểm mà tất cả các tọa độ của nó đều không âm. Đây chính là bài toán tối ưu đa mục tiêu mà ta thường gặp trong thực tế. Quan hệ thứ tự bộ phận sinh ra bởi nón orthant không âm dẫn đến khái niệm nghiệm tối ưu theo nghĩa Pareto. Cần lưu ý rằng việc mô hình hóa quan hệ so sánh theo cách này, tức là sử dụng một nón sắp thứ tự cố định, vẫn chưa bao trùm được các tình huống phát sinh trong thực tế. Điều đó đã được ghi nhận trong các nghiên cứu về quá trình ra quyết định, tối ưu đa mục tiêu hay đăng ký ảnh y học.

Để cải thiện điều này, các nhà nghiên cứu đã sử dụng cấu trúc thứ tự thay đổi để thay thế cho cấu trúc thứ tự cố định. Theo đó, mỗi phần tử của không gian ảnh Y có nón sắp thứ tự riêng của nó. Nón này được xác định bởi một ánh xạ đa trị nhận giá trị nón, thường kí hiệu là $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$. Ý tưởng về cấu trúc thứ tự thay đổi được giới thiệu lần đầu tiên bởi Yu vào năm 1974. Sau đó, Eichfelder và cộng sự đã xây dựng một khung lý thuyết tổng quát và tương đối toàn diện về cấu trúc

thứ tự thay đổi, cũng như các ứng dụng của nó trong tối ưu véctơ, bao gồm: các điều kiện tối ưu cho bài toán không trơn sử dụng dưới vi phân và đối đạo hàm, các kết quả về vô hướng hóa tuyến tính và phi tuyến, đối ngẫu và các phương pháp số.

Cho đến nay, tuy tồn tại dưới nhiều tên gọi khác nhau, nhưng nói chung có hai khái niệm cơ bản về điểm tối ưu liên quan đến cấu trúc thứ tự thay đổi: một khái niệm dựa trên điều kiện điểm đang xét là không trội bởi bất kỳ điểm nào khác theo nón thứ tự của chính điểm đang xét, khái niệm còn lại dựa trên điều kiện điểm đang xét là không trội bởi bất kỳ điểm nào khác theo nón thứ tự của các điểm kia (không phải điểm đang xét). Chúng tôi nhận thấy rằng trong các tài liệu hiện có, dựa trên hai khái niệm tối ưu này, tất cả các tính chất liên quan cũng được phát biểu theo hai cách khác nhau nhưng có liên hệ chặt chẽ với nhau. Vì vậy, luận án nghiên cứu đưa ra một cấu trúc thứ tự tổng quát hơn, bao trùm cả hai khái niệm nói trên.

Mục tiêu của luận án là nghiên cứu thiết lập điều kiện cần và đủ tối ưu cấp một và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu minimax rời rạc có tham số; định nghĩa và nghiên cứu các tính chất của cấu trúc thứ tự hai biến trong không gian véctơ, thiết lập điều kiện cần và đủ cho nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến thông qua phương pháp vô hướng hóa.

Nội dung của luận án được chia thành ba chương, cùng với phần mở đầu, kết luận, danh mục các ký hiệu, danh mục các công trình khoa học của tác giả và tài liệu tham khảo.

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Chương 2. Điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu minimax có tham số

Chương 3. Đặc trưng nghiệm cho bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số khái niệm và kết quả liên quan trong giải tích biến phân, giải tích lồi và lý thuyết tối ưu. Trong đó, các nội dung cơ bản là: quan hệ thứ tự trong không gian véctơ, các khái niệm nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu véctơ; nón pháp tuyến của một tập hợp, dưới vi phân của hàm đơn trị, đối đạo hàm của ánh xạ đa trị và điều kiện chính quy metric.

1.1 Bài toán tối ưu véctơ và các khái niệm liên quan

1.1.1 Quan hệ thứ tự trong không gian véctơ

1.1.2 Bài toán tối ưu véctơ

1.2 Bài toán tối ưu minimax

1.2.1 Ví dụ về bài toán tối ưu minimax

1.2.2 Phát biểu bài toán minimax rời rạc có tham số

Giả sử X và Y là hai không gian Banach và m là một số nguyên dương cho trước. Xét bài toán tối ưu minimax rời rạc có tham số

$$\min_{y\in G(x)} \max_{k\in J} \varphi_k(x,y), \tag{P_x}$$

trong đó x là tham số, $G\colon X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị, $J := \{1,\dots,m\}$, các hàm $\varphi_k\colon X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $k\in J$. Trong các phần tiếp theo, ta kí hiệu hàm maximum $\varphi(x,y) := \max_{k\in J}\varphi_k(x,y)$ với mọi $(x,y)\in X\times Y$. Khi đó, hàm giá trị tối ưu $\mu\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ của bài toán (P_x) là

$$\mu(x) = \inf_{y\in G(x)} \varphi(x,y),$$

với quy ước $\mu(x)$ bằng $+\infty$ nếu $x\notin \operatorname{dom} G$. Ta định nghĩa ánh xạ nghiệm $M\colon \operatorname{dom} G \rightrightarrows Y$ của (P_x) là $M(x) := \{y\in G(x) : \mu(x) = \varphi(x,y)\}$.

1.3 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ khác

1.3.1 Nón pháp tuyến

1.3.2 Dưới vi phân

1.3.3 Đối đạo hàm

1.3.4 Điều kiện chính quy metric

Điều kiện chính quy metric (metric qualification condition), được phát biểu thông qua các hàm khoảng cách như sau.

Định nghĩa 1.40. Cho $C_1, ..., C_n$ là các tập con khác rỗng của X. Ta nói rằng các tập $C_i, i = 1, ..., n$, thỏa mãn *điều kiện chính quy metric* (MQC) tại điểm $\bar{x} \in C := \cap_{i=1}^{n} C_i$ nếu tồn tại hai số thực dương $\gamma > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$d(x, C) \leq \gamma[d(x, C_1) + \cdots + d(x, C_n)], \quad \forall x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \delta). \tag{MQC}$$

Chương 2

Điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu minimax có tham số

Chương này trình bày các kết quả chính mà chúng tôi đã nghiên cứu cho bài toán minimax có tham số. Các kết quả này bao gồm: quy tắc dưới vi phân của hàm maximum dưới điều kiện chính quy metric (kết quả tương ứng dưới điều kiện về tính liên tục đã được nêu ở Chương 1); điều kiện cần và đủ tối ưu cấp một; phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán minimax có tham số trường hợp lồi và trường hợp không lồi.

2.1 Quy tắc dưới vi phân của hàm maximum

Xét hàm maximum $f(x) := \max\{f_i(x) : i = 1, \ldots, m\}$ xác định trên không gian Asplund X, trong đó $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}, i = 1, ..., m$. Kí kiệu $I(\bar{x})$ là tập các chỉ số hoạt tại $\bar{x}$, và

$$\Lambda(\bar{x}) := \left\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+ : \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_i[f_i(\bar{x}) - f(\bar{x})] = 0, i = 1, \ldots, m\right\},$$

$$\bar{\Lambda}(\bar{x}) := \left\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_i[f_i(\bar{x}) - f(\bar{x})] = 0, i = 1, \ldots, m\right\}.$$

Trước hết, ta xét trường hợp tất cả các hàm f_i, $i = 1, \ldots, m$, là các hàm lồi. Khi đó f cũng là hàm lồi và ta có kết quả sau đây.

Định lý 2.1. *Với mọi $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^m \operatorname{dom} f_i$, ta luôn có*

$$\partial f(\bar{x}) \supset \bigcup \left\{\sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \circ \partial f_i(\bar{x}),\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x})\right\},$$

ở đó $\lambda_i \circ \partial f_i(\bar{x})$ được định nghĩa bằng $\lambda_i \partial f_i(\bar{x})$ nếu $\lambda_i > 0$ và bằng $\partial^\infty f_i(\bar{x})$ nếu $\lambda_i = 0$. Ngoài ra, nếu epi f_i, *$i \in I(\bar{x})$, thỏa mãn điều kiện chính quy metric* (MQC)

tại $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ *và nếu* f_i, $i \notin I(\bar{x})$, *liên tục tại* $\bar{x}$ *thì ta có*

$$\partial f(\bar{x}) = \bigcup \left\{ \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \circ \partial f_i(\bar{x}),\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}) \right\},$$

và

$$\partial^\infty f(\bar{x}) = \sum_{i \in I(\bar{x})} \partial^\infty f_i(\bar{x}).$$

Định lý tiếp theo trình bày kết quả đánh giá dưới vi phân Mordukhovich của hàm maximum dưới điều kiện chính quy metric.

Định lý 2.6. *Cho* $\bar{x} \in X$. *Giả sử* f_i *là l.s.c. với* $i \in I(\bar{x})$ *và là u.s.c. tại* $\bar{x}$ *với* $i \notin I(\bar{x})$. *Hơn nữa, giả sử tồn tại* $\gamma > 0$ *và* $\delta > 0$ *sao cho*

$$d((x, r), \operatorname{epi} \bar{f}) \leq \gamma \sum_{i \in I(\bar{x})} d((x, r), \operatorname{epi} f_i),\ \forall x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \delta), r \in \mathbb{B}(f(\bar{x}), \delta),$$

trong đó $\bar{f} := \max_{i \in I(\bar{x})} f_i$. *Khi đó, ta có*

$$\partial_L f(\bar{x}) \subset \bigcup \left\{ \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \circ \partial_L f_i(\bar{x}),\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_i) \in \Lambda(\bar{x}) \right\},$$
$$\partial_L^\infty f(\bar{x}) \subset \sum_{i \in I(\bar{x})} \partial_L^\infty f_i(\bar{x}),$$

trong đó $\lambda \circ \partial_L f(\bar{x})$ *được định nghĩa bằng* $\lambda \partial_L f(\bar{x})$ *khi* $\lambda > 0$ *và bằng* $\partial_L^\infty f(\bar{x})$ *khi* $\lambda = 0$.

2.2 Điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán minimax lồi có tham số

Trong mục này, ta xét bài toán minimax rời rạc có tham số (P_x) với giả thiết các hàm $\varphi_k, k \in J$, là các hàm lồi, chính thường. Các kết quả chính bao gồm điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu minimax lồi có tham số. Phần đầu trình bày các định lý về điều kiện cần và đủ tối ưu sử dụng hai loại điều kiện chính quy: điều kiện chính quy metric và điều kiện liên tục. Phần sau dành cho nội dung phân tích độ nhạy với các kết quả tính toán dưới vi phân của hàm giá trị tối ưu.

2.2.1 Điều kiện cần và đủ tối ưu

Điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu lồi được suy ra từ các quy tắc giải tích lồi đã được trình bày trong nhiều sách chuyên khảo và các bài báo khoa học. Trong phần này, chúng tôi xét bài toán minimax lồi, với hàm mục tiêu φ là maximum của hữu hạn hàm lồi.

Định lý 2.7 (Điều kiện cần và đủ tối ưu I)**.** *Xét bài toán $(P_{\bar{x}})$ với $\bar{x} \in X$ và $\bar{y} \in \bigcap_{k\in J} \operatorname{dom} \varphi_k(\bar{x},\cdot)$. Giả sử $\varphi_k(\bar{x},.)$, $k \in J$, là các hàm lồi và $G(\bar{x})$ là một tập lồi. Hơn nữa, giả sử rằng*

(i) $\operatorname{epi} \varphi(\bar{x},\cdot)$ *và* $G(\bar{x}) \times \mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{y}, \varphi(\bar{x},\bar{y}))$,

(ii) $\operatorname{epi} \varphi_k(\bar{x},\cdot)$, $k \in I(\bar{x},\bar{y})$, *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{y}, \varphi(\bar{x},\bar{y}))$ *và* $\varphi_k(\bar{x},\cdot)$, $k \notin I(\bar{x},\bar{y})$, *liên tục tại* $\bar{y}$.

Khi đó, $\bar{y}$ là một nghiệm toàn cục của bài toán $(P_{\bar{x}})$ khi và chỉ khi

$$0 \in \bigcup \left\{ \sum_{k\in I(\bar{x},\bar{y})} \lambda_k \circ \partial_y \varphi_k(\bar{x},\bar{y}), (\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \Lambda(\bar{x},\bar{y}) \right\} + N(\bar{y}; G(\bar{x})),$$

trong đó $I(\bar{x},\bar{y}) := \{k \in J :\ \varphi_k(\bar{x},\bar{y}) = \varphi(\bar{x},\bar{y})\}$,

$$\Lambda(\bar{x},\bar{y}) := \left\{ (\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+ : \sum_{k\in J} \lambda_k = 1, \lambda_k[\varphi_k(\bar{x},\bar{y}) - \varphi(\bar{x},\bar{y})] = 0, k \in J \right\}$$

và $\lambda_k \circ \partial_y \varphi_k(\bar{x},\bar{y})$ *được định nghĩa bằng* $\lambda_k \partial_y \varphi_k(\bar{x},\bar{y})$ *nếu* $\lambda_k > 0$ *và bằng* $\partial^\infty_y \varphi_k(\bar{x},\bar{y})$ *nếu* $\lambda_k = 0$.

Sử dụng điều kiện liên tục ta thu được điều kiện cần và đủ tối ưu cho bài toán (P_x) như sau.

Định lý 2.8 (Điều kiện cần và đủ tối ưu II)**.** *Giả sử $\bar{x} \in X$ và $\bar{y} \in \bigcap_{k\in J} \operatorname{dom} \varphi_k(\bar{x},\cdot)$. Giả thiết $\varphi_k(\bar{x},.)$, $k \in J$, là các hàm lồi và $G(\bar{x})$ là một tập lồi. Hơn nữa giả sử rằng tất cả các $\varphi_k(\bar{x},\cdot)$, $k \in J$, liên tục tại $\bar{y}$. Khi đó, $\bar{y}$ là một nghiệm toàn cục của bài toán (P_x) khi và chỉ khi*

$$0 \in \bigcup \left\{ \sum_{k\in I(\bar{x},\bar{y})} \lambda_k \partial_y \varphi_k(\bar{x},\bar{y}), (\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \Lambda(\bar{x},\bar{y}) \right\} + N(\bar{y}; G(\bar{x})).$$

2.2.2 Phân tích độ nhạy nghiệm

Trong phần này chúng ta sẽ thiết lập công thức đánh giá/tính toán dưới vi phân và dưới vi phân suy biến của hàm giá trị tối ưu μ xác định bởi (1.2.2) thông qua

nón pháp tuyến của $\operatorname{gph} G$ và dưới vi phân của các $\varphi_k, k \in J$.

Định lý 2.11. *Xét bài toán (P_x). Giả sử ánh xạ G có đồ thị lồi, các hàm φ_k, $k \in J$, lồi trên $X \times Y$, và hàm giá trị tối ưu μ hữu hạn tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$. Ngoài ra, giả sử $\bar{y} \in M(\bar{x})$ và*

(i) $\operatorname{epi}\varphi$ *và* $\operatorname{gph} G \times \mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$*;*

(ii) $\operatorname{epi}\varphi_k, k \in I(\bar{x}, \bar{y})$, *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$ *và các hàm* $\varphi_k, k \notin I(\bar{x}, \bar{y})$, *liên tục tại* $(\bar{x}, \bar{y})$.

Khi đó, $x^* \in \partial\mu(\bar{x})$ nếu và chỉ nếu

$$(x^*, 0) \in \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \circ \partial\varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\} + N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G),$$

trong đó $\lambda_k \circ \partial\varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ được định nghĩa bằng $\lambda_k \partial\varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ nếu $\lambda_k > 0$ và bằng $\partial^\infty \varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ nếu $\lambda_k = 0$.

Dưới vi phân suy biến của μ được tính theo công thức sau.

Định lý 2.12. *Giả sử ánh xạ G có đồ thị lồi, các hàm φ_k, $k \in J$, lồi trên $X \times Y$, và hàm giá trị tối ưu μ hữu hạn tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$. Ngoài ra, giả sử $\bar{y} \in M(\bar{x})$ và*

(i) $\operatorname{dom}\varphi \times \mathbb{R}_+$ *và* $\operatorname{gph} G \times \mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$*;*

(ii) $\operatorname{epi}\varphi_k, k \in I(\bar{x}, \bar{y})$, *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$ *và các hàm* $\varphi_k, k \notin I(\bar{x}, \bar{y})$, *liên tục tại* $(\bar{x}, \bar{y})$.

Khi đó, ta có

$$\partial^\infty \mu(\bar{x}) = \left\{ x^* \in X^* : (x^*, 0) \in \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \partial^\infty \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}) + N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G) \right\}.$$

Dưới giả thiết về tính liên tục của các hàm φ_k, ta có kết quả sau.

Định lý 2.13. *Giả sử ánh xạ G có đồ thị lồi, các hàm φ_k, $k \in J$, là lồi trên $X \times Y$, và hàm giá trị tối ưu μ hữu hạn tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$. Hơn nữa giả sử φ_k liên tục tại $(\bar{x}, \bar{y})$. Khi đó, $x^* \in \partial\mu(\bar{x})$ khi và chỉ khi*

$$(x^*, 0) \in \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \partial\varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\} + N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G),$$

và

$$\partial^\infty \mu(\bar{x}) = \left\{ x^* \in X^* : (x^*, 0) \in \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \partial^\infty \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}) + N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G) \right\}.$$

2.3 Điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán minimax không lồi có tham số

Xét bài toán minimax rời rạc có tham số (P_x) với giả thiết X, Y là các không gian Asplund và các hàm $\varphi_k, k \in J$, là các hàm chính thường.

2.3.1 Điều kiện cần và đủ tối ưu

Đầu tiên, chúng tôi trình bày điều kiện cần tối ưu sử dụng điều kiện chính quy metric cho nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_x).

Định lý 2.15 (Điều kiện cần tối ưu I)**.** *Giả sử $\bar{x} \in X$, $\varphi_k(\bar{x}, .)$, $k \in J$, là l.s.c. và $G(\bar{x})$ là một tập đóng. Hơn nữa, giả sử $\bar{y} \in Y$ là một nghiệm tối ưu địa phương của bài toán $(P_{\bar{x}})$ và*

(i) $\operatorname{epi} \bar{\varphi}(\bar{x}, \cdot)$ *và* $G(\bar{x}) \times \mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$*, trong đó* $\bar{\varphi}(x, y) := \max\limits_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \varphi_k(x, y)$*;*

(ii) $\varphi_k(\bar{x}, \cdot), k \notin I(\bar{x}, \bar{y})$*, là u.s.c. tại* $\bar{y}$ *và các tập* $\operatorname{epi} \varphi_k(\bar{x}, \cdot)$, $k \in I(\bar{x}, \bar{y})$*, thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$.

Khi đó, ta có

$$0 \in \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \circ \partial_{L,y} \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\} + N_L(\bar{y}; G(\bar{x})), \quad (2.28)$$

trong đó $\lambda_k \circ \partial_{L,y} \varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ *được định nghĩa bằng* $\lambda_k \partial_{L,y} \varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ *nếu* $\lambda_k > 0$ *và bằng* $\partial^{\infty}_{L,y} \varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ *nếu* $\lambda_k = 0$.

Định lý sau đây trình bày điều kiện cần cho nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_x) sử dụng điều kiện về tính liên tục Lipschitz.

Định lý 2.16 (Điều kiện cần tối ưu II)**.** *Giả sử $\bar{x} \in X$, $G(\bar{x})$ là tập đóng và $\varphi_k(\bar{x}, \cdot)$, $k \in J$, là các hàm liên tục Lipschitz quanh $\bar{y} \in Y$. Nếu $\bar{y}$ là nghiệm tối ưu địa phương của (P_x) thì*

$$0 \in \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \partial_{L,y} \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\} + N_L(\bar{y}; G(\bar{x})).$$

Định lý tiếp theo thiết lập điều kiện đủ cho nghiệm tối ưu của bài toán (P_x) sử dụng tính chất lồi.

Định lý 2.18 (Điều kiện đủ tối ưu)**.** *Giả sử $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in G(\bar{x})$ và bài toán thỏa mãn điều kiện* (2.28)*. Nếu $\varphi_k(\bar{x}, \cdot)$, $k \in J$, là các hàm lồi và $G(\bar{x})$ là một tập lồi, thì $\bar{y}$ là một nghiệm toàn cục của $(P_{\bar{x}})$, tức là $\bar{y} \in M(\bar{x})$.*

2.3.2 Phân tích độ nhạy nghiệm

Trong phần này, chúng tôi trình bày ước lượng trên cho dưới vi phân Mordukhovich của hàm giá trị tối ưu μ của bài toán (P_x). Các ước lượng này được thiết lập thông qua dưới vi phân Mordukhovich của $\varphi_k, k \in J$, và nón pháp tuyến Mordukhovich của gph G.

Trước hết nhắc lại rằng ánh xạ nghiệm $M : X \rightrightarrows Y$ của bài toán tối ưu có tham số (P_x) được gọi là μ-nửa liên tục nội bộ hay μ-nửa liên tục dưới (μ-inner semicontinuous) tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} M$ nếu với mỗi dãy $x_k \xrightarrow{\mu} \bar{x}$, tồn tại dãy $y_k \in M(x_k)$ hội tụ tới $\bar{y}$ khi $k \to +\infty$.

Định lý 2.23. *Xét bài toán (P_x). Giả sử G có đồ thị đóng, φ_k, $k \in J$, là l.s.c., hàm giá trị tối ưu μ nhận giá trị hữu hạn tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$ và $\bar{y} \in M(\bar{x})$. Hơn nữa, giả sử*

(i) *Ánh xạ nghiệm M là μ-nửa liên tục nội bộ tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} M$;*

(ii) $\operatorname{epi} \bar{\varphi})$ *và* $\operatorname{gph} G \times \mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$, *trong đó* $\bar{\varphi} := \max_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \varphi_k$;

(iii) $\varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ *là l.s.c. quanh* $(\bar{x}, \bar{y})$ *với* $k \in I(\bar{x}, \bar{y})$ *và u.s.c. tại* $(\bar{x}, \bar{y})$ *với* $k \notin I(\bar{x}, \bar{y})$, $\operatorname{epi} \varphi_k$ *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$.

Khi đó nếu $x^* \in \partial_L \mu(\bar{x})$ thì

$$(x^*, 0) \in \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \circ \partial_L \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\} + N_L((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G),$$

trong đó $\lambda_k \circ \partial_L \varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ được định nghĩa bằng $\lambda_k \partial_L \varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ nếu $\lambda_k > 0$ và bằng $\partial_L^\infty \varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ nếu $\lambda_k = 0$.

Dưới giả thiết về tính liên tục Lipschitz của các hàm φ_k, ta có kết quả sau.

Định lý 2.24. *Xét bài toán (P_x). Giả sử hàm giá trị tối ưu μ cho bởi* (1.2.2) *nhận giá trị hữu hạn tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$ và $\bar{y} \in M(\bar{x})$. Hơn nữa, giả sử rằng G có đồ thị đóng, φ_k liên tục Lipschitz quanh $(\bar{x}, \bar{y})$ với $k \in J$ và ánh xạ nghiệm M là μ-nửa liên tục nội bộ tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} M$. Khi đó, nếu $x^* \in \partial_L \mu(\bar{x})$ thì*

$$(x^*, 0) \in \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \partial_L \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\} + N_L((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G).$$

Chương 3

Đặc trưng nghiệm cho bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến

Phần đầu chương này trình bày định nghĩa cấu trúc thứ tự hai biến. Đây là khái niệm mở rộng của khái niệm cấu trúc thứ tự thay đổi thông thường. Phần tiếp theo nghiên cứu các tính chất liên quan, định nghĩa các khái niệm nghiệm tối ưu dựa trên cấu trúc thứ tự hai biến, so sánh với các định nghĩa và các tính chất đã có dựa trên cấu trúc thứ tự thay đổi thông thường. Phần cuối chương trình bày các tiếp cận sử dụng hàm vô hướng hóa phi tuyến để thu được điều kiện tối ưu cho nghiệm địa phương của bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến.

3.1 Cấu trúc thứ tự hai biến

3.1.1 Định nghĩa và các tính chất

Trong phần này, chúng tôi định nghĩa cấu trúc thứ tự hai biến trên không gian véctơ tôpô thực Y và nghiên cứu tính chất liên quan. Cụ thể, xét ánh xạ đa trị $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$ thỏa mãn $\operatorname{dom} C = Y \times Y$, tức là, $C(y_1, y_2)$ khác rỗng với mọi $(y_1, y_2) \in Y \times Y$.

Định nghĩa 3.1. Giả sử $y_1, y_2 \in Y$. Ta định nghĩa

$$y_1 \leq^C y_2 :\Leftrightarrow y_2 \in y_1 + C(y_1, y_2).$$

Ánh xạ đa trị C được gọi là ánh xạ thứ tự hai biến và $\leq^C$ được gọi là cấu trúc thứ tự hai biến trên Y.

Tiếp theo, để nghiên cứu các tính chất của ánh xạ thứ tự hai biến C, ta định nghĩa hai ánh xạ đa trị $D_C, I_C : Y \rightrightarrows Y$ như sau:

$$D_C(y) := \{d \in Y : y \leq^C y + d\},$$
$$I_C(y) := \{d \in Y : y - d \leq^C y\}.$$

Bổ đề tiếp theo trình bày một số tính chất liên quan đến ánh xạ D_C, I_C.

Bổ đề 3.3. *Các tính chất sau đây là đúng:*

(i) *Với mọi* $y, z \in Y$,

$$y \leq^C z \Leftrightarrow z \in y + D_C(y) \Leftrightarrow y \in z - I_C(z).$$

(ii) $D_C(y)$ *và* $I_C(y)$ *có thể biểu diễn dưới dạng*

$$D_C(y) = \bigcup_{d \in Y} [\{d\} \cap C(y, y+d)]$$

và

$$I_C(y) = \bigcup_{d \in Y} [\{d\} \cap C(y-d, y)].$$

Ngoài ra, $d \in D_C(y) \Leftrightarrow d \in I_C(y+d),\ d \in I_C(y) \Leftrightarrow d \in D_C(y-d)$.

(iii) *Xét ánh xạ đa trị* $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$. *Khi đó* $D_{C_1^{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}$ *(tương ứng,* $I_{C_2^{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}$*).*

Tiếp theo ta phát biểu một số tính chất của cấu trúc thứ tự hai biến.

Định lý 3.5. *Giả sử* $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$ *là một ánh xạ thứ tự hai biến.*

(i) *Quan hệ hai ngôi* $\leq^C$ *là phản xạ khi và chỉ khi* $0 \in C(y, y)$, *với mọi* $y \in Y$.

(ii) *Quan hệ hai ngôi* $\leq^C$ *là bắc cầu khi và chỉ khi*

$$\bigcup_{z \in y + D_C(y)} (z + D_C(z)) \subset y + D_C(y), \quad \forall y \in Y$$

hoặc

$$\bigcup_{z \in w - I_C(w)} (z - I_C(z)) \subset w - I_C(w), \quad \forall w \in Y.$$

(iii) *Quan hệ hai ngôi* $\leq^C$ *là phản xứng khi và chỉ khi*

$$\bigcup_{y \in Y} \bigcup_{d \in D_C(y)} [\{d\} \cap (-D_C(y+d))] \subset \{0\},$$

hoặc

$$\bigcup_{y \in Y} \bigcup_{d \in I_C(y)} [\{d\} \cap (-I_C(y-d))] \subset \{0\}.$$

(iv) *Quan hệ hai ngôi* $\leq^C$ *là tương hợp với phép cộng khi và chỉ khi* D_C *(hoặc* I_C*) là ánh xạ hằng.*

(v) *Quan hệ hai ngôi* $\leq^C$ *là tương hợp với phép nhân với vô hướng khi và chỉ khi*

$$\alpha D_C(y) \subset D_C(\alpha y), \quad \forall y \in Y, \forall \alpha > 0$$

hoặc

$$\alpha I_C(y) \subset I_C(\alpha y), \quad \forall y \in Y, \forall \alpha > 0.$$

Định lý 3.5 bao hàm các tính chất sau đây liên quan đến $\leq_1^{\mathcal{D}}$ và $\leq_2^{\mathcal{D}}$.

Hệ quả 3.8. *Xét ánh xạ đa trị* $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$. *Ta có:*

(i) *Với mỗi* $i \in \{1, 2\}$, $\leq_i^{\mathcal{D}}$ *là phản xạ khi và chỉ khi* $0 \in \mathcal{D}(y)$, *với mọi* $y \in Y$.

(ii) *Quan hệ* $\leq_1^{\mathcal{D}}$ *(tương ứng,* $\leq_2^{\mathcal{D}}$*) là bắc cầu khi và chỉ khi*

$$d + \mathcal{D}(y + d) \subset \mathcal{D}(y)$$
$$(\textit{tương ứng, } d + \mathcal{D}(y - d) \subset \mathcal{D}(y)), \quad \forall y \in Y, \forall d \in \mathcal{D}(y).$$

(iii) *Quan hệ* $\leq_1^{\mathcal{D}}$ *(tương ứng* $\leq_2^{\mathcal{D}}$*) là phản xứng khi và chỉ khi*

$$d \notin -\mathcal{D}(y + d)$$
$$(\textit{tương ứng, } d \notin -\mathcal{D}(y - d)), \quad \forall y \in Y, \forall d \in \mathcal{D}(y) \backslash \{0\}.$$

(iv) *Với mỗi* $i \in \{1, 2\}$, $\leq_i^{\mathcal{D}}$ *tương hợp với phép cộng khi và chỉ khi* $\mathcal{D}$ *là ánh xạ hằng.*

(v) *Với mỗi* $i \in \{1, 2\}$, $\leq_i^{\mathcal{D}}$ *tương hợp với phép nhân với vô hướng khi và chỉ khi*

$$\alpha \mathcal{D}(y) \subset \mathcal{D}(\alpha y), \quad \forall y \in Y, \forall \alpha > 0.$$

3.1.2 Các khái niệm điểm hữu hiệu, nghiệm tối ưu

Mục này được chia thành hai phần: Khái niệm điểm cực tiểu, điểm không trội (gọi chung là điểm hữu hiệu) của một tập hợp được trình bày ở phần thứ nhất và khái niệm nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến được trình bày ở phần thứ hai. Các tính chất liên quan cũng được khảo sát chi tiết.

a) Khái niệm về điểm hữu hiệu của một tập hợp

Giả sử Ω là tập con khác rỗng của Y và $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ thứ tự hai biến. Ta định nghĩa hai khái niệm liên quan đến điểm hữu hiệu của tập hợp Ω theo quan hệ $\leq^C$ như sau.

Định nghĩa 3.10. Điểm $\bar{y} \in \Omega$ được gọi là một

(a) điểm $\leq^C$-cực tiểu của Ω, kí hiệu $\bar{y} \in \text{Min}(\Omega, C)$, nếu

$$y \in \Omega, \, y \leq^C \bar{y} \quad \Rightarrow \quad \bar{y} \leq^C y;$$

(b) điểm $\leq^C$-không trội của Ω, kí hiệu $\bar{y} \in \mathrm{ND}(\Omega, C)$, nếu không tồn tại $y \in \Omega \setminus \{\bar{y}\}$ thỏa mãn $y \leq^C \bar{y}$;

(c) điểm $\leq^C$-không trội mạnh Ω, kí hiệu $\bar{y} \in \mathrm{SND}(\Omega, C)$, nếu $\bar{y} \leq^C y$, với mọi $y \in \Omega \setminus \{\bar{y}\}$;

(d) Giả sử $\mathrm{dom}(\mathrm{cor}\, C) = Y \times Y$. Khi đó, $\bar{y}$ được gọi là điểm $\leq^C$-không trội yếu của Ω, kí hiệu $\bar{y} \in \mathrm{WND}(\Omega, C)$, nếu $\bar{y} \in \mathrm{ND}(\Omega, \mathrm{cor}\, C)$.

Trong các phần tiếp theo, ta kí hiệu

$$I_C^\Omega(y) := \{d \in I_C(y) : y - d \in \Omega\}, \quad \forall y \in \Omega.$$

Nhận xét 3.12. Rõ ràng, $\mathrm{ND}(\Omega, C_2) \subset \mathrm{ND}(\Omega, C_1)$ nếu các ánh xạ thứ tự hai biến C_1 và C_2 thỏa mãn $\mathrm{gph}\, C_1 \subset \mathrm{gph}\, C_2$.

Định lý sau đây thể hiện mối quan hệ giữa các khái niệm điểm hữu hiệu của một tập hợp.

Định lý 3.13. *Giả sử $\bar{y} \in \Omega$.*

(i) *Nếu $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-không trội của Ω, thì $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-không trội yếu của Ω.*

(ii) *Giả sử $C(y, \bar{y}) \cap (-C(\bar{y}, y)) \subset \{0\}$, với mọi $y \in \Omega \setminus \{\bar{y}\}$. Khi đó, nếu $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-không trội mạnh của Ω, thì $\bar{y}$ cũng là một điểm $\leq^C$-không trội của Ω. Hơn nữa, có nhiều nhất một điểm $\leq^C$-không trội mạnh của Ω.*

(iii) *Nếu $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-không trội của Ω, thì nó cũng là điểm $\leq^C$-cực tiểu của Ω. Ngược lại, nếu $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-cực tiểu của Ω và*

$$\bigcup_{d \in I_C^\Omega(\bar{y}) \setminus \{0\}} [\{d\} \cap (-I_C^\Omega(\bar{y} - d))] = \emptyset,$$

thì nó cũng là điểm $\leq^C$-không trội của Ω.

Kết quả sau đây cho phép chúng ta rút gọn việc tìm kiếm các điểm $\leq^C$-không trội của một tập hợp về tìm kiếm trên biên của tập hợp đó.

Định lý 3.15. *Giả sử $\bar{y} \in Y$.*

(i) *Nếu $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-không trội của Ω và tồn tại một lưới $(y_i) \subset Y \setminus \{\bar{y}\}$ thỏa mãn $y_i \to \bar{y}$ và*

$$\bar{y} - y_i \in C(y_i, \bar{y}), \quad \forall i$$

thì $\bar{y} \in \partial M$.

(ii) *Nếu* $\bar{y}$ *là một điểm* $\leq^C$*-không trội yếu của* Ω *và tồn tại một lưới* $(y_i) \subset Y\backslash\{\bar{y}\}$ *thỏa mãn* $y_i \to \bar{y}$ *và*

$$\bar{y} - y_i \in \operatorname{cor} C(y_i, \bar{y}), \quad \forall i$$

thì $\bar{y} \in \partial\Omega$.

b) Khái niệm nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu véctơ

Xét bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc

$$\min_C\{f(x) : x \in S\}, \tag{P}$$

trong đó $f : X \to Y$, S là một tập con khác rỗng của X và $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$ xác định một cấu trúc thứ tự hai biến $\leq^C$ trên Y như trong Định nghĩa 3.1. Ta kí hiệu $\mathcal{N}(\bar{x})$ là tập tất cả các lân cận của $\bar{x} \in X$. Sau đây ta định nghĩa các khái niệm nghiệm tối ưu của bài toán (P).

Định nghĩa 3.17. Điểm $\bar{x}$ thuộc S được gọi là một

(a) nghiệm C-cực tiểu địa phương của bài toán (P), kí hiệu là $\bar{x} \in \mathrm{LMin}(f, S, C)$, nếu tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ sao cho

$$x \in U \cap S, \quad f(x) \leq^C f(\bar{x}) \Rightarrow f(\bar{x}) \leq^C f(x). \tag{3.23}$$

(b) nghiệm C-không trội địa phương (P), kí hiệu là $\bar{x} \in \mathrm{LND}(f, S, C)$, nếu tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ sao cho

$$x \in U \cap S, \quad f(x) \leq^C f(\bar{x}) \Rightarrow f(x) = f(\bar{x}). \tag{3.24}$$

(c) nghiệm C-không trội mạnh địa phương của bài toán (P), kí hiệu là $\bar{x} \in \mathrm{LSND}(f, S, C)$, nếu tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ sao cho

$$f(\bar{x}) \leq^C f(x), \quad \forall x \in U \cap (S\backslash\{\bar{x}\}). \tag{3.25}$$

(d) nghiệm C-không trội yếu địa phương của bài toán (P), kí hiệu là $\bar{x} \in \mathrm{LWND}(f, S, C)$, nếu $\bar{x} \in \mathrm{LND}(f, S, \mathrm{cor}C)$.

Nếu điều kiện (3.23) (tương ứng, (3.24), (3.25)) đúng với mọi $x \in S \setminus \{\bar{x}\}$, thì $\bar{x}$ được gọi là nghiệm C-cực tiểu toàn cục (tương ứng, nghiệm C-không trội toàn cục, nghiệm C-không trội mạnh toàn cục) của bài toán (P), kí hiệu là $\bar{x} \in \mathrm{GMin}(f, S, C)$ (tương ứng, $\bar{x} \in \mathrm{GND}(f, S, C)$, $\bar{x} \in \mathrm{GSND}(f, S, C)$). Tương tự, $\bar{x}$ được gọi là nghiệm C-không trội yếu toàn cục của bài toán (P), kí hiệu là $\bar{x} \in \mathrm{GWND}(f, S, C)$, nếu $\bar{x} \in \mathrm{GND}(f, S, \mathrm{cor}C)$.

Khái niệm nghiệm C-cực tiểu địa phương và nghiệm C-không trội địa phương bao hàm các khái niệm nghiệm tối ưu đã biết liên quan đến cấu trúc thứ tự thay đổi xác định bởi ánh xạ đa trị một biến $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$ thông qua hai cấu trúc thứ tự hai biến được xây dựng dựa trên $\mathcal{D}$ là $C_1^{\mathcal{D}}$ và $C_2^{\mathcal{D}}$. Cụ thể, bằng cách thay thế $\leq^C$ bởi $C_1^{\mathcal{D}}$ và $C_2^{\mathcal{D}}$ ta thu được các khái niệm sau.

Định nghĩa 3.19. Xét cấu trúc thứ tự một biến $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$. Với $i = 1, 2$, điểm $\bar{x}$ thuộc S được gọi là

(a) một nghiệm $\leq_i^{\mathcal{D}}$-cực tiểu địa phương của bài toán (P) và kí hiệu là $\bar{x} \in \mathrm{LMin}(f, S, \leq_i^{\mathcal{D}})$, nếu tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ sao cho bao hàm thức sau đây được thỏa mãn:

$$x \in U \cap S, \quad f(x) \leq_i^{\mathcal{D}} f(\bar{x}) \Rightarrow f(\bar{x}) \leq_i^{\mathcal{D}} f(x).$$

(b) một nghiệm $\leq_i^{\mathcal{D}}$-không trội địa phương của bài toán (P) nếu tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ sao cho

$$x \in U \cap S, \quad f(x) \leq_i^{\mathcal{D}} f(\bar{x}) \Rightarrow f(x) = f(\bar{x}).$$

Khi đó ta kí hiệu $\bar{x} \in \mathrm{LND}(f, S, \leq_i^{\mathcal{D}})$.

Các khái niệm nghiệm toàn cục tương ứng với các khái niệm nghiệm địa phương nêu trên được kí hiệu lần lượt là $\mathrm{GMin}(f, S, \leq_i^{\mathcal{D}})$ và $\mathrm{GND}(f, S, \leq_i^{\mathcal{D}})$.

Định lý sau đây thiết lập liên hệ giữa các khái niệm nghiệm của bài toán (P).

Định lý 3.21. (i) *Mỗi nghiệm C-không trội địa phương của bài toán* (P) *cũng là một nghiệm C-không trội yếu địa phương của bài toán* (P).

(ii) *Giả sử tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ sao cho*

$$C(y, f(\bar{x})) \cap (-C(f(\bar{x}), y)) \subset \{0\}, \quad \forall y \in f(U \cap S) \backslash \{f(\bar{x})\}.$$

Khi đó, nếu $\bar{x}$ là một nghiệm C-không trội mạnh địa phương của bài toán (P), *thì nó cũng là một nghiệm C-không trội địa phương của bài toán* (P).

(iii) *Mỗi nghiệm C-không trội địa phương của bài toán* (P) *cũng là một nghiệm C-cực tiểu địa phương. Ngược lại, nếu $\bar{x} \in S$ là một nghiệm $\leq^C$-cực tiểu địa phương và tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ sao cho*

$$\bigcup_{d \in I_C^{f(S \cap U)}(f(\bar{x})) \backslash \{0\}} [\{d\} \cap (-I_C^{f(S \cap U)}(f(\bar{x}) - d))] = \emptyset,$$

thì nó cũng là một nghiệm C-không trội địa phương.

Tiếp theo, ta khảo sát mối liên hệ giữa các khái niệm nghiệm C-tối ưu của bài toán (P) với các khái niệm tương ứng liên quan đến cấu trúc thứ tự một biến.

Xét $\bar{x} \in S$. Với mỗi $V \in \mathcal{N}(\bar{x})$, định nghĩa các ánh xạ đa trị $\mathcal{D}^i_{1,V}, \mathcal{D}^u_{1,V}, \mathcal{D}^u_{2,V} : Y \rightrightarrows Y$ và $\widehat{C}_V : Y \times Y \rightrightarrows Y$ như sau

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^i_{1,V}(y) &:= \bigcap_{x \in V \cap S} C(f(x), y),\\
\mathcal{D}^u_{1,V}(y) &:= \bigcup_{x \in V \cap S} C(f(x), y),\\
\mathcal{D}^u_{2,V}(y) &:= \bigcup_{x \in V \cap S} C(y, f(x)),\\
\widehat{C}_V(y_1, y_2) &:= \big(C(y_1, y_2) \setminus (-\mathcal{D}^u_{2,V}(y_2))\big) \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

Định lý 3.23. (i) *Nếu* $\bar{x} \in \bigcup_{V \in \mathcal{N}(\bar{x})} \mathrm{LND}(f, S, \leq_2^{\mathcal{D}^u_{1,V}})$ *thì* $\bar{x} \in \mathrm{LND}(f, S, C)$.

(ii) *Giả sử* $\operatorname{dom} \mathcal{D}^i_{1,V} = Y$, *với mọi* $V \in \mathcal{N}(\bar{x})$. *Khi đó, nếu* $\bar{x} \in \mathrm{LND}(f, S, C)$ *thì* $\bar{x} \in \bigcup_{V \in \mathcal{N}(\bar{x})} \mathrm{LND}(f, S, \leq_2^{\mathcal{D}^i_{1,V}})$.

(iii) Nếu $\bar{x} \in \mathrm{LMin}(f, S, C)$ *thì ta có* $\bar{x} \in \bigcup_{V \in \mathcal{N}(\bar{x})} \mathrm{LND}(f, S, \widehat{C}_V)$.

3.2 Đặc trưng nghiệm sử dụng hàm vô hướng hóa phi tuyến

Trong mục này, điều kiện cần và đủ cho nghiệm không trội địa phương sẽ thu được thông qua phương pháp vô hướng hóa. Đây là một công cụ toán học quan trọng khi nghiên cứu các bài toán tối ưu véctơ. Kỹ thuật vô hướng hóa thường dựa vào các hàm vô hướng hóa, trong đó đặc biệt quan trọng phải kể đến hàm vô hướng hóa phi tuyến có dạng sau

$$\varphi_{K,q}(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} : y \in tq - K\}.$$

Hàm này được áp dụng rộng rãi để thu được các kết quả cho bài toán tối ưu véctơ không lồi, trong đó không gian ảnh Y với quan hệ thứ tự bộ phận $\leq_K$ được định nghĩa bởi nón hằng lồi nhọn K. Ở đây, chúng ta sẽ dùng phương pháp vô hướng hóa để đặc trưng điểm $\leq^C$-không trội/không trội yếu của tập hợp Ω và nghiệm C-không trội/không trội yếu địa phương của bài toán (P) thông qua một dạng mở rộng của hàm $\varphi_{K,q}$. Hàm vô hướng hóa này cho phép hướng q thay đổi bằng cách

sử dụng ánh xạ $q : Y \times Y \to Y$ thay cho véctơ q cố định. Các kết quả thu được có hai điểm mới. Một là thiết lập được các kết quả vô hướng hóa tổng quát có thể áp dụng cho ánh xạ thứ tự hai biến C. Hai là, trong trường hợp đặc biệt khi xét cấu trúc thứ tự một biến, kết quả thu được đã giảm nhẹ được giả thiết của bài toán. Hàm vô hướng hóa Gerstewitz suy rộng được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 3.25. Xét ánh xạ đa trị $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$ thỏa mãn $\operatorname{dom} C = Y \times Y$, hàm $q : Y \times Y \to Y\backslash\{0\}$ và điểm $\bar{y} \in Y$. Hàm vô hướng hóa phi tuyến $\varphi^C_{\bar{y},q} : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ được định nghĩa như sau

$$\varphi^C_{\bar{y},q}(y) := \inf \Lambda^C_q(y, \bar{y}),$$

trong đó $\Lambda^C_q : Y \times Y \rightrightarrows \mathbb{R}$,

$$\Lambda^C_q(y_1, y_2) := \{t \in \mathbb{R} : y_2 + tq(y_1, y_2) - y_1 \in C(y_1, y_2)\}$$

với quy ước $\inf \emptyset = +\infty$.

Cho trước tập không rỗng $E \subset Y$ và véctơ khác không $q \in Y$, bao đóng của E theo hướng q (sau đây gọi là q-bao đóng véctơ của E) là tập hợp

$$\operatorname{vcl}_q E := \{y \in Y : \forall \lambda > 0\, \exists\, \lambda' \in [0, \lambda] \text{ sao cho } y + \lambda' q \in E\}.$$

Ta nói rằng tập hợp E là đóng theo hướng q nếu $\operatorname{vcl}_q E = E$. Biên theo hướng q của E là tập hợp $\operatorname{bd}_q E := \operatorname{vcl}_q E \backslash \operatorname{int}_{-q} E$. Nhắc lại rằng nón lùi xa (recession cone) của tập hợp E là nón lồi $0^+E := \{y \in Y : E + \mathbb{R}_+ y = E\}$.

Bổ đề sau đây tổng hợp một số tính chất của bao đóng véctơ của một tập hợp.

Bổ đề 3.26. *Ta có*

(i) $y \in \operatorname{vcl}_q E$ *khi và chỉ khi tồn tại dãy* $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ *sao cho* $t_n \to 0$ *và* $y + t_n q \in E$, *với mọi* n.

(ii) $E \subset \operatorname{vcl}_q E \subset \operatorname{vcl}_q E + \mathbb{R}_+ q = \operatorname{vcl}_q(E + \mathbb{R}_+ q)$.

(iii) $\operatorname{vcl}_q(\operatorname{vcl}_q E) = \operatorname{vcl}_q E$ *và* $\operatorname{vcl}_q(\operatorname{vcl}_q E + \mathbb{R}_+ q) = \operatorname{vcl}_q(E + \mathbb{R}_+ q)$.

(iv) $Y\backslash\operatorname{vcl}_q E = \operatorname{int}_q(Y\backslash E)$.

(v) *Nếu* $q \in 0^+E$, *thì*

$$E + (0, +\infty)q = \operatorname{int}_{-q} E,$$
$$\operatorname{vcl}_q E + [0, +\infty)q = \operatorname{vcl}_q E.$$

(vi) *Nếu* $q \in -\operatorname{cor}(0^+E)\backslash\{0\}$, *thì* $\operatorname{cor} E = \operatorname{int}_q E$.

Bây giờ ta xem xét một số tính chất của hàm vô hướng hóa $\varphi^C_{\bar{y},q}$. Cho trước $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$ và $q : Y \times Y \to Y\backslash\{0\}$, $\mathrm{vcl}_q C$, $\mathrm{bd}_q C$ và $\mathrm{vcl}_q C + \mathbb{R}_+ q$ kí hiệu các ánh xạ đa trị từ $Y \times Y$ vào Y lần lượt cho bởi $(\mathrm{vcl}_q C)(y_1, y_2) = \mathrm{vcl}_{q(y_1,y_2)} C(y_1, y_2)$, $(\mathrm{bd}_q C)(y_1, y_2) = \mathrm{bd}_{q(y_1,y_2)} C(y_1, y_2)$ và

$$(\mathrm{vcl}_q C + \mathbb{R}_+ q)(y_1, y_2) = (\mathrm{vcl}_q C)(y_1, y_2) + \mathbb{R}_+ q(y_1, y_2).$$

Bổ đề 3.27. *Các khẳng định sau đây là đúng:*

(i) $\varphi^C_{\bar{y},q} = \varphi^{C'}_{\bar{y},q}$ *với mọi ánh xạ đa trị* $C' : Y \times Y \rightrightarrows Y$ *thỏa mãn*

$$\mathrm{gph}\, C \subset \mathrm{gph}\, \mathrm{vcl}_q C' \subset \mathrm{gph}(\mathrm{vcl}_q C + \mathbb{R}_+ q).$$

Nói riêng, $\varphi^C_{\bar{y},q} = \varphi^{\mathrm{vcl}_q C}_{\bar{y},q} = \varphi^{\widetilde{C}}_{\bar{y},q}$, *trong đó* $\widetilde{C} := \mathrm{vcl}_q C + \mathbb{R}_+ q$.

(ii) *Với mọi* $y \in Y$ *và* $s \in \mathbb{R}$ *ta có*

$$\varphi^C_{\bar{y},q}(y) < s \Leftrightarrow y - \bar{y} \in (-\infty, s) q(y, \bar{y}) - C(y, \bar{y}).$$

(iii) *Với mọi* $y \in Y$ *và* $s \in \mathbb{R}$ *ta có*

$$\varphi^C_{\bar{y},q}(y) \leq s \Leftrightarrow y - \bar{y} \in (-\infty, s] q(y, \bar{y}) - \mathrm{vcl}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y}).$$

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập điều kiện cần và đủ cho điểm không trội và điểm không trội yếu của một tập hợp theo cấu trúc thứ tự $\leq^C$.

Định lý 3.31. *Cho* Ω *là một tập con khác rỗng của* Y *và* $\bar{y} \in \Omega$.

(i) *Giả sử* $q(y, \bar{y}) \in 0^+ C(y, \bar{y})$ *với mọi* $y \in Y$ *và* $0 \in \mathrm{bd}_{q(\bar{y},\bar{y})} C(\bar{y}, \bar{y})$. *Khi đó,* $\bar{y} \in \mathrm{ND}(\Omega, \mathrm{int}_{-q} C)$ *khi và chỉ khi* $\bar{y} \in \mathrm{argmin}_\Omega\, \varphi^C_{\bar{y},q}$.

(ii) *Giả sử* $q(y, \bar{y}) \in \mathrm{cor}\, 0^+ C(y, \bar{y})$ *với mọi* $y \in Y\backslash\{\bar{y}\}$, $q(\bar{y}, \bar{y}) \in 0^+ C(\bar{y}, \bar{y})$ *và* $0 \in \mathrm{bd}_{q(\bar{y},\bar{y})} C(\bar{y}, \bar{y})$. *Khi đó,* $\bar{y} \in \mathrm{WND}(\Omega, C)$ *khi và chỉ khi* $\bar{y} \in \mathrm{argmin}_\Omega\, \varphi^C_{\bar{y},q}$.

(iii) *Giả sử* $q(y, \bar{y}) \in 0^+ C(y, \bar{y})$ *với mọi* $y \in Y$ *và* $0 \in \mathrm{bd}_{q(\bar{y},\bar{y})} C(\bar{y}, \bar{y})$. *Khi đó* $\bar{y} \in \mathrm{ND}(\Omega, \mathrm{vcl}_q C)$ *khi và chỉ khi* $\bar{y} \in \mathrm{argsmin}_\Omega\, \varphi^C_{\bar{y},q}$.

(iv) *Giả sử* $C(y, \bar{y})$ *là đóng theo hướng* $q(y, \bar{y})$ *với mọi* $y \in Y\backslash\{\bar{y}\}$, $q(y, \bar{y}) \in 0^+ C(y, \bar{y})$ *với mọi* $y \in Y$ *và* $0 \in \mathrm{bd}_{q(\bar{y},\bar{y})} C(\bar{y}, \bar{y})$. *Khi đó,* $\bar{y} \in \mathrm{ND}(\Omega, C)$ *khi và chỉ khi* $\bar{y} \in \mathrm{argsmin}_\Omega\, \varphi^C_{\bar{y},q}$.

(v) *Giả sử* $q(y, \bar{y}) \in 0^+ C(y, \bar{y})$, *với mọi* $y \in Y$ *và* $0 \in \mathrm{bd}_{q(\bar{y},\bar{y})} C(\bar{y}, \bar{y})$. *Khi đó, nếu* $\bar{y} \in \mathrm{argmin}_\Omega\, \varphi^C_{\bar{y},q} \backslash \mathrm{argsmin}_\Omega\, \varphi^C_{\bar{y},q}$ *thì*

$$\emptyset \neq \{y \in M\backslash\{\bar{y}\} : \bar{y} \in y + \mathrm{bd}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y})\} = \{y \in \Omega\backslash\{\bar{y}\} : \varphi^C_{\bar{y},q}(y) = 0\}.$$

Phần tiếp theo trình bày kết quả về sự tồn tại của điểm không trội của tập hợp Ω theo cấu trúc thứ tự hai biến sinh bởi ánh xạ đa trị $\mathrm{int}_{-q}C$. Với mỗi $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$, $q : Y \times Y \to Y$, $\bar{y} \in Y$ và $r \in \mathbb{R}$, ta kí hiệu ánh xạ đa trị $(\mathrm{vcl}_q C + rq)_{\bar{y}} : Y \rightrightarrows Y$ xác định như sau:

$$(\mathrm{vcl}_q C + rq)_{\bar{y}}(y) := \mathrm{vcl}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y}) + rq(y, \bar{y}) \quad y \in Y.$$

Bổ đề 3.35. *Xét điểm $\bar{y} \in Y$. Giả sử $q(y, \bar{y}) \in 0^+C(y, \bar{y})$ và đồ thị của ánh xạ của $(\mathrm{vcl}_q C + rq)_{\bar{y}}$ là tập đóng với mọi $y \in Y$ và $r \in \mathbb{R}$. Khi đó $\varphi^C_{\bar{y},q}$ là nửa liên tục dưới.*

Định lý 3.36. *Cho $\Omega \subset Y$ là tập compact khác rỗng. Giả sử $q(y_1, y_2) \in 0^+C(y_1, y_2)$, $0 \in \mathrm{bd}_{q(y,y)} C(y, y)$ và đồ thị của $(\mathrm{vcl}_q C + rq)_y$ là đóng với mọi $y_1, y_2, y \in Y$ và $r \in \mathbb{R}$. Hơn nữa giả sử rằng hàm $\varphi^C_{y,q}$ là chính thường với mọi $y \in Y$. Khi đó,* $\mathrm{argmin}_\Omega\, \varphi^C_{y,q} \neq \emptyset$ *với mọi $y \in Y$ và*

$$\mathrm{ND}(\Omega, \mathrm{int}_{-q} C) = \bigcup_{y \in \Omega} [\mathrm{argmin}_\Omega\, \varphi^C_{y,q}] \cap \{y\}.$$

Ta kết thúc phần này với Hệ quả 3.37. Đây là kết quả thu được khi áp dụng Định lý 3.31 để đặc trưng nghiệm địa phương của bài toán (P). Ta kí hiệu tập nghiệm địa phương (tương ứng, nghiệm địa phương chặt) của bài toán tối ưu vô hướng với hàm mục tiêu $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ và tập ràng buộc $S \subset X$ lần lượt bởi $\mathrm{arglmin}_S g$ (tương ứng $\mathrm{argslmin}_S g$), tức là

$$\bar{x} \in \mathrm{arglmin}_S g :\Leftrightarrow \bar{x} \in \bigcup_{V \in \mathcal{N}(\bar{x})} \mathrm{argmin}_{S \cap V} g,$$

$$(\text{tương ứng,} \quad \bar{x} \in \mathrm{argslmin}_S g :\Leftrightarrow \bar{x} \in \bigcup_{V \in \mathcal{N}(\bar{x})} \mathrm{argsmin}_{S \cap V} g).$$

Ngoài ra, liên quan đến bài toán (P), tập mức của f tại $y \in Y$ được kí hiệu là $\mathrm{L}(f, y)$, tức là

$$\mathrm{L}(f, y) := \{x \in X : f(x) = y\}.$$

Hệ quả 3.37. *Xét bài toán* (P) *và $\bar{x} \in S$.*

(i) *Giả sử $q(y, f(\bar{x})) \in 0^+C(y, f(\bar{x}))$ với mọi $y \in Y$ và $0 \in \mathrm{bd}_{q(f(\bar{x}), f(\bar{x}))} C(f(\bar{x}), f(\bar{x}))$. Khi đó*

$$\bar{x} \in \mathrm{LND}(f, S, \mathrm{int}_{-q} C) \Leftrightarrow \bar{x} \in \mathrm{arglmin}_S\, (\varphi^C_{f(\bar{x}),q} \circ f).$$

(ii) *Giả sử $q(f(\bar{x}), f(\bar{x})) \in 0^+C(f(\bar{x}), f(\bar{x}))$, $q(y, f(\bar{x})) \in \mathrm{cor}\, 0^+C(y, f(\bar{x}))$ với mọi $y \in Y \backslash \{f(\bar{x})\}$ và $0 \in \mathrm{bd}_{q(f(\bar{x}), f(\bar{x}))} C(f(\bar{x}), f(\bar{x}))$. Khi đó*

$$\bar{x} \in \mathrm{LWND}(f, S, C) \Leftrightarrow \bar{x} \in \mathrm{arglmin}_S (\varphi^C_{f(\bar{x}),q} \circ f).$$

(iii) *Giả sử* $q(y,f(\bar{x}))\in 0^+C(y,f(\bar{x}))$ *với mọi* $y\in Y$ *và* $0\in \mathrm{bd}_{q(f(\bar{x}),f(\bar{x}))}C(f(\bar{x}),f(\bar{x}))$. *Khi đó*

$$\bar{x}\in \mathrm{LND}(f,S,\mathrm{vcl}_q C)\Leftrightarrow \bar{x}\in \mathrm{argslmin}_{(S\setminus \mathrm{L}(f,f(\bar{x})))\cup\{\bar{x}\}}(\varphi^C_{f(\bar{x}),q}\circ f).$$

(iv) *Giả sử* $q(y,f(\bar{x}))\in 0^+C(y,f(\bar{x}))$ *với mọi* $y\in Y$, $C(y,f(\bar{x}))$ *là đóng theo hướng* $q(y,f(\bar{x}))$ *với mọi* $y\in Y\setminus\{f(\bar{x})\}$ *và* $0\in \mathrm{bd}_{q(f(\bar{x}),f(\bar{x}))}C(f(\bar{x}),f(\bar{x}))$. *Khi đó*

$$\bar{x}\in \mathrm{LND}(f,S,C)\Leftrightarrow \bar{x}\in \mathrm{argslmin}_{(S\setminus \mathrm{L}(f,f(\bar{x})))\cup\{\bar{x}\}}(\varphi^C_{f(\bar{x}),q}\circ f).$$

Kết luận

Luận án đã đạt được một số kết quả mới và có ý nghĩa trong lĩnh vực tối ưu minimax và tối ưu véctơ.

Trước hết, luận án đã thiết lập các điều kiện cần và đủ tối ưu cho bài toán tối ưu minimax rời rạc trong cả hai trường hợp lồi và không lồi. Các điều kiện tối ưu được phát biểu thông qua các khái niệm dưới vi phân và nón pháp tuyến tương ứng của giải tích lồi và giải tích biến phân, dưới điều kiện chính quy metric và điều kiện liên tục (hoặc liên tục Lipschitz). Đặc biệt, quy tắc dưới vi phân của hàm maximum dưới điều kiện chính quy metric được xây dựng và đóng vai trò then chốt trong việc suy ra các kết quả tối ưu, đây là một đóng góp mới chưa từng được thiết lập trước đây.

Bên cạnh đó, luận án đã thực hiện phân tích độ nhạy nghiệm cho các lớp bài toán tối ưu minimax có tham số trường hợp lồi và trường hợp không lồi. Các công thức đánh giá dưới vi phân của hàm giá trị tối ưu được thiết lập, qua đó làm rõ sự phụ thuộc của giá trị tối ưu vào tham số bài toán dưới các giả thiết chính quy phù hợp.

Cuối cùng, luận án đã nghiên cứu một cách hệ thống cấu trúc thứ tự hai biến trong không gian véctơ, làm rõ các tính chất cơ bản của cấu trúc này cũng như mối liên hệ với các cấu trúc thứ tự thay đổi thông thường. Trên cơ sở đó, các khái niệm nghiệm tối ưu cho bài toán tối ưu véctơ dưới cấu trúc thứ tự hai biến được xây dựng và so sánh với các khái niệm và kết quả hiện có. Luận án cũng đã thiết lập các điều kiện cần và đủ cho nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến thông qua phương pháp vô hướng hóa phi tuyến, sau đó áp dụng vào trường hợp riêng là các cấu trúc thứ tự thay đổi thông thường. Các kết quả mới thu được không chỉ tổng quát hóa mà còn cải thiện các kết quả hiện có.

Những kết quả của luận án không chỉ góp phần hoàn thiện khung lý thuyết cho các bài toán đã xét mà còn mở ra nhiều hướng nghiên cứu tiếp theo trong tối ưu minimax và tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến.