ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG THỊ NGOAN

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU VÀ PHÂN TÍCH ĐỘ NHẠY NGHIỆM CHO MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN TỐI ƯU

LUẬN ÁN TIẾN SĨ NGÀNH TOÁN ỨNG DỤNG

Thái Nguyên – 2026

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG THỊ NGOAN

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU VÀ PHÂN TÍCH ĐỘ NHẠY NGHIỆM CHO MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN TỐI ƯU

Ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 9 46 01 12

LUẬN ÁN TIẾN SĨ

Tập thể hướng dẫn khoa học:
TS. Dương Thị Việt An
PGS. TS. Nguyễn Văn Tuyên

Thái Nguyên – 2026

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan những kết quả trình bày trong luận án này, dưới sự hướng dẫn của TS. Dương Thị Việt An và PGS. TS. Nguyễn Văn Tuyên, là trung thực và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình của ai khác. Các kết quả viết chung với Thầy, Cô hướng dẫn và các đồng tác giả đã được sự đồng ý của các tác giả có liên quan khi đưa vào luận án.

Thái Nguyên, ... tháng ... năm 2026

Nghiên cứu sinh

Đặng Thị Ngoan

Lời cảm ơn

Luận án được thực hiện tại Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của TS. Dương Thị Việt An và PGS. TS. Nguyễn Văn Tuyên.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Dương Thị Việt An, người đã ân cần dìu dắt tôi từ những ngày đầu tiên tôi bước vào con đường nghiên cứu. Cô không chỉ định hướng đề tài, gợi mở phương pháp tiếp cận phù hợp mà còn hướng dẫn tôi trong việc tìm kiếm và chọn lọc tài liệu tham khảo, cũng như các bước triển khai, công bố kết quả nghiên cứu và mở rộng hướng nghiên cứu. Sự tận tâm, tỉ mỉ và nghiêm túc trong khoa học của Cô là tấm gương sáng cho các thế hệ học trò.

Tôi trân trọng cảm ơn PGS. TS. Nguyễn Văn Tuyên vì Thầy đã luôn quan tâm, chỉ dẫn tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu khoa học cũng như trong quá trình hoàn thiện luận án. Thầy đã tận tình truyền đạt cho tôi nền tảng kiến thức trong lĩnh vực tối ưu hóa nói chung và tối ưu đa mục tiêu nói riêng, qua đó giúp tôi tự tin trên con đường nghiên cứu, trong công tác giảng dạy cũng như trong kết nối, trao đổi học thuật với các chuyên gia hàng đầu cả trong và ngoài nước.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học cùng các anh chị em nghiên cứu sinh trong Khoa. Môi trường sư phạm chuẩn mực, thân thiện tại Khoa được tạo nên từ sự tâm huyết, lòng yêu nghề và yêu khoa học của các Thầy Cô trong Khoa đã nâng cánh ước mơ cho tôi và giúp tôi phát huy tốt khả năng của mình. Tôi cũng cảm ơn các anh chị em trong nhóm seminar đã luôn chia sẻ, hỗ trợ tôi tích lũy thêm kiến thức chuyên ngành.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các phòng ban chức năng của Trường Đại học Khoa học. Chính sự chuyên nghiệp, chu đáo và trách nhiệm trong công việc của các Quý đơn vị đã tạo điều kiện tốt nhất cho nghiên cứu sinh trong suốt quá

trình học tập tại Trường, trong quá trình làm các thủ tục bảo vệ luận án, cũng như tạo ra các cơ hội để người học mở rộng chân trời tri thức bằng các hoạt động hợp tác trao đổi vô cùng hiệu quả và ý nghĩa, chẳng hạn hợp tác với trường Đại học Valladolid (Tây Ban Nha) trong khuôn khổ chương trình Erasmus$^+$.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Giáo sư César Gutiérrez Vaquero, Trường Đại học Valladolid. Giáo sư Gutiérrez, một chuyên gia trong lĩnh vực tối ưu véctơ với nhiều công bố chất lượng cao, là người hướng dẫn khoa học cho tôi trong chuyến đi học tập trao đổi tại Tây Ban Nha năm 2024. Thành quả của chuyến đi là hai bản thảo bài báo khoa học, trong đó một bài đã được công bố (CT3), đóng góp vào Chương 3 của luận án, và một bản thảo khác đã nhận được phản biện tích cực.

Trong thời gian học tập và nghiên cứu, tôi cũng nhận được sự quan tâm hỗ trợ từ nơi tôi đang công tác - Trường Công nghệ thông tin Phenikaa, Đại học Phenikaa. Tôi xin chân thành cảm ơn Nhà trường đã tạo điều kiện cho tôi được học tập nâng cao trình độ chuyên môn. Cảm ơn sự hỗ trợ nhiệt tình của các đồng nghiệp trong Khoa Khoa học máy tính, những người đã luôn động viên và giúp đỡ để tôi hoàn thành tốt nhiệm vụ giảng dạy và nghiên cứu.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Hội đồng đánh giá luận án cấp đơn vị chuyên môn, các Thầy Cô, các nhà khoa học đã dành thời gian quý báu để đọc bản thảo luận án và đóng góp những ý kiến tâm huyết và xác đáng, giúp luận án được hoàn thiện và chỉn chu hơn.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời tri ân sâu sắc tới bạn bè và gia đình tôi. Sự yêu thương, cảm thông, cổ vũ và ủng hộ vô điều kiện của những người thân yêu là nguồn động lực to lớn giúp tôi vượt qua khó khăn và hoàn thành luận án này.

Mục lục

Lời cam đoan **i**

Lời cảm ơn **ii**

Một số ký hiệu và chữ viết tắt **vi**

Mở đầu **1**

1 Một số kiến thức chuẩn bị **10**

1.1 Bài toán tối ưu véctơ và các khái niệm liên quan 10

1.1.1 Quan hệ thứ tự trong không gian véctơ 10

1.1.2 Bài toán tối ưu véctơ 12

1.2 Bài toán tối ưu minimax 16

1.2.1 Ví dụ về bài toán tối ưu minimax 16

1.2.2 Phát biểu bài toán minimax rời rạc có tham số 18

1.3 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ khác 18

1.3.1 Nón pháp tuyến 19

1.3.2 Dưới vi phân 22

1.3.3 Đối đạo hàm 27

1.3.4 Điều kiện chính quy metric 28

2 Điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu minimax có tham số **33**

2.1 Quy tắc dưới vi phân của hàm maximum 33

2.2 Điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán minimax lồi có tham số 42

2.2.1 Điều kiện cần và đủ tối ưu 42

2.2.2 Phân tích độ nhạy nghiệm 46
2.3 Điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán minimax không lồi có tham số 51
2.3.1 Điều kiện cần và đủ tối ưu 51
2.3.2 Phân tích độ nhạy nghiệm 58

3 Đặc trưng nghiệm cho bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến 64
3.1 Cấu trúc thứ tự hai biến 64
3.1.1 Định nghĩa và các tính chất 64
3.1.2 Các khái niệm điểm hữu hiệu, nghiệm tối ưu 72
3.2 Đặc trưng nghiệm sử dụng hàm vô hướng hóa phi tuyến 84

Kết luận 99

Danh mục các công trình đã công bố 101

Tài liệu tham khảo 102

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbb{R}_+$	tập số thực không âm
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$	tập số thực suy rộng
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
$\mathbb{R}^n_+$	nón orthant không âm của $\mathbb{R}^n$
X^*	không gian đối ngẫu của không gian Banach X
$\mathbb{B}(x, \delta)$	hình cầu mở tâm x bán kính δ
$\overline{\mathbb{B}}_{X^*}$	hình cầu đơn vị đóng trong X^*
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall\, x$	với mọi x
$\exists\, x$	tồn tại x
$A \cup B$	hợp của hai tập A và B
$A \cap B$	giao của hai tập A và B
$A \times B$	tích Đề-các của hai tập A và B
$A + B$	tổng Minkowski của hai tập A và B
$A - B$	hiệu Minkowski của tập A và tập B
$\lvert x \rvert$	giá trị tuyệt đối của x
$\lVert x \rVert$	chuẩn của véctơ x
$\langle x^*, x \rangle$	giá trị của phiếm hàm tuyến tính x^* tại x
$\operatorname{ri}\Omega$	phần trong tương đối của tập Ω
$\operatorname{int}\Omega$	phần trong tôpô của tập Ω
$\operatorname{fr}\Omega$	biên tôpô của tập Ω
$\operatorname{cl}\Omega$	bao đóng tôpô của tập Ω
Ω^c	phần bù của tập Ω

$\operatorname{cor}\Omega$	phần trong đại số của tập Ω
$\operatorname{int}_q\Omega$	phần trong theo hướng q của tập Ω
$\operatorname{vcl}_q\Omega$	bao đóng theo hướng q của tập Ω
$\operatorname{bd}_q\Omega$	biên theo hướng q của tập Ω
$\operatorname{cone}\Omega$	nón sinh bởi tập Ω
$\operatorname{conv}\Omega$	bao lồi của tập Ω
$\operatorname{aff}\Omega$	bao affine của tập Ω
$d(x,\Omega)$	khoảng cách từ điểm x đến tập Ω
$\widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega)$	tập các ε-pháp tuyến của Ω tại x
$\widehat{N}(x;\Omega)$	nón pháp tuyến Fréchet của Ω tại x
$N_L(x;\Omega)$	nón pháp tuyến Mordukhovich của Ω tại x
$N(x;\Omega)$	nón pháp tuyến của tập lồi Ω tại x
$x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$	dãy véctơ x_k^* hội tụ đến véctơ x^*
	theo tôpô yếu* (được ký hiệu bởi w^*)
$x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$	$x \to \bar{x}$ và $x \in \Omega$
$\operatorname{dom} f$	miền hữu hiệu của hàm f
$\operatorname{epi} f$	trên đồ thị của hàm f
$\nabla f(x)$	đạo hàm Fréchet của f tại x
$f'(x)$	đạo hàm của hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tại x
$\partial_L f(x)$	dưới vi phân Mordukhovich của hàm f tại x
$\partial_L^\infty f(x)$	dưới vi phân suy biến Mordukhovich của hàm f tại x
$\partial f(x)$	dưới vi phân của hàm lồi f tại x
$\partial^\infty f(x)$	dưới vi phân suy biến của hàm lồi f tại x
$F: X \rightrightarrows Y$	ánh xạ đa trị từ X vào Y
$\operatorname{dom} F$	tập xác định của ánh xạ đa trị F
$\operatorname{gph} F$	đồ thị của ánh xạ đa trị F
$D_L^* F(x,y)$	đối đạo hàm Mordukhovich của ánh xạ đa trị F tại (x,y)

Mở đầu

1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Nhà toán học vĩ đại Leonhard Euler từng khẳng định: "Cum enim universi fabrica sit perfectissima atque a sapientissimo Creatore constituta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quaepiam eluceat." (Tạm dịch: Bởi lẽ vũ trụ được kiến tạo một cách hoàn hảo nhất bởi Đấng Sáng Tạo, nên không có điều gì xảy ra trong vũ trụ mà không tuân theo một nguyên lý cực đại hoặc cực tiểu nào đó). Nhận định này thể hiện tính phổ quát của nguyên lý tối ưu trong mọi lĩnh vực của khoa học và đời sống. Mô hình chung của một bài toán tối ưu có dạng:

$$\min\,(\max)\ f(x) \text{ với } x \in C,$$

trong đó hàm f được gọi là hàm mục tiêu hay hàm chi phí, tập C là một tập khác rỗng và được gọi là tập ràng buộc hay miền chấp nhận được.

Để giải các bài toán tối ưu, người ta thường sử dụng các điều kiện tối ưu. Nếu bài toán trơn thì ta dùng Quy tắc Fermat (điều kiện cần tối ưu cấp một) để xác định điểm dừng là điểm nghi ngờ mà tại đó hàm số có thể đạt cực trị. Tuy nhiên trên thực tế, các hàm không trơn xuất hiện một cách tự nhiên và thường xuyên trong lý thuyết tối ưu, chẳng hạn hàm maximum hoặc hàm giá trị tối ưu thường là các hàm không trơn. Vì vậy, các công cụ của giải tích không trơn hay phép tính vi phân suy rộng đóng một vai trò quan trọng. Các khái niệm suy rộng của đạo hàm thường được xây dựng theo hai hướng tiếp cận: trên không gian nền (primal approach) và trên không gian đối ngẫu (dual approach). Cả hai hướng tiếp cận này đều hiệu quả, nhưng trong một số trường hợp, hướng tiếp cận trên không gian đối ngẫu tỏ ra vượt trội hơn (xem [1, tr.106]). Lý thuyết vi phân cho lớp hàm không trơn cùng với các ứng dụng quan trọng của nó trong quy hoạch toán học và điều khiển tối ưu đã được xây dựng bởi nhiều nhà toán học, trong đó phải kể đến lý

thuyết do Mordukhovich xây dựng vào những năm 80 của thế kỷ XX (xem cuốn sách chuyên khảo [47]). Lý thuyết này cho đến nay vẫn đang được tiếp tục phát triển và đưa đến những thành quả mới.

Trong thực tiễn, nhiều bài toán tối ưu phụ thuộc vào các tham số phản ánh sự tác động của môi trường hoặc các nhiễu đầu vào. Vì vậy, việc khảo sát sự thay đổi của giá trị tối ưu theo các tham số này đóng vai trò quan trọng cả về lý thuyết và ứng dụng. Ta biết rằng khi bài toán tối ưu có tham số, hàm giá trị tối ưu (optimal value function) là một hàm theo tham số. Lĩnh vực nghiên cứu về tính ổn định vi phân của hàm giá trị tối ưu, hay phân tích độ nhạy nghiệm (sensitivity analysis) giúp chúng ta hiểu được sự biến thiên của hàm giá trị tối ưu khi tham số của bài toán thay đổi. Điểm đáng lưu ý là, hàm giá trị tối ưu có thể không khả vi theo tham số, ngay cả khi các dữ liệu ban đầu của bài toán đều khả vi. Do đó, các nghiên cứu về độ nhạy nghiệm thường được thực hiện thông qua các đạo hàm suy rộng hoặc dưới vi phân. Chủ đề này đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu, trong đó An, Köbis và Tuyen [3], An và Jourani [2], An và Yen [4], Auslender [6], Gauvin và Dubeau [28], Ioffe và Penot [41], Jourani [43], Mordukhovich và các đồng tác giả [47, 49, 50], Ngai và Théra [51], Penot [53], Toan và Yao [58], cùng nhiều tác giả khác đã có những đóng góp cho hướng nghiên cứu này. Thực tế cho thấy, lý thuyết về điều kiện tối ưu có mối liên hệ chặt chẽ với phân tích độ nhạy nghiệm, xem, chẳng hạn, [12, Chương 4] và [56, Chương 3]. Để tìm hiểu thêm về chủ đề này, ta có thể tham khảo các cuốn sách của Bonnans và Shapiro [12], Fiacco [27] và Malanowski [46].

Cần nhấn mạnh rằng, để thu được các quy tắc tính toán của giải tích không trơn, ta cần một số điều kiện chính quy (qualification condition) thích hợp. Việc nới lỏng các điều kiện này sẽ giúp mở rộng phạm vi áp dụng của các kết quả nghiên cứu. Điều kiện chính quy đóng vai trò là điều kiện đủ để đảm bảo tính đúng đắn của các quy tắc tính toán cơ bản trong giải tích biến phân, giải tích lồi và lý thuyết tối ưu. Ví dụ, định lý Moreau–Rockafellar cho công thức dưới vi phân của tổng hai hàm lồi với điều kiện một hàm liên tục tại một điểm thuộc miền hữu hiệu của hàm còn lại. Tương tự, trong giải tích biến phân, tính liên tục Lipschitz đảm bảo quy tắc tổng cho dưới vi phân Mordukhovich.

Điều kiện chính quy metric (metric qualification condition), được phát biểu thông qua các hàm khoảng cách, lần đầu tiên được nghiên cứu và phát triển trong các công trình của Ioffe, Penot, Jourani và Thibault [37], [41], [44] và gần đây là bởi Huong và đồng tác giả [36] cho trường hợp không lồi. Theo Ioffe [38], điều kiện chính quy metric thậm chí còn yếu hơn cả những điều kiện đủ yếu nhất được sử dụng trong giải tích lồi. Mối quan hệ giữa điều kiện chính quy metric và các điều kiện đủ khác đã được khảo sát trong [38, 40, 45]. Những điều kiện này đóng vai trò quan trọng trong việc thiết lập các quy tắc tính toán dưới vi phân (xem [36, 37, 39, 51, 53]), qua đó cho phép chúng ta nghiên cứu đầy đủ hơn về điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm của các bài toán tối ưu có tham số.

Bài toán tối ưu minimax là lớp bài toán tối ưu trong đó xét cả hai quá trình cực tiểu hóa và cực đại hóa. Các bài toán này có nhiều ứng dụng trong toán học, kinh tế học và khoa học máy tính, ví dụ: đa thức xấp xỉ tốt nhất theo nghĩa Chebyshev [20], tối ưu đa mục tiêu [35], lý thuyết trò chơi [59]. Theo Demyanov và Malozemov [20], bài toán tối ưu minimax có thể được chia thành hai loại: bài toán minimax rời rạc và bài toán minimax liên tục. Xấp xỉ tốt nhất theo nghĩa Chebyshev có thể mô hình hóa dưới dạng một bài toán minimax rời rạc, trong khi tối ưu hóa hàm mất mát của mô hình mạng đối sinh (GAN) trong trí tuệ nhân tạo dẫn đến bài toán minimax liên tục. Các kết quả về điều kiện tối ưu và các kết quả đối ngẫu cho bài toán tối ưu minimax có thể tìm thấy trong nhiều công trình nghiên cứu. Cụ thể, Bao và các đồng tác giả [8] đã nghiên cứu điều kiện tối ưu cho bài toán minimax với các ràng buộc bất đẳng thức, đẳng thức và ràng buộc hình học trong không gian Asplund. Trong khi đó, Chuong và Kim [18], Zhong và Jin [62] đã nghiên cứu các điều kiện tối ưu và kết quả đối ngẫu cho bài toán minimax với lớp hàm không khả vi. Các tác giả đã sử dụng dưới vi phân Mordukhovich và một số công cụ tiên tiến khác của giải tích biến phân. Trong đó, tính liên tục Lipschitz là yếu tố cơ bản để suy ra quy tắc dưới vi phân của tổng các hàm, cũng như quy tắc dưới vi phân của hàm maximum. Đáng chú ý, mối liên hệ chặt chẽ giữa bài toán tối ưu minimax và bài toán tối ưu đa mục tiêu đã được khai thác trong [18]; ở đó, các điều kiện tối ưu của bài toán đa mục tiêu được thiết lập như một hệ quả trực tiếp từ các kết quả tương ứng của bài toán tối ưu minimax.

Liên quan đến chủ đề phân tích độ nhạy nghiệm trong các bài toán tối ưu minimax có tham số, theo hiểu biết của chúng tôi, các kết quả trong [19] là những kết quả đầu tiên. Cụ thể, các tác giả trong [19] đã thu được một khai triển vi phân của hàm giá trị tối ưu trong lân cận của một điểm nhất định (Định lý 1 và 2). Cho đến nay, chúng tôi chưa tìm thấy thêm công trình nào khác nghiên cứu về phân tích độ nhạy nghiệm cho các bài toán tối ưu minimax có tham số.

Vì vậy, luận án nghiên cứu thiết lập điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu minimax có tham số trường hợp lồi và trường hợp không lồi, dựa trên hai loại điều kiện chính quy: điều kiện chính quy metric và điều kiện liên tục (hoặc liên tục Lipschitz) của các hàm thành phần.

Lớp bài toán thứ hai chúng tôi xét là bài toán tối ưu véctơ. Ở trường hợp hữu hạn chiều, bài toán này còn gọi là bài toán tối ưu đa mục tiêu và thường gặp trong thực tế. Chẳng hạn, quyết định mua một chiếc ô tô thường không chỉ dựa trên một tiêu chí duy nhất, mà xem xét nhiều mục tiêu như: tối thiểu hóa chi phí, tối đa hóa hiệu suất và công nghệ, tối thiểu hóa tác động môi trường, tối đa hóa sự thoải mái và tiện nghi,... Các mục tiêu thường xung đột với nhau, chẳng hạn xe có hiệu suất cao thường đắt hơn và tiêu tốn nhiều nhiên liệu, xe giá rẻ thường không tiện nghi. Qua đó có thể thấy rằng, việc tìm một phương án tối ưu lý tưởng thỏa mãn tất cả các mục tiêu là điều không phù hợp với thực tế.

Như vậy, trong tối ưu véctơ, khái niệm nghiệm tối ưu là một trong những điểm cốt lõi. Khái niệm này thường được xây dựng dựa trên giả thiết rằng không gian ảnh Y của bài toán được sắp thứ tự bộ phận bởi một nón lồi nhọn không tầm thường. Trong trường hợp hữu hạn chiều, nón sắp thứ tự phổ biến nhất là nón orthant gồm các điểm mà tất cả các tọa độ của nó đều không âm. Đây chính là mô hình thường được sử dụng cho các bài toán tối ưu đa mục tiêu trong thực tế, khi các mục tiêu được so sánh theo từng thành phần. Quan hệ thứ tự bộ phận sinh ra bởi nón orthant không âm dẫn đến khái niệm nghiệm tối ưu theo nghĩa Pareto, cho phép xác định những phương án mà không có phương án khả thi nào tốt hơn đồng thời trên tất cả các mục tiêu. Tuy nhiên, trong nhiều bài toán thực tế, mức độ ưu tiên giữa các mục tiêu có thể phụ thuộc vào từng phương án được so sánh hoặc thay đổi theo bối cảnh ra quyết định. Do đó, việc mô hình hóa quan

hệ so sánh chỉ bằng một nón sắp thứ tự cố định chưa thể bao quát đầy đủ các tình huống phát sinh trong thực tế. Điều đó đã được ghi nhận trong nhiều nghiên cứu liên quan đến quá trình ra quyết định, bài toán tối ưu đa mục tiêu hay đăng ký ảnh y học (xem [21, tr. 218]).

Để cải thiện điều này, các nhà nghiên cứu đã sử dụng cấu trúc thứ tự thay đổi để thay thế cho cấu trúc thứ tự cố định. Theo đó, mỗi phần tử của không gian ảnh Y có nón sắp thứ tự riêng của nó. Nón này được xác định bởi một ánh xạ đa trị nhận giá trị nón, thường ký hiệu là $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$. Ý tưởng về cấu trúc thứ tự thay đổi được giới thiệu lần đầu tiên bởi Yu vào năm 1974 trong tài liệu [60]. Sau đó, Chen và đồng tác giả đã xây dựng hàm vô hướng hóa phi tuyến tương ứng với các cấu trúc thứ tự này và nghiên cứu các tính chất cơ bản của nó. Các tác giả chỉ ra rằng nghiệm của bài toán tối ưu véctơ, bất đẳng thức biến phân véctơ và bài toán cân bằng véctơ tổng quát đều có thể được đặc trưng thông qua hàm này, xem [14, 15, 16]. Tiếp đó, Eichfelder và đồng tác giả đã xây dựng một khung lý thuyết tổng quát và tương đối toàn diện về cấu trúc thứ tự thay đổi, cũng như các ứng dụng của nó trong tối ưu véctơ, bao gồm: các điều kiện tối ưu cho bài toán không trơn sử dụng dưới vi phân và đối đạo hàm, các kết quả về vô hướng hóa tuyến tính và phi tuyến, đối ngẫu và các phương pháp số, xem [21, 22, 23, 24, 25, 26]. Các điều kiện tối ưu, các kết quả vô hướng hóa và các nguyên lý biến phân tiếp tục được nghiên cứu bởi Bao và các đồng tác giả, xem [7, 9, 10, 11]. Gần đây, các nhóm tác giả Anh và Tam [5], Peng cùng đồng tác giả [52], đã đặc trưng hóa nghiệm hữu hiệu xấp xỉ trong các bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự thay đổi thông qua phương pháp vô hướng hóa.

Cho đến nay, tuy tồn tại dưới nhiều tên gọi khác nhau, nhưng nói chung có hai khái niệm cơ bản về điểm tối ưu liên quan đến cấu trúc thứ tự thay đổi: một khái niệm dựa trên điều kiện điểm đang xét là không trội bởi bất kỳ điểm nào khác theo nón thứ tự của chính điểm đang xét, khái niệm còn lại dựa trên điều kiện điểm đang xét là không trội bởi bất kỳ điểm nào khác theo nón thứ tự của các điểm kia (không phải điểm đang xét). Chúng tôi nhận thấy rằng trong các tài liệu hiện có, dựa trên hai khái niệm tối ưu này, tất cả các tính chất liên quan cũng được phát biểu theo hai cách khác nhau nhưng có liên hệ chặt chẽ với nhau.

Vì vậy, luận án nghiên cứu đưa ra một cấu trúc thứ tự tổng quát hơn, bao trùm cả hai khái niệm nói trên. Ý tưởng chủ đạo xuất phát từ nghiên cứu của Gutiérrez [31], trong đó nghiệm hữu hiệu xấp xỉ của bài toán tối ưu đa mục tiêu được định nghĩa thông qua một ánh xạ đa trị $C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$, với $\mathbb{R}^n$ là không gian quyết định và $\mathbb{R}^p$ là không gian ảnh của bài toán. Trong luận án, không gian ảnh Y không chỉ xét trường hợp hữu hạn chiều như trong [31], mà Y là một không gian véctơ tôpô thực tổng quát, được trang bị một cấu trúc thứ tự sao cho mỗi phép so sánh giữa hai điểm bất kỳ trong Y sẽ dựa trên một tập (thường là nón) tương ứng với cặp điểm đó. Nói cách khác, ta sẽ xét một ánh xạ đa trị $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$. Cấu trúc thứ tự được xây dựng dựa trên C được đặt tên là cấu trúc thứ tự hai biến (two-variable domination structure). Tiếp đó, nghiệm của bài toán tối ưu véctơ sẽ được mô tả thông qua phương pháp vô hướng hóa, dẫn đến các định lý về điều kiện cần và đủ tối ưu với cấu trúc thứ tự hai biến vừa định nghĩa ở trên.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Luận án tập trung nghiên cứu thiết lập điều kiện cần và đủ tối ưu cấp một và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu minimax rời rạc có tham số; định nghĩa và nghiên cứu các tính chất của cấu trúc thứ tự hai biến trong không gian véctơ, thiết lập điều kiện điều kiện cần và đủ cho nghiệm tối ưu địa phương của bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến thông qua phương pháp vô hướng hóa.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là hai lớp bài toán tối ưu: Bài toán tối ưu minimax rời rạc có tham số và Bài toán tối ưu véctơ.

Phạm vi nghiên cứu: Điều kiện cần và đủ tối ưu cấp một, công thức tính toán/đánh giá dưới vi phân của hàm giá trị tối ưu cho bài toán tối ưu minimax rời rạc có tham số trường hợp lồi và trường hợp không lồi; định nghĩa và các tính chất của cấu trúc thứ tự hai biến, định nghĩa các khái niệm nghiệm tối ưu, điều kiện cần và đủ tối ưu cho bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến.

4. Cách tiếp cận, phương pháp nghiên cứu

Để nghiên cứu các nội dung nêu trên, chúng tôi sử dụng các kiến thức và kỹ thuật của giải tích biến phân, giải tích lồi và lý thuyết tối ưu.

Đối với bài toán tối ưu minimax, luận án tiếp cận trên không gian đối ngẫu. Trường hợp bài toán minimax lồi, các công cụ chủ yếu là quy tắc dưới vi phân của tổng các hàm lồi và quy tắc dưới vi phân của maximum các hàm lồi. Trong trường hợp không lồi, các công cụ tương ứng của giải tích biến phân được khai thác thông qua dưới vi phân Mordukhovich.

Xuyên suốt nghiên cứu về bài toán minimax, hai loại điều kiện chính quy được sử dụng là điều kiện chính quy metric và điều kiện về tính liên tục (cho trường hợp lồi) hoặc tính liên tục Lipschitz (cho trường hợp không lồi). Lưu ý rằng, việc sử dụng điều kiện chính quy metric để thiết lập quy tắc dưới vi phân của hàm maximum là một hướng tiếp cận khá mới và chưa được đề cập trong các tài liệu trước đó.

Trong luận án, điều kiện cần và đủ cho nghiệm tối ưu địa phương của bài toán tối ưu véctơ được thiết lập thông qua phương pháp vô hướng hóa. Ta biết rằng vô hướng hóa (scalarization) là một công cụ toán học quan trọng khi nghiên cứu các bài toán tối ưu véctơ. Kỹ thuật này không chỉ có ý nghĩa về mặt thực hành, đó là giúp chúng ta giải bài toán, mà còn có ý nghĩa về mặt lý thuyết vì nó giúp chúng ta khám phá được rất nhiều tính chất của bài toán (xem [14, 30]). Cụ thể, vô hướng hóa là chuyển một bài toán tối ưu véctơ thành bài toán tối ưu thông thường (vô hướng) sao cho tập nghiệm của bài toán mới có liên hệ với tập nghiệm của bài toán tối ưu véctơ ban đầu. Thông thường, hàm mục tiêu của bài toán vô hướng được định nghĩa bằng cách lấy hàm mục tiêu của bài toán tối ưu véctơ hợp với một hàm nhận giá trị thực có tính chất bảo toàn thứ tự phù hợp (hàm vô hướng hóa), qua đó cho phép liên hệ các nghiệm của hai bài toán tối ưu này (xem [32] và các tài liệu tham khảo trong đó). Trên cơ sở này, các kết quả về tối ưu vô hướng có thể được khai thác để nghiên cứu và thiết lập các điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu véctơ. Nội dung chi tiết được trình bày trong Mục 3.2.

5. Kết quả của luận án

Các kết quả mới đã đạt được trong luận án như sau:

(i) Thiết lập điều kiện cần và đủ tối ưu cho bài toán tối ưu minimax lồi rời rạc. Cụ thể, bài toán tối ưu minimax được xét trong không gian Banach, điều kiện tối ưu được phát biểu thông qua dưới vi phân theo nghĩa giải tích lồi của các hàm thành phần và nón pháp tuyến theo nghĩa giải tích lồi của tập ràng buộc, hai loại điều kiện chính quy sử dụng là điều kiện chính quy metric và điều kiện liên tục. Như đã nhấn mạnh ở mục trên, quy tắc dưới vi phân của hàm maximum sử dụng điều kiện chính quy metric là yếu tố then chốt và quy tắc này chưa từng được thiết lập trước đây.

(ii) Thiết lập điều kiện cần và điều kiện đủ tối ưu cho bài toán tối ưu minimax không lồi rời rạc. Cụ thể, bài toán minimax được xét trong không gian Asplund, điều kiện tối ưu được phát biểu thông qua dưới vi phân Mordukhovich của các hàm thành phần và nón pháp tuyến Mordukhovich của tập ràng buộc, hai loại điều kiện chính quy sử dụng là: điều kiện chính quy metric và điều kiện liên tục Lipschitz. Trong bối cảnh bài toán không lồi, quy tắc dưới vi phân của hàm maximum sử dụng điều kiện chính quy metric vẫn là điểm then chốt và quy tắc này chưa từng được thiết lập trước đây.

(iii) Nghiên cứu cấu trúc thứ tự hai biến trong không gian véctơ. Cụ thể, sau khi đưa ra định nghĩa cấu trúc thứ tự hai biến, chúng tôi nghiên cứu các tính chất cơ bản của nó, đó là tính chất phản xạ, bắc cầu, phản xứng, tương thích với phép cộng và tương thích với phép nhân với vô hướng. Các tính chất này sau đó được áp dụng cho hai trường hợp cụ thể khi xét với cấu trúc thứ tự thay đổi thông thường, từ đó cho phép so sánh với các kết quả trong [21, 24].

(iv) Thiết lập điều kiện cần và đủ cho nghiệm địa phương của bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến thông qua hàm vô hướng hóa phi tuyến. Cụ thể, chúng tôi đưa ra một dạng mở rộng của hàm vô hướng hóa Gerstewitz, sau đó sử dụng hàm này để thu được đặc trưng cho điểm hữu hiệu của một tập hợp và nghiệm tối ưu của bài toán đang xét. Những kết quả này có thể áp dụng cho nhiều bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự thay đổi thông thường mà các phương pháp hiện có không thể áp dụng (xem các Ví dụ 3.33, 3.34).

(v) Phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu minimax lồi có tham số và bài toán tối ưu minimax không lồi có tham số. Cụ thể, đối với bài toán minimax lồi có tham số, dựa trên các khái niệm và kết quả của giải tích lồi cùng với quy tắc dưới vi phân của hàm maximum, chúng tôi thiết lập công thức tính toán dưới vi phân và dưới vi phân suy biến của hàm giá trị tối ưu thông qua nón pháp tuyến của tập ràng buộc và dưới vi phân của các hàm thành phần. Đối với bài toán minimax không lồi, chúng tôi thu được công thức đánh giá trên cho dưới vi phân Mordukhovich của hàm giá trị tối ưu. Lưu ý rằng trong cả hai trường hợp, chúng tôi đều xét cả hai loại điều kiện chính quy như đã trình bày trong phần nghiên cứu về điều kiện tối ưu.

Nội dung của luận án được viết dựa trên kết quả của 03 bài báo (CT1-3) đã được công bố trên các tạp chí SCIE Q1, Q2 xếp hạng theo Scimago. Các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại:

- Đại hội Toán học toàn quốc lần thứ X, 08-12/8/2023 tại Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng
- Hội nghị Nghiên cứu sinh Khoa Toán - Tin năm 2024, 6/11/2024 tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên
- Hội thảo Tối ưu và Tính toán khoa học lần thứ 23 và lần thứ 24, 24-26/4/2025 và 23-25/4/2026 tại Ba Vì, Hà Nội
- Seminar Bộ môn Toán ứng dụng và Tin học, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên các năm 2023-2026.

6. Bố cục của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, luận án được trình bày trong ba chương.

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Chương 2. Điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu minimax có tham số

Chương 3. Đặc trưng nghiệm cho bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số khái niệm và kết quả liên quan trong giải tích biến phân, giải tích lồi và lý thuyết tối ưu. Trong đó, các nội dung cơ bản là: quan hệ thứ tự trong không gian véctơ, các khái niệm nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu véctơ; nón pháp tuyến của một tập, dưới vi phân của hàm đơn trị, đối đạo hàm của ánh xạ đa trị và điều kiện chính quy metric. Nội dung của Chương 1 được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [24], [42], [47] và [48].

1.1 Bài toán tối ưu véctơ và các khái niệm liên quan

1.1.1 Quan hệ thứ tự trong không gian véctơ

Giả sử X là một không gian véctơ thực.

Định nghĩa 1.1 (xem [42, Định nghĩa 1.16])**.** (a) Mỗi tập con khác rỗng R của không gian tích $X \times X$ được gọi là một *quan hệ hai ngôi* trên X (ta viết xRy hoặc $x \leq y$ thay cho $(x, y) \in R$).

(b) Mỗi quan hệ hai ngôi $\leq$ trên X được gọi là một *thứ tự bộ phận* trên X nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn với $w, x, y, z \in X$ lấy tùy ý:

(i) $x \leq x$;

(ii) $x \leq y$, $y \leq z \Rightarrow x \leq z$;

(iii) $x \leq y$, $w \leq z \Rightarrow x + w \leq y + z$;

(iv) $x \leq y$, $\alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y$.

(c) Một thứ tự bộ phận $\leq$ trên X được gọi là *phản xứng*, nếu tính chất sau đúng với $x, y \in X$ lấy tùy ý:

$$x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y.$$

Trong Định nghĩa 1.1(b), điều kiện (i) thể hiện thứ tự bộ phận có tính *phản xạ* và điều kiện (ii) thể hiện tính *bắc cầu*. Các điều kiện (iii) và (iv) đảm bảo tính *tương thích* của thứ tự bộ phận với cấu trúc tuyến tính của không gian. Điều kiện (iii) tương đương với điều kiện: $x \leq y \Rightarrow (x+z) \leq (y+z)$ với mọi $x, y, z \in X$.

Định nghĩa 1.2 (xem [42, Định nghĩa 1.17])**.** Một không gian véctơ thực được trang bị một thứ tự bộ phận được gọi là một *không gian véctơ được sắp thứ tự bộ phận*.

Lưu ý rằng trong một không gian véctơ được sắp thứ tự bộ phận, hai phần tử bất kỳ không nhất thiết phải so sánh được với nhau. Ngược lại, nếu với mọi $x, y \in X$ ta luôn có $x \leq y$ hoặc $y \leq x$ thì ta nói X *được sắp thứ tự toàn phần*.

Một đặc trưng quan trọng của thứ tự bộ phận trong không gian véctơ thực được nêu ra trong mệnh đề dưới đây. Nhắc lại rằng tập $K \subset X$ được gọi là một *nón* nếu với mọi $x \in K$ và mọi $\lambda \geq 0$ ta có $\lambda x \in K$. Nón K là *nhọn* (pointed) nếu $K \cap (-K) = \{0_X\}$. Ngoài ra, tập $\operatorname{cone}\Omega = \{\lambda x \in X : \lambda \geq 0, x \in \Omega\}$ được gọi là *nón sinh bởi tập* Ω.

Mệnh đề 1.3 (xem [42, Định lý 1.18])**.** (i) *Nếu* $\leq$ *là một thứ tự bộ phận trên* X *thì tập*

$$K := \{x \in X \mid 0_X \leq x\}$$

là một nón lồi. Ngoài ra, nếu $\leq$ *có tính phản xứng thì* K *là một nón nhọn.*

(ii) *Nếu* K *là một nón lồi trong* X *thì quan hệ hai ngôi*

$$\leq^K := \{(x, y) \in X \times X \mid y - x \in K\}$$

là một thứ tự bộ phận trên X*. Ngoài ra, nếu* K *là nón nhọn thì* $\leq^K$ *có tính phản xứng.*

Nón lồi đặc trưng cho một thứ tự bộ phận trong không gian véctơ thực được gọi là một *nón thứ tự* (ordering cone).

Ví dụ 1.4. a) Trong không gian $\mathbb{R}^m$, xét quan hệ thứ tự tự nhiên

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i; \quad \forall i = 1, .., m.$$

Khi đó, ta thấy $\leq$ là một thứ tự bộ phận tương ứng với nón thứ tự

$$K = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0,\ \forall i = 1, ..., m\}.$$

b) Trong không gian

$$l_p := \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R} \text{ với mọi } i \in \mathbb{N} \text{ và } \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty \right\}, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

xét tập $K \subset l_p$ xác định bởi hợp của phần tử 0_{l_p} và các dãy mà số khác 0 đầu tiên là số dương. Khi đó K là một nón lồi nhọn và l_p là không gian được sắp thứ tự toàn phần bởi $\leq^K$. Quan hệ $\leq^K$ là thứ tự từ điển.

1.1.2 Bài toán tối ưu véctơ

Giả sử X, Y là các không gian véctơ tôpô thực. Bài toán tối ưu véctơ có dạng

$$\min_K \{f(x) : x \in S\}, \tag{1.1}$$

trong đó $\emptyset \neq S \subset X$, $f : X \to Y$ và Y được trang bị một thứ tự bộ phận đặc trưng bởi một nón lồi nhọn $K \subset Y$. Cụ thể, quan hệ thứ tự được định nghĩa như sau

$$y_1, y_2 \in Y,\ y_1 \leq^K y_2 \Leftrightarrow\ y_2 - y_1 \in K.$$

Nếu $Y = \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, thì bài toán (1.1) trở thành bài toán tối ưu đa mục tiêu. Nếu $Y = \mathbb{R}$ thì bài toán (1.1) trở thành bài toán tối ưu (một mục tiêu, hay vô hướng) thông thường. Các khái niệm về nghiệm tối ưu của bài toán (1.1) thường dùng là: nghiệm lý tưởng, nghiệm hữu hiệu và nghiệm hữu hiệu yếu. Cụ thể, điểm $\bar{x} \in S$ được gọi là một *nghiệm lý tưởng* của bài toán (1.1) nếu $f(\bar{x}) \leq^K f(x)$ với mọi $x \in S$. Nghiệm lý tưởng thường hiếm khi đạt được. Tiếp theo, điểm $\bar{x} \in S$ được gọi là một *nghiệm hữu hiệu* của bài toán (1.1) nếu $\bar{y} = f(\bar{x})$ là một điểm không trội của tập $f(S)$, tức là

$$\nexists\, y \in f(S)\backslash\{\bar{y}\} : y \leq^K \bar{y}.$$

Người ta cũng thường sử dụng khái niệm *nghiệm hữu hiệu yếu*, khi đó ta thay thế nón K bởi phần trong của K, chẳng hạn nếu sử dụng phần trong tôpô $\operatorname{int} K$ thì

ta có khái niệm: $\bar{x} \in S$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (1.1) nếu

$$\nexists\, y \in f(S)\backslash\{\bar{y}\} : y \leq^{\operatorname{int} K} \bar{y}.$$

Hiển nhiên, nếu $\bar{x}$ là một nghiệm hữu hiệu của bài toán (1.1) thì $\bar{x}$ cũng là nghiệm hữu hiệu yếu. Điều ngược lại chưa chắc đúng. Ngoài ra, nếu $\bar{x}$ là một nghiệm lý tưởng thì nó cũng là một nghiệm hữu hiệu.

Ví dụ 1.5. Cho $Y := \mathbb{R}^2$ với quan hệ thứ tự tự nhiên. Xét hàm số $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x, y)$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ và

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\, y \leq 0\} \cup \{(x, y) : x \geq 0,\, 0 \geq y \geq -1\}.$$

Khi đó bài toán $\min_{\mathbb{R}^2_+}\{f(x) : x \in S\}$ có tập nghiệm lý tưởng là tập rỗng, tập nghiệm hữu hiệu là $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\, x \leq 0, y \leq 0\}$ và tập nghiệm hữu hiệu yếu là $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1,\, x \leq 0, y \leq 0\}\cup\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y = -1\}$.

Nếu K không phải là một nón cố định mà có thể thay đổi tùy thuộc vào vị trí của điểm đang xét, ta định nghĩa ánh xạ thay thế $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$ với giá trị của $\mathcal{D}(y)$ là nón lồi khác rỗng với mọi $y \in Y$. Khi đó, ta có thể định nghĩa hai cấu trúc thứ tự khác nhau trên Y tương ứng với $\mathcal{D}$ như sau:

$$y_1 \leq_1^{\mathcal{D}} y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in \mathcal{D}(y_1),$$
$$y_1 \leq_2^{\mathcal{D}} y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in \mathcal{D}(y_2).$$

Lưu ý rằng các cấu trúc thứ tự nói trên chưa phải là quan hệ thứ tự mà cần một số điều kiện bổ sung để đảm bảo tính bắc cầu (xem [24, Bổ đề 1.10]). Ví dụ sau đây chỉ ra rằng cấu trúc thứ tự thay đổi có thể không thỏa mãn tính bắc cầu, tính phản xứng.

Ví dụ 1.6. a) Xét $Y := \mathbb{R}^2$, ánh xạ đa trị $\mathcal{D} : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ được cho bởi

$$\mathcal{D}(y) := \begin{cases} \operatorname{cone}\{(1, 1)\} & \text{nếu } y = (0, 0) \\ \mathbb{R}^2_+ & \text{nếu } y \neq (0, 0), \end{cases}$$

và các điểm $y = (0, 0), z = (1, 1), w = (2, 3)$. Khi đó $y \leq_1 z$ và $z \leq_1 w$ nhưng $y \not\leq_1 w$. Do đó, $\leq_1$ không thỏa mãn tính chất bắc cầu.

b) Xét $Y := \mathbb{R}^2$ và ánh xạ đa trị $\mathcal{D} : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{D}(y) := \begin{cases} \text{cone}\{(1,1)\} & \text{nếu } y = (0,0) \\ -\mathbb{R}^2_+ & \text{nếu } y \neq (0,0). \end{cases}$$

Khi đó, $\leq_1$ không thỏa mãn tính chất phản xứng vì $y = (0,0) \neq (1,1) = z$ trong khi $y \leq_1 z$ và $z \leq_1 y$.

Các quan hệ $\leq_1^{\mathcal{D}}$ và $\leq_2^{\mathcal{D}}$ dẫn tới các khái niệm tương ứng về điểm không trội và điểm cực tiểu, cùng với các tính chất liên quan đến các khái niệm này (xem các tài liệu [9, 10, 11, 21, 24]). Chương 3 của luận án sẽ giới thiệu hướng tiếp cận giúp thống nhất hai cấu trúc thứ tự nêu trên. Sau đây là một ứng dụng thực tế của quan hệ thứ tự thay đổi trong đăng ký ảnh y học (medical image registration).

Ví dụ 1.7 (xem [24, Mục 1.3.1])**.** Trong đăng ký ảnh y học, mục tiêu là tìm một phép biến đổi $t \in T$ sao cho hai tập dữ liệu A và B (ví dụ từ chụp CT và chụp MRI) được khớp tốt nhất, thường theo cách hoàn toàn tự động. Tùy thuộc vào bản chất của các cơ quan được chụp, phép biến đổi t có thể là biến đổi tuyến tính (như tịnh tiến và quay tọa độ khi đăng ký ảnh cấu trúc xương) hoặc biến đổi phi tuyến/đàn hồi (như co, giãn, uốn cong khi đăng ký ảnh các mô mềm có sự biến dạng như tim, gan, hoặc phổi giữa các nhịp thở). Mức độ khớp được đánh giá bằng các thước đo khoảng cách

$$f_i : (t, A, B) \to \mathbb{R}.$$

Các thước đo phổ biến dùng trong đăng ký ảnh y học là tổng bình phương sai số (sum of square differences), lượng thông tin tương hỗ (mutual information) hoặc tương quan chéo (cross-correlation). Do các thước đo khác nhau phản ánh những đặc tính khác nhau và có thể dẫn đến các nghiệm tối ưu không mong muốn, việc kết hợp nhiều thước đo là cần thiết. Nhằm tăng cường tính linh hoạt so với cách gán trọng số cố định truyền thống, Wacker đề xuất một cách tiếp cận đa mục tiêu cho bài toán này bằng cách gom các thước đo khoảng cách vào một véctơ mục tiêu duy nhất $f := (f_1, \ldots, f_m)^\top$. Khi đó, với các tập dữ liệu A và B cho trước, ta cần giải bài toán tối ưu véctơ

$$\min_{t \in T} f(t, A, B).$$

Tuy nhiên, thứ tự Pareto cổ điển không còn phù hợp trong trường hợp này. Thật vậy, một phép biến đổi t làm nhỏ giá trị của một hàm mục tiêu f_i trong khi tất cả các hàm mục tiêu còn lại có giá trị tương đối lớn vẫn được xem là nghiệm tối ưu, nhưng như vậy t không phải là một nghiệm mong muốn. Do đó, để định nghĩa tính tối ưu, một cấu trúc thứ tự thay đổi được đưa vào nhằm khai thác nhiều thông tin hơn trong quá trình ra quyết định. Với mỗi điểm $y \in \mathbb{R}^m$ trong không gian mục tiêu, ta sử dụng một véctơ trọng số

$$w = w(y) \in \mathbb{R}^m_+.$$

Véctơ trọng số này phụ thuộc vào thông tin gradient, đồng thời phản ánh quan điểm của người ra quyết định khi gán trọng số lớn hơn cho các thước đo hoạt động hiệu quả tại giá trị $f(t, A, B)$ của phép biến đổi hiện tại t. Cách tiếp cận này có thể được hiểu như một dạng bỏ phiếu giữa các thước đo. Ta có thể sử dụng trọng số bằng 0 khi muốn loại bỏ một thước đo trong trường hợp thước đo đó không phù hợp. Một véctơ trọng số tại điểm $\bar{y}$ xác định một nón các hướng bị trội (dominated direction) như sau:

$$\mathcal{D}^w := \mathcal{D}(w(\bar{y})) := \left\{ d \in \mathbb{R}^m \ : \ \sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn}(d_i)\, w_i(\bar{y}) \geq 0 \right\},$$

trong đó

$$\operatorname{sgn}(d_i) := \begin{cases} 1 & \text{nếu } d_i > 0 \\ 0 & \text{nếu } d_i = 0 \\ -1 & \text{nếu } d_i < 0. \end{cases}$$

Để minh họa cấu trúc thứ tự thay đổi, ta xét $\mathcal{D}^w \subset \mathbb{R}^2$ với mỗi véctơ trọng số $w \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ cụ thể như sau:

$$\mathcal{D}^w := \begin{cases} \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 \geq 0,\ d_2 \in \mathbb{R}\} & \text{nếu } w_1 > 0,\ w_2 = 0 \\ \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 \in \mathbb{R},\ d_2 \geq 0\} & \text{nếu } w_1 = 0,\ w_2 > 0 \\ \mathbb{R}^2_+ \cup \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 < 0 \text{ và } d_2 > 0\} & \text{nếu } w_2 \geq w_1 > 0 \\ \mathbb{R}^2_+ \cup \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 > 0 \text{ và } d_2 < 0\} & \text{nếu } w_1 \geq w_2 > 0. \end{cases}$$

Lưu ý rằng với các trọng số không âm $w \in \mathbb{R}^m_+$, luôn tồn tại bao hàm thức $\mathbb{R}^m_+ \subset \mathcal{D}^w$. Từ đó, cấu trúc thứ tự thay đổi giúp loại bỏ các nghiệm Pareto không mong muốn bằng cách đưa thêm thông tin ưu tiên thể hiện qua véctơ trọng số theo vị trí.

1.2 Bài toán tối ưu minimax

Bài toán tối ưu minimax xem xét đồng thời quá trình cực tiểu hóa và cực đại hóa hàm mục tiêu. Đây là một lớp bài toán xuất hiện phổ biến cả trong nghiên cứu lý thuyết lẫn trong nhiều ứng dụng thực tiễn. Trong mục này, trước hết chúng tôi trình bày một số ví dụ minh họa cho các ứng dụng của bài toán minimax, sau đó giới thiệu bài toán minimax được nghiên cứu trong luận án.

1.2.1 Ví dụ về bài toán tối ưu minimax

Như đã trình bày trong phần Mở đầu, bài toán tối ưu minimax có thể được chia thành hai loại: bài toán minimax rời rạc và bài toán minimax liên tục. Sau đây ta xét một ví dụ điển hình về bài toán minimax rời rạc (tham khảo [20, tr. 1]) và một ví dụ về bài toán minimax liên tục (tham khảo [29, tr. 3]).

Ví dụ 1.8 (Đa thức xấp xỉ tốt nhất theo nghĩa Chebyshev)**.** Cho bảng giá trị thực nghiệm gồm $N+1$ điểm (t_k, y_k) với $k = 0, 1, \ldots, N$. Ta cần tìm một đa thức đại số $P_n(A, t)$ có bậc không quá n (ở đây $n \leq N$):

$$P_n(A, t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n,$$

trong đó $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ là véctơ hệ số nằm trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$.

Mục tiêu của bài toán là tìm véctơ hệ số tối ưu $A^* = (a_0^*, a_1^*, \ldots, a_n^*)$ sao cho sai số tuyệt đối lớn nhất tại tất cả các điểm nút là nhỏ nhất có thể. Bài toán được phát biểu dưới dạng:

$$\min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}} \max_{k \in \{0,\ldots,N\}} |y_k - P_n(A, t_k)|.$$

Đây là một bài toán tối ưu hóa minimax điển hình, được ứng dụng rộng rãi trong thống kê, xử lý tín hiệu số và lý thuyết điều khiển. Đa thức $P_n(A^*, t)$ nhận được từ quá trình này được gọi là đa thức xấp xỉ tốt nhất theo nghĩa Chebyshev cho tập dữ liệu đã cho.

Phần tiếp theo trình bày một ví dụ về bài toán minimax liên tục trong trí tuệ nhân tạo, cụ thể là trong Mạng đối sinh (Generative Adversarial Networks – GAN). Mạng này có khả năng tạo ra dữ liệu tổng hợp có tính chân thực cao, đến mức khó có thể phân biệt được với dữ liệu thật.

Ví dụ 1.9 (Bài toán minimax trong trí tuệ nhân tạo)**.** Mạng đối sinh (GAN) được cấu thành từ hai mạng nơ-ron "đối kháng" nhau: bộ sinh (generator) cố gắng sinh dữ liệu giống thật nhất có thể, còn bộ phân biệt (discriminator) thì học cách phân biệt dữ liệu thật với dữ liệu giả/tổng hợp do bộ sinh tạo ra.

Bộ phân biệt được thiết kế như một bộ phân loại nhị phân. Khi nhận các mẫu trộn lẫn giữa dữ liệu thật và dữ liệu tổng hợp, nó phân loại mỗi mẫu là thật (nhãn 1) hay giả/tổng hợp (nhãn 0). Trong khi đó, bộ sinh được huấn luyện để bắt chước phân phối xác suất của tập dữ liệu thật thông qua các vòng lặp.

Để học được phân phối xác suất của dữ liệu thực tế x, đầu tiên ta thiết lập một phân phối tiên nghiệm trên các biến nhiễu đầu vào, ký hiệu là $p_z(z)$. Sau đó, ta xây dựng một ánh xạ từ không gian nhiễu này sang không gian dữ liệu thực thông qua hàm số khả vi $G(z)$, được mô hình hóa bởi mạng nơ-ron thứ nhất (bộ sinh). Song song với đó, một mạng nơ-ron thứ hai (bộ phân biệt), ký hiệu là $D(x)$, được xây dựng để cho ra một giá trị vô hướng. Giá trị $D(x)$ này biểu diễn xác suất một mẫu x bất kỳ đến từ phân phối dữ liệu thật p_{data} chứ không phải dữ liệu giả đến từ bộ sinh.

Trong quá trình huấn luyện, bộ phân biệt D được điều chỉnh nhằm tối đa hóa xác suất gán nhãn chính xác cho cả mẫu thật lẫn mẫu giả. Trong khi đó, bộ sinh G được huấn luyện để tối thiểu hóa xác suất bị phát hiện, tức là cực tiểu hóa giá trị $\log(1 - D(G(z)))$. Sự tương tác đối kháng này dẫn đến bài toán tối ưu minimax:

$$\min_G \max_D V(D, G) = \mathbb{E}_{x \sim p_{\text{data}}(x)}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z \sim p_z(z)}[\log(1 - D(G(z)))],$$

trong đó: $\mathbb{E}_{x \sim p_{\text{data}}(x)}[\log D(x)]$ là giá trị kỳ vọng khi bộ phân biệt D đánh giá trên các mẫu dữ liệu thực tế x, và $\mathbb{E}_{z \sim p_z(z)}[\log(1 - D(G(z)))]$ là giá trị kỳ vọng khi bộ phân biệt D đánh giá trên các mẫu dữ liệu giả $G(z)$ được tạo ra từ vectơ nhiễu ngẫu nhiên z.

1.2.2 Phát biểu bài toán minimax rời rạc có tham số

Giả sử X và Y là hai không gian Banach và m là một số nguyên dương cho trước. Xét bài toán tối ưu minimax rời rạc có tham số

$$\min_{y\in G(x)} \max_{k\in J} \varphi_k(x,y), \tag{P_x}$$

trong đó x là tham số, $G\colon X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị, $J := \{1,\dots,m\}$, các hàm $\varphi_k\colon X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $k\in J$. Trong các phần tiếp theo, ta ký hiệu hàm maximum $\varphi(x,y) := \max_{k\in J}\varphi_k(x,y)$ với mọi $(x,y)\in X\times Y$. Khi đó, hàm giá trị tối ưu $\mu\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ của bài toán (P_x) là

$$\mu(x) = \inf_{y\in G(x)} \varphi(x,y), \tag{1.2}$$

với quy ước $\mu(x)$ bằng $+\infty$ nếu $x\notin \operatorname{dom} G$. Ta định nghĩa ánh xạ nghiệm $M\colon \operatorname{dom} G \rightrightarrows Y$ của (P_x) là $M(x) := \{y\in G(x) \,:\, \mu(x) = \varphi(x,y)\}$.

Định nghĩa 1.10. Với mỗi tham số $\bar{x}$ cho trước, điểm $\bar{y}\in G(\bar{x})$ được gọi là một *nghiệm tối ưu địa phương* của bài toán $(P_{\bar{x}})$ nếu tồn tại một lân cận U của $\bar{y}$ sao cho

$$\varphi(\bar{x},\bar{y}) \le \varphi(\bar{x},y) \quad \forall y\in U\cap G(\bar{x}). \tag{1.3}$$

Nếu bất đẳng thức trong (1.3) đúng với mọi $y\in G(\bar{x})$ thì $\bar{y}$ được gọi là một *nghiệm tối ưu toàn cục* (hoặc *nghiệm tối ưu*) của bài toán $(P_{\bar{x}})$. Khi đó $\bar{y}\in M(\bar{x})$.

Bài toán tối ưu minimax và bài toán tối ưu véctơ (cụ thể là bài toán tối ưu đa mục tiêu) có mối liên hệ chặt chẽ với nhau. Thật vậy, nghiệm Pareto yếu của bài toán tối ưu đa mục tiêu tham số được đặc trưng thông qua nghiệm tối ưu của một bài toán minimax tương ứng, trong đó hàm mục tiêu được điều chỉnh thích hợp. Mối tương quan này chính là nền tảng để chúng tôi thiết lập các hệ quả về điều kiện tối ưu cho bài toán đa mục tiêu ở phần cuối Mục 2.3.1 của Chương 2.

1.3 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ khác

Giả sử X, Y là các không gian Banach với các không gian đối ngẫu tôpô lần lượt là X^* và Y^*. Các ký hiệu $\mathbb{B}(x,r)$ là hình cầu mở tâm tại x với bán kính $r>0$, $\overline{\mathbb{B}}_{X^*}$ là hình cầu đóng đơn vị trong X^*. Ký hiệu $x_k^*\to x^*$ là hội tụ theo chuẩn đến x^*

của dãy $\{x_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$ với $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$, và $x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$ là sự hội tụ đến x^* của $\{x_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$ theo tôpô yếu* của X^*.

1.3.1 Nón pháp tuyến

Nhắc lại rằng đối với ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows X^*$, giới hạn

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to\bar{x}} F(x) := \Big\{x^* \in X^* : \exists x_k \to \bar{x},\ \ x_k^* \xrightarrow{w^*} x^* \text{ với } x_k^* \in F(x_k), \forall k \in \mathbb{N}\Big\}$$

được gọi là *giới hạn trên Painlevé-Kuratowski theo dãy* của F khi $x \to \bar{x}$ theo tôpô chuẩn của X và tôpô yếu* của X^*.

Với $\Omega \subset X$ là một tập cho trước, ký hiệu $x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$ có nghĩa là $x \to \bar{x}$ và $x \in \Omega$.

Định nghĩa 1.11 (xem [47, Định nghĩa 1.1])**.** Cho Ω là một tập con khác rỗng của X.

(i) Với $x \in \Omega$ và $\varepsilon \geq 0$, tập các *ε-pháp tuyến* của Ω tại x được định nghĩa là

$$\widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega) := \Big\{x^* \in X^* : \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} x} \frac{\langle x^*, u - x\rangle}{\|u - x\|} \leq \varepsilon\Big\}.$$

Tập $\widehat{N}(x;\Omega) := \widehat{N}_0(x;\Omega)$ được gọi là *nón pháp tuyến Fréchet* hay *nón pháp tuyến chính quy* của Ω tại x. Nếu $x \notin \Omega$ thì ta đặt $\widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega) = \emptyset$ với mọi $\varepsilon \geq 0$.

(ii) Giả sử $\bar{x} \in \Omega$. Tập

$$N_L(\bar{x};\Omega) := \operatorname*{Lim\,sup}_{x\to\bar{x},\varepsilon\downarrow 0} \widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega)$$

được gọi là *nón pháp tuyến Mordukhovich* hay *nón pháp tuyến qua giới hạn* của Ω tại $\bar{x}$. Ta đặt $N_L(\bar{x};\Omega) = \emptyset$ nếu $\bar{x} \notin \Omega$.

Rõ ràng $\widehat{N}(x;\Omega) \subset N_L(x;\Omega)$ với mọi $\Omega \subset X$ và $x \in \Omega$. Nếu Ω là tập lồi thì ta có khái niệm nón pháp tuyến theo nghĩa giải tích lồi.

Định nghĩa 1.12 (xem [48, Định nghĩa 3.1])**.** Cho Ω là một tập con lồi khác rỗng của X và $\bar{x} \in \Omega$. *Nón pháp tuyến* của Ω tại $\bar{x}$ được cho bởi

$$N(\bar{x};\Omega) := \{x^* \in X^* :\ \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \leq 0,\ \forall x \in \Omega\}.$$

Nếu $\bar{x} \notin \Omega$ thì ta quy ước $N(\bar{x};\Omega) := \emptyset$.

Ví dụ sau đây minh họa về nón pháp tuyến của tập lồi.

Ví dụ 1.13. Xét $X := \mathbb{R}^2$, tập $\Omega = [-2, 2] \times [0, +\infty)$ và điểm $\bar{x} = (2, 0) \in \Omega$. Khi đó $N(\bar{x}; \Omega) = \{v \in \mathbb{R}^2 : \langle v, x - \bar{x} \rangle \leq 0,\ \forall x \in \Omega\} = [0, +\infty) \times (-\infty, 0]$.

Ta có mối liên hệ sau đây giữa nón pháp tuyến qua giới hạn, nón pháp tuyến Fréchet và nón pháp tuyến theo nghĩa giải tích lồi.

Mệnh đề 1.14 (xem [47, Mệnh đề 1.5])**.** *Cho $\Omega \subset X$ và $\bar{x} \in \Omega$. Nếu tồn tại một lân cận U của $\bar{x}$ sao cho $\Omega \cap U$ là lồi thì tập $N_L(\bar{x}; \Omega)$ trùng với tập $\widehat{N}(\bar{x}; \Omega)$ và trùng với nón pháp tuyến theo nghĩa giải tích lồi, tức là*

$$N_L(\bar{x}; \Omega) = \widehat{N}(\bar{x}; \Omega) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x - \bar{x} \rangle \leq 0,\ \ \forall x \in \Omega \cap U\}.$$

Nhận xét 1.15. Từ Mệnh đề 1.14 suy ra trong trường hợp Ω là tập lồi ta có

$$N_L(\bar{x}; \Omega) = \widehat{N}(\bar{x}; \Omega) = N(\bar{x}; \Omega) \quad \text{với mọi } \bar{x} \in \Omega.$$

Không gian Asplund là một yếu tố quan trọng của lý thuyết giải tích biến phân. Đây là lớp không gian Banach mà trong đó các cấu trúc vi phân tổng quát được thiết lập và hoạt động hiệu quả, với các tính chất tương tự như các kết quả đã có trong không gian hữu hạn chiều. Dưới đây, nếu không có phát biểu khác thì các không gian được xét đều là không gian Asplund.

Định nghĩa 1.16 (xem [47, Định nghĩa 2.17])**.** Không gian Banach X được gọi là *không gian Asplund* nếu mọi hàm lồi, liên tục $f : V \to \mathbb{R}$ xác định trên một tập con lồi mở V của X là khả vi Fréchet trên một tập con trù mật của V.

Một tiêu chuẩn tương đương của không gian Asplund là: X là không gian Asplund khi và chỉ khi mỗi không gian con đóng khả ly của X đều có không gian đối ngẫu khả ly (xem [47, tr. 196]). Ta có thể liệt kê một số không gian Asplund như sau.

Nhận xét 1.17 (xem [54])**.** (i) Mọi không gian Banach phản xạ đều là không gian Asplund. Nói riêng, mọi không gian Euclide hữu hạn chiều và mọi không gian Hilbert đều là không gian Asplund.

(ii) Mọi không gian Banach có hàm chuẩn khả vi Fréchet tại những điểm khác 0 đều là không gian Asplund.

Giả thiết không gian Asplund là không thể bỏ được để đảm bảo cho tính đúng đắn của biểu diễn nón pháp tuyến Mordukhovich trong Mệnh đề 1.18 sau đây. Biểu diễn này cũng được coi là một đặc trưng của không gian Asplund. Kết quả được phát biểu trong [47, Định lý 1.6] cho không gian hữu hạn chiều và trong [47, Định lý 2.35] cho không gian Asplund tổng quát, trong đó điều kiện "Ω là một tập đóng" có thể thay bởi điều kiện "Ω là một tập đóng địa phương xung quanh $\bar{x} \in \Omega$", tức là tồn tại một lân cận U của $\bar{x}$ sao cho $\Omega \cap U$ là tập đóng.

Mệnh đề 1.18 (xem [47, Định lý 2.35])**.** *Cho X là một không gian Banach. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) *X là một không gian Asplund.*

(ii) *Với mọi tập đóng $\Omega \subset X$ và mọi $\bar{x} \in \Omega$, ta có biểu diễn*

$$N_L(\bar{x}; \Omega) = \operatorname*{Limsup}_{x \to \bar{x}} \widehat{N}(x; \Omega).$$

Áp dụng Mệnh đề 1.18 ta có thể tính toán nón pháp tuyến Mordukhovich như trong ví dụ sau đây.

Ví dụ 1.19. Xét $X := \mathbb{R}^2$, tập

$$\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \geq -x_1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0, x_2 \geq 0\}$$

và $\bar{x} = (0, 0) \in \Omega$. Khi đó, với $(x_1, x_2) \in \Omega$ ta có

$$\widehat{N}((x_1, x_2); \Omega) = \begin{cases} \{(a, a) \,:\, a \leq 0\} & \text{nếu } x_2 = -x_1, x_1 > 0, \\ \{(0, a) \,:\, a \leq 0\} & \text{nếu } x_2 = 0, x_1 < 0, \\ \{(0, 0)\} & \text{nếu } (x_1, x_2) \in \operatorname{int} \Omega \text{ hoặc } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} N_L(\bar{x}; \Omega) &= \operatorname*{Lim\,sup}_{(x_1, x_2) \to (0,0)} \widehat{N}((x_1, x_2); \Omega) \\ &= \{(u_1, u_2) \in -\mathbb{R}^2_+ \,:\, u_1 = 0\} \cup \{(u_1, u_2) \in -\mathbb{R}^2_+ \,:\, u_1 = u_2\}. \end{aligned}$$

Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Miền hữu hiệu* và *trên đồ thị* của f lần lượt là các tập

$$\operatorname{dom} f := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$$
$$\operatorname{epi} f := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : \alpha \geq f(x)\}.$$

Ta nói rằng f là *chính thường* nếu $f(x) > -\infty$ với mọi x và $\operatorname{dom} f$ khác rỗng, f là *lồi* nếu $\operatorname{epi} f$ là tập lồi. Nếu $\operatorname{epi} f$ là một tập con đóng của $X \times \mathbb{R}$ thì f được gọi là *đóng*. Hàm f được gọi là *nửa liên tục dưới* (lower semicontinuous - *l.s.c.*) tại $\bar{x} \in X$ nếu với mọi số thực $r < f(\bar{x})$ tồn tại V thuộc tập $\mathcal{N}(\bar{x})$ các lân cận của $\bar{x}$ sao cho $r < f(v)$ với mọi $v \in V$. Ta nói rằng f là l.s.c. quanh $\bar{x}$ nếu nó là l.s.c. tại mọi điểm trong một lân cận nào đó của $\bar{x}$. Nếu f là l.s.c. tại mọi $x \in X$ thì f được gọi là l.s.c. trên X. Ta thấy rằng f luôn thỏa mãn tính chất nửa liên tục dưới tại $\bar{x}$ khi $f(\bar{x}) = -\infty$; khi $f(\bar{x}) = +\infty$ tính nửa liên tục dưới của f có nghĩa là f nhận giá trị lớn tùy ý trong một lân cận nào đó của $\bar{x}$. Tính chất *nửa liên tục trên* (*u.s.c.*) của hàm f được định nghĩa một cách đối xứng thông qua tính nửa liên tục dưới của hàm $-f$.

1.3.2 Dưới vi phân

Dựa trên khái niệm nón pháp tuyến qua giới hạn, ta định nghĩa dưới vi phân qua giới hạn của hàm số như sau. Khái niệm này đóng vai trò quan trọng trong việc mô tả các tính chất địa phương của hàm không trơn và là công cụ cơ bản để thiết lập các điều kiện tối ưu cho các bài toán tối ưu không trơn.

Định nghĩa 1.20 (xem [47, Định nghĩa 1.77])**.** Giả sử hàm $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ nhận giá trị trên tập số thực suy rộng và $\bar{x} \in X$. Giả thiết $f(\bar{x})$ là hữu hạn.

(i) Tập $\partial_L f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* : (x^*, -1) \in N_L((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f)\}$ được gọi là *dưới vi phân Mordukhovich* hay *dưới vi phân qua giới hạn* của f tại $\bar{x}$.

(ii) Tập $\partial_L^\infty f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* : (x^*, 0) \in N_L((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f)\}$ được gọi là *dưới vi phân suy biến Mordukhovich* của f tại $\bar{x}$.

Ta đặt $\partial_L f(\bar{x}) = \emptyset$ và $\partial_L^\infty f(\bar{x}) = \emptyset$ nếu $\bar{x} \notin \operatorname{dom} f$.

Nhận xét 1.21. Giả sử X là không gian Banach. Nếu $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm *liên tục Lipschitz xung quanh* $\bar{x}$ (hay *Lipschitzian địa phương*), tức là tồn tại một lân cận U của $\bar{x}$ và một hằng số $\ell \geq 0$ sao cho $\|f(x) - f(u)\| \leq \ell\|x - u\|$ với mọi

$x, u \in U$, thì $\partial_L f(\bar{x}) \neq \emptyset$ khi và chỉ khi X là không gian Asplund (xem [47, Hệ quả 2.25]). Ngoài ra, khi đó ta cũng có $\partial^\infty f_L(\bar{x}) = \{0\}$ và $\|x^*\| \leq \ell$ với mọi $x^* \in \partial f_L(\bar{x})$ (xem [47, Hệ quả 1.81]). Hơn nữa, nếu f là hàm *khả vi chặt* tại $\bar{x}$, tức là f có đạo hàm Fréchet $\nabla f(\bar{x})$ tại $\bar{x}$ và $\lim\limits_{\substack{x\to\bar{x}\\u\to\bar{x}}} \dfrac{f(x) - f(u) - \nabla f(\bar{x})(x-u)}{||x-u||} = 0$, thì $\partial_L f(\bar{x}) = \{\nabla f(\bar{x})\}$ (xem [47, Hệ quả 1.82]).

Nếu f là hàm lồi thì ta có các khái niệm tương ứng về dưới vi phân và dưới vi phân suy biến theo nghĩa giải tích lồi.

Định nghĩa 1.22 (xem [48, Định nghĩa 3.28 và 3.31])**.** Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ làm một hàm lồi chính thường và $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. *Dưới vi phân* của f tại $\bar{x}$ là tập

$$\partial f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \leq f(x) - f(\bar{x}),\ \forall x \in X\},$$

và *dưới vi phân suy biến* của f tại $\bar{x}$ là tập

$$\partial^\infty f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* :\ (x^*, 0) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f)\}.$$

Ta quy ước $\partial f(\bar{x}) = \emptyset$ và $\partial^\infty f(\bar{x}) = \emptyset$ nếu $\bar{x} \notin \operatorname{dom} f$.

Từ định nghĩa ta suy ra tập dưới vi phân $\partial f(\bar{x})$ là một tập lồi và đóng trong tôpô yếu* của X^* (xem [48, tr. 202]). Mệnh đề sau đây chỉ ra rằng dưới vi phân $\partial f(\bar{x})$ có thể định nghĩa một cách hình học thông qua nón pháp tuyến đến tập trên đồ thị của f tại $(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

Mệnh đề 1.23 (xem [48, Mệnh đề 3.30])**.** *Đối với hàm lồi chính thường bất kỳ $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ và với $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ bất kỳ, ta có biểu diễn*

$$\partial f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* :\ (x^*, -1) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f)\}.$$

Nhận xét 1.24. Nếu f là hàm lồi thì dưới vi phân Mordukhovich và dưới vi phân theo nghĩa giải tích lồi trùng nhau (xem [53, Mệnh đề 6.17(b)]), tức là khi đó $\partial_L f(\bar{x}) = \partial f(\bar{x})$ và $\partial_L^\infty f(\bar{x}) = \partial^\infty f(\bar{x})$ với mọi $\bar{x} \in X$.

Sau đây trình bày một số minh họa đơn giản cho cách tính toán dưới vi phân và dưới vi phân suy biến, trong đó một ví dụ cho trường hợp lồi và một ví dụ cho trường hợp không lồi.

Ví dụ 1.25. Xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ với $f(x) = 0$ nếu $|x| \leq 2$ và $f(x) = +\infty$ nếu ngược lại. Ta có $\operatorname{epi} f = [-2, 2] \times [0, +\infty)$ là tập lồi nên f là hàm lồi. Xét điểm $\bar{x} = 2$, ta có $N_L((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f) = N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f) = [0, +\infty) \times (-\infty, 0]$. Suy ra $\partial_L f(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) = [0, +\infty)$ và $\partial_L^\infty f(\bar{x}) = \partial^\infty f(\bar{x}) = [0, +\infty)$.

Ví dụ 1.26. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = -x$ nếu $x > 0$ và $f(x) = 0$ nếu $x \leq 0$. Khi đó hàm f không lồi và ta có $\operatorname{epi} f = \Omega$ như trong Ví dụ 1.19. Xét tại $\bar{x} = 0$, ta có

$$N_L((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f) = \{(u_1, u_2) \in -\mathbb{R}^2_+ \,:\, u_1 = 0\} \cup \{(u_1, u_2) \in -\mathbb{R}^2_+ \,:\, u_1 = u_2\}.$$

Vì vậy, $\partial_L f(\bar{x}) = \{-1; 0\}$ và $\partial_L^\infty f(\bar{x}) = \{0\}$.

Điều kiện để tập dưới vi phân của hàm lồi f tại điểm $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ khác rỗng được chỉ ra trong [48, Định lý 3.39] như sau.

Mệnh đề 1.27. *Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm lồi.*

(i) *Nếu X là không gian véctơ tôpô và f liên tục tại một điểm nào đó thuộc miền hữu hiệu của nó thì $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$ với mọi $\bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$.*

(ii) *Nếu $X = \mathbb{R}^n$ thì $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$ với mọi $\bar{x} \in \operatorname{ri}(\operatorname{dom} f)$.*

Thêm vào đó, nếu hàm f khả vi tại $\bar{x}$ thì ta có kết quả sau.

Mệnh đề 1.28 (xem [61, Định lý 2.4.4])**.** *Giả sử $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi chính thường và $\bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. Khi đó, nếu f khả vi tại $\bar{x}$ thì ta có $\partial f(\bar{x}) = \{\nabla f(\bar{x})\}$.*

Đặc biệt, nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm lồi thì f khả vi tại $\bar{x}$ khi và chỉ khi $\partial f(\bar{x})$ gồm một phần tử duy nhất và $\partial f(\bar{x}) = \{f'(\bar{x})\}$ (xem [48, Hệ quả 3.45]).

Nếu X là không gian định chuẩn, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi và $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ thì tính liên tục của f tại $\bar{x}$ tương đương với tính liên tục Lipschitz của f xung quanh $\bar{x}$ (xem [48, Định lý 3.33]). Do đó, ta có kết quả sau.

Mệnh đề 1.29 (xem [48, Định lý 3.34(a)])**.** *Giả sử $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi và f liên tục tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Khi đó $\partial^\infty f(\bar{x}) = \{0\}$.*

Trong trường hợp hữu hạn chiều thì ta có khẳng định ngược lại. Tức là khi đó, dưới vi phân suy biến trở thành một công cụ hữu ích để đặc trưng tính liên tục Lipschitz của hàm lồi.

Mệnh đề 1.30 (xem [48, Hệ quả 3.38]). *Giả sử $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi chính thường và $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Khi đó, tính liên tục của f tại $\bar{x}$ tương đương với tính liên tục Lipschitz của f xung quanh $\bar{x}$ hoặc điều kiện $\bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. Điều kiện cần và đủ để điều này xảy ra là $\partial^\infty f(\bar{x}) = \{0\}$.*

Ta có mối liên hệ giữa dưới vi phân suy biến của hàm lồi và nón pháp tuyến như sau.

Mệnh đề 1.31 (xem [4, Mệnh đề 4.2]). *Giả sử $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi và điểm $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Khi đó $\partial^\infty f(\bar{x}) = N(\bar{x}; \operatorname{dom} f)$.*

Xét *hàm chỉ* $\delta_\Omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$ xác định bởi $\delta_\Omega(x) = 0$ nếu $x \in \Omega$ và $\delta_\Omega(x) = +\infty$ nếu ngược lại. Ta có mối liên hệ giữa nón pháp tuyến Mordukhovich và dưới vi phân Mordukhovich của hàm chỉ như sau (xem [47, Mệnh đề 1.79]:

$$N_L(\bar{x}; \Omega) = \partial_L \delta_\Omega(\bar{x}) = \partial_L^\infty \delta_\Omega(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \Omega.$$

Nếu Ω là tập lồi thì δ_Ω là hàm lồi và khi đó ta có mối liên hệ

$$N(\bar{x}; \Omega) = \partial \delta_\Omega(\bar{x}) = \partial^\infty \delta_\Omega(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \Omega.$$

Tập con Ω của không gian Banach X được gọi là *compact pháp tuyến theo dãy* (sequentially normally compact - SNC) tại $\bar{x}$ nếu với mọi dãy $\varepsilon_k \downarrow 0,\ x_k \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$ và $x_k^* \in \widehat{N}_{\varepsilon_k}(x_k; \Omega)$ ta có

$$\left[x_k^* \xrightarrow{w^*} 0\right] \Rightarrow \left[\|x_k^*\| \to 0\right] \text{ khi } k \to \infty.$$

Ở đây, ε_k có thể được bỏ qua khi Ω đóng địa phương xung quanh $\bar{x}$. Tính chất này luôn được thỏa mãn trong không gian hữu hạn chiều. Hàm số $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ được gọi là *epi compact pháp tuyến theo dãy* (sequentially normally epi compact-SNEC) tại $\bar{x}$ nếu tập trên đồ thị của nó là SNC tại $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Một trong những khác biệt cơ bản giữa giải tích biến phân trong không gian hữu hạn chiều và giải tích biến phân trong không gian vô hạn chiều là sự cần thiết phải đặt ra các yêu cầu về tính compact pháp tuyến theo dãy.

Kết quả sau đây cho ta quy tắc để tính dưới vi phân qua giới hạn của tổng hữu hạn các hàm, dựa trên giả thiết SNEC và một số giả thiết khác.

Mệnh đề 1.32 (xem [47, Định lý 3.36]). *Cho $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}, i = 1, 2, ..., n$, với $n \geq 2$, là nửa liên tục dưới xung quanh $\bar{x} \in X$ và tất cả các hàm này, có thể ngoại trừ một hàm, là SNEC tại $\bar{x}$. Giả sử*

$$[x_1^* + ... + x_n^* = 0,\ x_i^* \in \partial_L^\infty f(\bar{x})] \Rightarrow x_i^* = 0,\ i = 1, ..., n. \tag{1.4}$$

Khi đó, ta có

$$\partial_L(f_1 + ... + f_n)(\bar{x}) \subset \partial_L f_1(\bar{x}) + ... + \partial_L f_n(\bar{x}),$$

$$\partial_L^\infty(f_1 + ... + f_n)(\bar{x}) \subset \partial_L^\infty f_1(\bar{x}) + ... + \partial_L^\infty f_n(\bar{x}).$$

Chú ý rằng khi tất cả các hàm $f_i, i = 1, ..., n$, có thể ngoại trừ một hàm, là liên tục Lipschitz quanh $\bar{x}$ thì điều kiện chuẩn hóa (1.4) và giả thiết SNEC luôn được thỏa mãn (xem [47, tr. 297]).

Để nghiên cứu điều kiện tối ưu của bài toán minimax có ràng buộc, chúng tôi chuyển bài toán này về một bài toán minimax không ràng buộc bằng cách bổ sung hàm chỉ của tập ràng buộc vào hàm mục tiêu ban đầu. Do đó, quy tắc dưới vi phân của tổng các hàm lồi sẽ được sử dụng để thiết lập các kết quả. Với điều kiện liên tục, quy tắc này được phát biểu cụ thể như sau.

Mệnh đề 1.33 (xem [48, Định lý 3.48]). *Giả sử $f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ và $f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là các hàm lồi chính thường trên không gian véctơ tôpô X. Khi đó,*

$$\partial(f_1 + f_2)(\bar{x}) \supset \partial f_1(\bar{x}) + \partial f_2(\bar{x}) \quad \text{với mọi } \bar{x} \in \operatorname{dom} f_1 \cap dom f_2.$$

Hơn nữa, nếu một trong hai hàm f_1, f_2 liên tục tại một điểm $\bar{u} \in dom f_1 \cap dom f_2$ nào đó thì ta có đẳng thức

$$\partial(f_1 + f_2)(\bar{x}) = \partial f_1(\bar{x}) + \partial f_2(\bar{x}) \quad \text{với mọi } \bar{x} \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2.$$

Bây giờ, xét hàm maximum $f(x) := \max\{f_i(x) : i = 1, \ldots, m\}$ xác định trên không gian Asplund X, trong đó tất cả các hàm $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Ký hiệu tập các chỉ số hoạt tại $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{dom} f_i$ là $I(\bar{x}) := \{i = 1, \ldots, m : f_i(\bar{x}) = f(\bar{x})\}$. Công thức đánh giá cho dưới vi phân Mordukhovich của hàm maximum sử dụng điều kiện liên tục Lipschitz được trình bày trong [47, Định lý 3.46].

Mệnh đề 1.34. *Giả sử tất cả các hàm $f_i, i = 1, ..., m$, là liên tục Lipschitz xung quanh $\bar{x}$. Khi đó ta có $\partial_L f(\bar{x}) \subset \text{conv}\left(\bigcup_{i\in I(\bar{x})} \partial_L f_i(\bar{x})\right)$.*

Với điều kiện về tính liên tục của các hàm f_i, ta thu được quy tắc dưới vi phân của hàm maximum trong trường hợp lồi. Kết quả này đã được chứng minh trong [53, Mệnh đề 3.38] khi X là không gian định chuẩn và trong [48, Định lý 3.59] khi X là không gian véctơ tôpô. Lưu ý rằng tính chất lồi của hàm maximum khi tất cả các hàm thành phần là lồi được đảm bảo theo [48, Mệnh đề 2.124].

Mệnh đề 1.35 (xem [48, Định lý 3.59])**.** *Xét hàm maximum*

$$f(x) := \max\{f_i(x) \,:\, i = 1, \ldots, m\}, \quad x \in X,$$

trong đó tất cả các hàm $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}, i = 1, ..., m$, là lồi. Nếu tất cả các hàm f_i liên tục tại $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^m \text{dom}\, f_i$ thì ta có $\partial f(\bar{x}) = \text{conv}\left(\bigcup_{i\in I(\bar{x})} \partial f_i(\bar{x})\right)$.

Kết quả sau đây là một mở rộng của Định lý Fermat về điều kiện cần và đủ cực trị của hàm lồi.

Mệnh đề 1.36 (xem [48, Mệnh đề 3.29])**.** *Giả sử $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi và $\bar{x} \in \text{dom}\, f$. Khi đó f đạt giá trị cực tiểu địa phương (tương đương, cực tiểu toàn cục) tại $\bar{x}$ khi và chỉ khi $0 \in \partial f(\bar{x})$.*

Phiên bản tương tự cho hàm không lồi sử dụng dưới vi phân Mordukhovich được phát biểu trong [47, Mệnh đề 1.114].

Mệnh đề 1.37. *Giả sử $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ và $f(\bar{x})$ hữu hạn. Khi đó, nếu f đạt giá trị cực tiểu địa phương tại $\bar{x}$ thì $0 \in \partial_L f(\bar{x})$.*

1.3.3 Đối đạo hàm

Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị giữa các không gian Banach. Tập xác định và đồ thị của F lần lượt là

$$\text{dom}\, F := \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\},$$
$$\text{gph}\, F := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

Nhắc lại rằng hàm F là *đóng* nếu gph F là tập con đóng của $X \times Y$, hàm F là *lồi* nếu gph F là tập lồi. Nếu trang bị cho không gian tích $X \times Y$ chuẩn $\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$

và sử dụng khái niệm nón pháp tuyến Mordukhovich nói trên, ta có thể định nghĩa khái niệm đối đạo hàm Mordukhovich (cũng được gọi là đối đạo hàm qua giới hạn) của ánh xạ đa trị như sau.

Định nghĩa 1.38 (xem [47, Định nghĩa 1.32]). *Đối đạo hàm Mordukhovich* của F tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ là ánh xạ đa trị $D_L^* F(\bar{x}, \bar{y}) : Y^* \rightrightarrows X^*$ được cho bởi

$$D_L^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := \{x^* \in X^* : (x^*, -y^*) \in N_L((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} F)\}, \ \forall y^* \in Y^*.$$

Nếu $(\bar{x}, \bar{y}) \notin \operatorname{gph} F$ thì ta quy ước $D_L^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*)$ là tập rỗng với mọi $y^* \in Y^*$.

Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, ta định nghĩa *ánh xạ đa trị trên đồ thị* (epigraphical multifunction) E_f từ X vào $\mathbb{R}$ bởi $E_f(x) := \{r \in \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$. Chú ý rằng $\operatorname{gph} E_f = \operatorname{epi} f$. Do đó với mỗi $\bar{x}$ mà tại đó f hữu hạn, ta có thể định nghĩa dưới vi phân Mordukhovich và dưới vi phân suy biến của f tại $\bar{x}$ thông qua đối đạo hàm của E_f như sau

$$\partial_L f(\bar{x}) = D_L^* E_f(\bar{x}, f(\bar{x}))(1) \text{ và } \partial_L^\infty f(\bar{x}) = D_L^* E_f(\bar{x}, f(\bar{x}))(0). \tag{1.5}$$

1.3.4 Điều kiện chính quy metric

Cho Ω là tập con khác rỗng của không gian Banach X, *hàm khoảng cách* tới Ω được cho bởi

$$d(x, \Omega) := \inf_{y \in \Omega} \|x - y\|, \quad x \in X.$$

Rõ ràng, $d(\cdot, \Omega) : X \to \mathbb{R}$ là hàm Lipschitz với hằng số Lipschitz bằng 1. Nếu Ω là tập lồi thì hàm khoảng cách đến Ω cũng là hàm lồi. Ngoài ra, tại các điểm thuộc tập Ω, dưới vi phân của $d(\cdot, \Omega)$ có thể biểu diễn thông qua nón pháp tuyến tương ứng và ngược lại.

Mệnh đề 1.39 (xem [2, Mệnh đề 1]). *Cho Ω là một tập con lồi khác rỗng của X. Với mỗi $\bar{x} \in \Omega$, ta có*

(i) $\partial d(\bar{x}, \Omega) = N(\bar{x}; \Omega) \cap \overline{\mathbb{B}}_{X^*}$;

(ii) $N(\bar{x}; \Omega) = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial d(\bar{x}, \Omega)$.

Điều kiện chính quy metric (metric qualification condition) được phát biểu thông qua hàm khoảng cách như sau.

Định nghĩa 1.40 (xem [36], [38])**.** Cho $C_1, ..., C_n$ là các tập con khác rỗng của X. Ta nói rằng các tập $C_i, i = 1, ..., n$, thỏa mãn *điều kiện chính quy metric* (MQC) tại điểm $\bar{x} \in C := \cap_{i=1}^n C_i$ nếu tồn tại hai số thực dương $\gamma > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$d(x, C) \leq \gamma[d(x, C_1) + \cdots + d(x, C_n)], \quad \forall x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \delta). \tag{MQC}$$

Điều kiện chính quy metric (MQC) là yếu tố quan trọng cho các kết quả trình bày trong luận án này. Điều kiện (MQC) đã xuất hiện trong một số tài liệu với các tên khác nhau. Chẳng hạn, trong [51] các tác giả đã gọi điều kiện (MQC) là bất đẳng thức metric (metric inequality), hay điều kiện tương thích tuyến tính (linear coherence condition) trong [53, các Định lý 4.75 và 6.41].

Nhận xét 1.41. (i) Trong Định nghĩa 1.40, nếu C bằng một trong các tập C_i, $i = 1, ..., n$, giả sử $C = C_1$, thì điều kiện (MQC) đúng với mọi $\bar{x} \in C$. Thật vậy, khi đó lấy $\gamma = 1$ và $\delta > 0$ tùy ý, ta thấy rằng bất đẳng thức trong (MQC) được thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \delta)$ vì $d(x, C) \leq d(x, C_1) + \ldots + d(x, C_n)$.

(ii) Theo [37, Định lý 5.1], nếu tất cả các $C_1, \ldots, C_n$ là tập lồi và $\bigcap_{i=1}^n C_i$ chứa một điểm thuộc phần trong của ít nhất $n-1$ các tập C_i thì điều kiện (MQC) đúng với mọi $\bar{x} \in C$. Do đó, điều kiện chính quy metric thỏa mãn tại mọi điểm thuộc $C = \cap_{i=1}^n C_i$ nếu tất cả các tập C_i là lồi và mở. Ngoài ra, nếu tất cả các tập C_i là lồi đóng bị chặn thì các khoảng cách ở vế trái và vế phải của (MQC) đều tồn tại hữu hạn, do đó điều kiện chính quy metric sẽ thỏa mãn bằng cách chọn γ đủ lớn.

(iii) Trong các không gian Banach phản xạ, nếu các hàm f_i, $i = 1, \ldots, m$, là nửa liên tục dưới, epi f_i, $i = 1, \ldots, m$, là compact pháp tuyến theo dãy (SNC) tại $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ và điều kiện chính quy sau đây thỏa mãn

$$\begin{cases} x_i^* \in \partial^\infty f_i(\bar{x}), i = 1, 2, ..., m \\ x_1^* + x_2^* + ... + x_m^* = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1^* = x_2^* = ... = x_m^* = 0 \tag{1.6}$$

thì ta có thể kết luận rằng các "epi f_i, $i = 1, \ldots, m$, thỏa mãn điều kiện chính quy metric (MQC) tại $(\bar{x}, f(\bar{x}))$" theo Mệnh đề 3.7 trong [51].

(iv) Nếu tất cả các hàm lồi f_i, $i = 1, \ldots, m$, là liên tục tại $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^m \operatorname{dom} f_i$ thì f_i, $i = 1, \ldots, m$, là Lipschitz địa phương tại điểm này (xem [13, Mệnh đề 4.1.4]

hoặc [48, Định lý 2.144 và Định lý 2.149]). Vì vậy, theo [47, Hệ quả 1.81] ta có $\partial^\infty f_i(\bar{x}) = \{0\}$. Điều đó có nghĩa là (1.6) được thỏa mãn.

(v) Theo [13, Mệnh đề 4.1.5], nếu X là không gian Banach và g là hàm lồi chính thường và nửa liên tục dưới thì điều kiện về tính liên tục của g tại một điểm $\bar{x}$ cho trước tương đương với điều kiện $\bar{x} \in \operatorname{int} \operatorname{dom} g$. Do đó, điều kiện "$\bar{x}$ thuộc phần trong của miền hữu hiệu của tất cả các f_i" và điều kiện các "f_i, $i = 1, \ldots, m$, liên tục tại $\bar{x}$ thuộc miền hữu hiệu của các f_i" là tương đương.

Ví dụ sau đây cho thấy rằng điều kiện chính quy "epi f_i, $i = 1, \ldots, m$, thỏa mãn điều kiện (MQC) tại $(\bar{x}, f(\bar{x}))$" không suy ra "tất cả các hàm f_i, $i = 1, \ldots, m$, liên tục tại $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^m \operatorname{dom} f_i$". Trong trường hợp tổng quát, bao hàm thức ngược lại chưa được khẳng định.

Ví dụ 1.42. Xét $X := \mathbb{R}$, hàm số $f_1(x) = 1$ nếu $x \geq 0$ và $f_1(x) = +\infty$ nếu $x < 0$, hàm số $f_2(x) = 0$ nếu $x \geq 0$ và $f_2(x) = +\infty$ nếu $x < 0$. Xét tại điểm $\bar{x} = 0$. Khi đó, $f(\bar{x}) = \max\{f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x})\} = 1$ và $I(\bar{x}) = \{1\}$. Vì $\bigcap_{i=1}^2 \operatorname{epi} f_i = \operatorname{epi} f_1$ nên các tập $\operatorname{epi} f_1$ và $\operatorname{epi} f_2$ thỏa mãn điều kiện chính quy metric (MQC) tại $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ theo Nhận xét 1.41. Trong khi đó, rõ ràng cả hai hàm f_1 và f_2 đều không liên tục tại $\bar{x} \in \bigcap\limits_{i=1}^{2} \operatorname{dom} f_i$.

Phần tiếp theo trình bày quy tắc nón pháp tuyến của giao các tập dưới điều kiện chính quy metric (MQC). Kết quả cho trường hợp không lồi đã được trình bày trong [53, Định lý 6.41], trong [51, Định lý 3.8, (i) suy ra (iii)] và trong [36, Mệnh đề 3.6 và Định lý 3.1]. Đối với trường hợp lồi, chúng tôi trình bày dưới đây một chứng minh trực tiếp để thuận tiện cho sự theo dõi của độc giả.

Mệnh đề 1.43. *Giả sử C_i, $i = 1, \ldots, n$, là các tập con lồi khác rỗng của X. Nếu $C_1, \ldots, C_n$ thỏa mãn điều kiện chính quy metric* (MQC) *tại $\bar{x} \in C := \cap_{i=1}^n C_i$ thì*

$$N(\bar{x}; C) = N(\bar{x}; C_1) + \ldots + N(\bar{x}; C_n). \tag{1.7}$$

Chứng minh. Bao hàm thức "$\supset$" trong (1.7) đúng mà không cần điều kiện chính quy metric. Thật vậy, lấy $x^* \in N(\bar{x}; C_1) + \ldots + N(\bar{x}; C_n)$ bất kỳ thì tồn tại $x_i^* \in N(\bar{x}; C_i)$, $i = 1, \ldots, n$, sao cho $x^* = x_1^* + \ldots + x_n^*$. Với mọi $x \in C$, ta có

$$\langle x^*, x - \bar{x} \rangle = \langle x_1^* + \ldots + x_n^*, x - \bar{x} \rangle = \langle x_1^*, x - \bar{x} \rangle + \ldots + \langle x_n^*, x - \bar{x} \rangle.$$

Vì $x_i^* \in N(\bar{x}; C_i)$ và $x \in C \subset C_i$ nên $\langle x_i^*, x - \bar{x}\rangle \leq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Điều này kéo theo $\langle x^*, x - \bar{x}\rangle \leq 0$ với mọi $x \in C$. Do đó, $x^* \in N(\bar{x}; C)$.

Để thu được bao hàm thức ngược lại, ta lấy bất kỳ $x^* \in N(\bar{x}; C)$. Theo Mệnh đề 1.39 ta có $x^* \in \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial d(\bar{x}, C)$. Do đó tồn tại số thực không âm λ và $u^* \in \partial d(\bar{x}, C)$ sao cho $x^* = \lambda u^*$. Theo định nghĩa dưới vi phân, $u^* \in \partial d(\bar{x}, C)$ nghĩa là

$$\langle u^*, x - \bar{x}\rangle \leq d(x, C) - d(\bar{x}, C) = d(x, C) \ \forall x \in X,$$

vì $d(\bar{x}, C) = 0$. Áp dụng điều kiện chính quy metric (MQC), ta có thể tìm được hai số $\gamma > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$\langle u^*, x - \bar{x}\rangle \leq \gamma[d(x, C_1) + \ldots + d(x, C_n)], \ \forall x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \delta).$$

Điều này tương đương với

$$0 \leq \gamma[d(x, C_1) + \ldots + d(x, C_n)] + \langle -u^*, x - \bar{x}\rangle, \ \forall x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \delta).$$

Ký hiệu $g(\cdot) := \gamma[d(\cdot, C_1) + \ldots + d(\cdot, C_n)] + \langle -u^*, \cdot - \bar{x}\rangle$. Rõ ràng, g là hàm lồi và $g(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \delta)$. Lưu ý rằng $g(\bar{x}) = 0$. Do đó g đạt giá trị cực tiểu địa phương (đồng thời là cực tiểu toàn cục) tại $\bar{x}$. Theo Mệnh đề 1.36, ta suy ra $0 \in \partial g(\bar{x})$. Áp dụng Mệnh đề 1.33 về quy tắc dưới vi phân của tổng cho các hàm lồi liên tục, ta được $0 \in \gamma[\partial d(\bar{x}, C_1) + \ldots + \partial d(\bar{x}, C_n)] - u^*$. Do đó, $u^* \in \gamma[\partial d(\bar{x}, C_1) + \ldots + \partial d(\bar{x}, C_n)]$ với $\gamma \geq 0$. Từ Mệnh đề 1.39(i), ta suy ra $u^* \in N(\bar{x}; C_1) + \ldots + N(\bar{x}; C_n)$. Do đó $\lambda u^* \in N(\bar{x}; C_1) + \ldots + N(\bar{x}; C_n)$, với $\lambda \geq 0$, tức là $x^* \in N(\bar{x}; C_1) + \ldots + N(\bar{x}; C_n)$. Vậy ta đã chứng minh xong mệnh đề. □

Kết quả tương tự cho trường hợp không lồi như sau. Lưu ý rằng giả thiết Asplund của X là cần thiết như đã được chỉ ra bởi phản thí dụ trong [51].

Mệnh đề 1.44 (xem [53, Định lý 6.41]). *Giả sử X là không gian Asplund và các tập C_i, $i = 1, \ldots, m$, là đóng. Nếu điều kiện* (MQC) *thỏa mãn tại $\bar{x} \in C = \cap_{i=1}^m C_i$ thì*

$$N_L(\bar{x}; C) \subset N_L(\bar{x}; C_1) + N_L(\bar{x}; C_2) + \ldots + N_L(\bar{x}; C_m).$$

KẾT LUẬN CHƯƠNG 1

Chương 1 của luận án đã trình bày một số khái niệm và kết quả của giải tích biến phân, giải tích lồi và lý thuyết tối ưu làm nền tảng cho các nội dung nghiên cứu ở những chương tiếp theo. Cụ thể, chương đã nhắc lại về quan hệ thứ tự, cấu trúc thứ tự thay đổi trong không gian véctơ và các khái niệm nghiệm tối ưu cho bài toán tối ưu véctơ làm cơ sở cho các nghiên cứu về cấu trúc thứ tự hai biến trong Chương 3. Tiếp theo, chương tập trung trình bày các công cụ chủ yếu của giải tích biến phân và giải tích lồi, bao gồm nón pháp tuyến của một tập, dưới vi phân của hàm đơn trị và đối đạo hàm của ánh xạ đa trị. Các quy tắc tính toán quan trọng như quy tắc dưới vi phân của tổng các hàm và quy tắc dưới vi phân của hàm maximum dưới điều kiện liên tục cũng được giới thiệu nhằm phục vụ cho việc thiết lập các điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy. Đồng thời, chương đã đề cập đến điều kiện chính quy metric, một giả thiết cơ bản trong việc đảm bảo tính đúng đắn của các quy tắc vi phân và các kết quả nghiên cứu ở Chương 2.

Chương 2

Điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu minimax có tham số

Chương này trình bày các kết quả chính mà chúng tôi đạt được cho bài toán minimax có tham số. Các kết quả này bao gồm: quy tắc dưới vi phân của hàm maximum dưới điều kiện chính quy metric (kết quả tương ứng dưới điều kiện về tính liên tục đã được nêu ở Chương 1); điều kiện cần và đủ tối ưu cấp một; phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán minimax có tham số trường hợp lồi và trường hợp không lồi. Các kết quả trong chương này đã được công bố trong các bài báo (CT1) và (CT2) trong danh mục công trình liên quan đến luận án (xem trang 101).

2.1 Quy tắc dưới vi phân của hàm maximum

Xét hàm maximum $f(x) := \max\{f_i(x) : i = 1, \ldots, m\}$ xác định trên không gian định chuẩn X, trong đó $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1, ..., m$. Nhắc lại ký hiệu $I(\bar{x})$ là tập các chỉ số hoạt tại $\bar{x} \in X$, tức là

$$I(\bar{x}) := \{i = 1, \ldots, m : f_i(\bar{x}) = f(\bar{x})\},$$

và ký hiệu

$$\Lambda(\bar{x}) := \left\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+ : \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_i[f_i(\bar{x}) - f(\bar{x})] = 0, i = 1, \ldots, m\right\},$$

$$\bar{\Lambda}(\bar{x}) := \left\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_i(f_i(\bar{x}) - f(\bar{x})) = 0, i = 1, ..., m\right\}.$$

Trước hết, ta xét trường hợp tất cả các hàm f_i, $i = 1, \ldots, m$, là hàm lồi. Ta có kết quả sau đây.

Định lý 2.1. *Với mọi* $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{dom} f_i$, *ta luôn có*

$$\partial f(\bar{x}) \supset \bigcup \left\{ \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \circ \partial f_i(\bar{x}),\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}) \right\}, \tag{2.1}$$

ở đó $\lambda_i \circ \partial f_i(\bar{x})$ *được định nghĩa bằng* $\lambda_i \partial f_i(\bar{x})$ *nếu* $\lambda_i > 0$, *và bằng* $\partial^\infty f_i(\bar{x})$ *nếu* $\lambda_i = 0$. *Hơn nữa, nếu* $\operatorname{epi} f_i$, $i \in I(\bar{x})$, *thỏa mãn điều kiện chính quy metric* (MQC) *tại* $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ *và nếu* f_i, $i \notin I(\bar{x})$, *liên tục tại* $\bar{x}$ *thì ta có*

$$\partial f(\bar{x}) = \bigcup \left\{ \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \circ \partial f_i(\bar{x}),\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}) \right\} \tag{2.2}$$

và

$$\partial^\infty f(\bar{x}) = \sum_{i \in I(\bar{x})} \partial^\infty f_i(\bar{x}). \tag{2.3}$$

Chứng minh. Để chứng minh (2.1), ta lấy tùy ý $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x})$ và $x^* \in \sum\limits_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \circ \partial f_i(\bar{x})$. Khi đó

$$x^* = \sum_{\substack{i \in I(\bar{x}),\\ \lambda_i > 0}} \lambda_i x_i^* + \sum_{\substack{j \in I(\bar{x}),\\ \lambda_j = 0}} x_j^*,$$

ở đây $x_i^* \in \partial f_i(\bar{x})$ với $i \in I(\bar{x})$ và $\lambda_i > 0$, $\sum\limits_{\substack{i \in I(\bar{x}),\\ \lambda_i > 0}} \lambda_i = 1$, và $x_j^* \in \partial^\infty f_j(\bar{x})$ với $j \in I(\bar{x})$ và $\lambda_j = 0$.

Trước hết ta chỉ ra rằng $x_i^* \in \partial f(\bar{x})$ với mọi $i \in I(\bar{x})$ với $\lambda_i > 0$. Thật vậy, theo định nghĩa của dưới vi phân, ta có

$$\begin{aligned} \langle x_i^*, x - \bar{x} \rangle &\le f_i(x) - f_i(\bar{x}) \\ &= f_i(x) - f(\bar{x}) \le f(x) - f(\bar{x}) \text{ với mọi } x \in X. \end{aligned}$$

Nói cách khác, $x_i^* \in \partial f(\bar{x})$. Do đó $\sum_{\substack{i \in I(\bar{x}),\\ \lambda_i > 0}} \lambda_i x_i^* \in \partial f(\bar{x})$ do tính chất lồi của $\partial f(\bar{x})$.

Với $x_j^* \in \partial^\infty f_j(\bar{x})$, $j \in I(\bar{x})$ và $\lambda_j = 0$, thì ta có $x_j^* \in N(\bar{x}; \operatorname{dom} f_j)$ theo Mệnh đề 1.31. Rõ ràng, $\operatorname{dom} f \subset \operatorname{dom} f_j$. Từ đó suy ra $N(\bar{x}; \operatorname{dom} f_j) \subset N(\bar{x}; \operatorname{dom} f)$, do đó $x_j^* \in N(\bar{x}; \operatorname{dom} f)$. Điều này có nghĩa là $x_j^* \in \partial^\infty f(\bar{x})$. Vì $\partial^\infty f(\bar{x})$ là một nón

lồi nên ta có $\sum\limits_{\substack{j\in I(\bar{x}),\\ \lambda_j=0}} x_j^* \in \partial^\infty f(\bar{x})$. Ta có $\partial f(\bar{x}) + \partial^\infty f(\bar{x}) \subset \partial f(\bar{x})$. Từ đó ta có

$$x^* = \sum_{\substack{i\in I(\bar{x}),\\ \lambda_i>0}} \lambda_i x_i^* + \sum_{\substack{j\in I(\bar{x}),\\ \lambda_j=0}} x_j^* \in \partial f(\bar{x}).$$

Vì vậy

$$\partial f(\bar{x}) \supset \bigcup \left\{ \sum_{i\in I(\bar{x})} \lambda_i \circ \partial f_i(\bar{x}),\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}) \right\}.$$

Chứng minh (2.2): Từ định nghĩa của f ta có $\operatorname{epi} f = \bigcap_{i=1}^m \operatorname{epi} f_i$. Lấy tùy ý $x^* \in \partial f(\bar{x})$. Theo Mệnh đề 1.23 ta suy ra

$$(x^*, -1) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f) = N\Big((\bar{x}, f(\bar{x})); \bigcap_{i=1}^m \operatorname{epi} f_i\Big).$$

Ta sẽ chứng minh $N\Big((\bar{x}, f(\bar{x})); \bigcap_{i=1}^m \operatorname{epi} f_i\Big) = N\Big((\bar{x}, f(\bar{x})); \bigcap_{i\in I(\bar{x})} \operatorname{epi} f_i\Big)$. Thật vậy, với mỗi $i \notin I(\bar{x})$, ta có $f_i(\bar{x}) < f(\bar{x})$. Do tính liên tục của các f_i tại $\bar{x}$ nên $(\bar{x}, f(\bar{x})) \in \operatorname{int}(\operatorname{epi} f_i)$. Suy ra, tồn tại $\delta_i > 0$ sao cho $\mathbb{B}((\bar{x}, f(\bar{x})), \delta_i) \subset \operatorname{epi} f_i$. Đặt $\delta := \min\{\delta_i : i \notin I(\bar{x})\}$. Khi đó $\delta > 0$ và ta có $\mathbb{B}((\bar{x}, f(\bar{x})), \delta) \subset \bigcap_{i\notin I(\bar{x})} \operatorname{epi} f_i$. Do đó

$$\mathbb{B}((\bar{x}, f(\bar{x})), \delta) \cap \Big(\bigcap_{i=1}^m \operatorname{epi} f_i\Big) = \mathbb{B}((\bar{x}, f(\bar{x})), \delta) \cap \Big(\bigcap_{i\in I(\bar{x})} \operatorname{epi} f_i\Big).$$

Suy ra

$$N\Big((\bar{x}, f(\bar{x})); \bigcap_{i=1}^m \operatorname{epi} f_i\Big) = N\Big((\bar{x}, f(\bar{x})); \bigcap_{i\in I(\bar{x})} \operatorname{epi} f_i\Big)$$

do tính chất lồi của các f_i, $i = 1, \ldots, m$.

Theo giả thiết, các tập $\operatorname{epi} f_i, i \in I(\bar{x})$, thỏa mãn điều kiện (MQC) nên áp dụng Mệnh đề 1.43 ta có

$$N\Big((\bar{x}, f(\bar{x})); \bigcap_{i\in I(\bar{x})} \operatorname{epi} f_i\Big) = \sum_{i\in I(\bar{x})} N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f_i).$$

Do đó

$$(x^*, -1) \in N\Big((\bar{x}, f(\bar{x})); \bigcap_{i=1}^m \operatorname{epi} f_i\Big) = \sum_{i\in I(\bar{x})} N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f_i).$$

Vì vậy ta có thể tìm được $(x_i^*, -\lambda_i) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f_i),\ i \in I(\bar{x})$ sao cho

$$(x^*, -1) = \sum_{i \in I(\bar{x})} (x_i^*, -\lambda_i).$$

Lưu ý rằng $f_i(\bar{x}) = f(\bar{x})$ với mọi $i \in I(\bar{x})$, vì $(x_i^*, -\lambda_i) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f_i)$ với mọi $i \in I(\bar{x})$, nên kéo theo

$$\langle x_i^*, x - \bar{x} \rangle - \lambda_i(\mu - f_i(\bar{x})) \leq 0 \ \ \forall (x, \mu) \in \operatorname{epi} f_i.$$

Hơn nữa, do $(\bar{x}, f_i(\bar{x}) + 1) \in \operatorname{epi} f_i$ ta suy ra $\langle x_i^*, \bar{x} - \bar{x} \rangle - \lambda_i(f_i(\bar{x}) + 1 - f_i(\bar{x})) \leq 0$, và do đó $\lambda_i \geq 0$.

Xét trường hợp $\lambda_i > 0$. Từ khẳng định $(x_i^*, -\lambda_i) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f_i)$, ta suy ra $(x_i^*/\lambda_i, -1) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f_i)$. Do đó $x_i^* \in \lambda_i \partial f_i(\bar{x})$.

Xét trường hợp $\lambda_i = 0$. Khi đó $(x_i^*, 0) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f_i)$, nên theo định nghĩa thì $x_i^* \in \partial^\infty f_i(\bar{x})$. Vì $\sum\limits_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ với mọi $i \in I(\bar{x})$, nên $x^* = \sum\limits_{i \in I(\bar{x})} x_i^*$ thuộc vế phải của (2.2). Do đó

$$\partial f(\bar{x}) \subset \bigcup \left\{ \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \circ \partial f_i(\bar{x}),\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}) \right\}.$$

Kết hợp với (2.1), ta thu được (2.2).

Chứng minh (2.3): Giả sử $x^* \in \sum\limits_{i \in I(\bar{x})} \partial^\infty f_i(\bar{x})$. Khi đó, tồn tại $x_i^* \in \partial^\infty f_i(\bar{x})$, $i \in I(\bar{x})$ sao cho $x^* = \sum\limits_{i \in I(\bar{x})} x_i^*$. Vì $f_i(\bar{x}) = f(\bar{x})$ với mọi $i \in I(\bar{x})$ nên theo định nghĩa dưới vi phân suy biến ta suy ra

$$(x_i^*, 0) \in N((\bar{x}, f_i(\bar{x})); \operatorname{epi} f_i) = N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f_i).$$

Điều này có nghĩa là

$$\langle x_i^*, x - \bar{x} \rangle - 0(\mu - f(\bar{x})) \leq 0 \text{ với mọi } (x, \mu) \in \operatorname{epi} f_i,\ i \in I(\bar{x}).$$

Do đó

$$\Big\langle \sum_{i \in I(\bar{x})} x_i^*, x - \bar{x} \Big\rangle - 0(\mu - f(\bar{x})) \leq 0 \text{ với mọi } (x, \mu) \in \bigcap_{i \in I(\bar{x})} \operatorname{epi} f_i. \tag{2.4}$$

Hơn nữa, do $\operatorname{epi} f = \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{epi} f_i \subset \bigcap_{i\in I(\bar{x})} \operatorname{epi} f_i$ nên (2.4) đúng với mọi $(x,\mu) \in \operatorname{epi} f$. Suy ra $(\sum_{i\in I(\bar{x})} x_i^*, 0) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f)$. Vậy $x^* = \sum_{i\in I(\bar{x})} x_i^* \in \partial^\infty f(\bar{x})$.

Ngược lại, giả sử $x^* \in \partial^\infty f(\bar{x})$. Khi đó $(x^*, 0) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f)$. Tương tự chứng minh của (2.2), ta suy ra

$$(x^*, 0) \in N\Big((\bar{x}, f(\bar{x})); \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{epi} f_i\Big) = \sum_{i\in I(\bar{x})} N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f_i).$$

Từ đó,

$$(x^*, 0) = \sum_{i\in I(\bar{x})} (x_i^*, -\lambda_i), \tag{2.5}$$

với $(x_i^*, \lambda_i) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f_i),\ i \in I(\bar{x})$. Dùng lập luận tương tự trong chứng minh (2.2) ta suy ra $\lambda_i \geq 0$ với mọi $i \in I(\bar{x})$. Hơn nữa, (2.5) cho ta $\sum_{i\in I(\bar{x})} \lambda_i = 0$. Do đó, $\lambda_i = 0$ với mọi $i \in I(\bar{x})$ và (2.5) có thể viết lại như sau

$$(x^*, 0) = \sum_{i\in I(\bar{x})} (x_i^*, 0) \text{ trong đó } (x_i^*, 0) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f_i),$$

tức là

$$x^* = \sum_{i\in I(\bar{x})} x_i^* \in \sum_{i\in I(\bar{x})} \partial^\infty f_i(\bar{x}).$$

Vậy định lý được chứng minh xong. □

Nhận xét 2.2. (i) Dưới điều kiện chính quy về tính liên tục được phát biểu trong Mệnh đề 1.35 và sử dụng lập luận tương tự như trong phần hai của chứng minh Định lý 2.1, ta cũng suy ra được quy tắc dưới vi phân suy biến của hàm maximum là công thức (2.3).

(ii) Ví dụ sau đây minh họa trường hợp Định lý 2.1 áp dụng được nhưng Mệnh đề 1.35 thì không. Ý tưởng của ví dụ này xuất phát từ [53, Bài tập 7, tr. 430].

Ví dụ 2.3. Xét không gian Banach vô hạn chiều W, ta trang bị cho không gian $X := W \times \mathbb{R}$ chuẩn sau đây

$$\|x\| := \|w\| + |\alpha| \quad \text{với mọi } x := (w, \alpha) \in W \times \mathbb{R}.$$

Giả sử $C_1 := \{0_W\} \times (-\mathbb{R}_+)$, và $C_2 := \{0_W\} \times \mathbb{R}_+$ là hai tập lồi trong X. Xét hai

hàm chỉ tương ứng với C_1 và C_2 như sau:

$$f_1(x) := \delta_{C_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in C_1 \\ +\infty & \text{nếu ngược lại,} \end{cases}$$

$$f_2(x) := \delta_{C_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in C_2 \\ +\infty & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$f(x) := \max\{f_1(x), f_2(x)\} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = 0 \\ +\infty & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Ta có $\operatorname{epi} f_1 = \{0_W\} \times (-\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+$, $\operatorname{epi} f_2 = \{0_W\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ và hơn nữa ta có $\operatorname{epi} f = \{0_W\} \times \{0_{\mathbb{R}}\} \times \mathbb{R}_+$. Rõ ràng, f_1 và f_2 không liên tục tại $\bar{x} := (0_W, 0_{\mathbb{R}})$. Ta sẽ chỉ ra rằng các tập hợp $\operatorname{epi} f_1$ và $\operatorname{epi} f_2$ thỏa mãn điều kiện chính quy (MQC) tại $(\bar{x}, f(\bar{x})) = (0_W, 0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$. Thật vậy, với mọi $(x, \beta) = (w, \alpha, \beta) \in X \times \mathbb{R}$, bằng cách tính toán trực tiếp ta có

$$\begin{aligned} d((x,\beta), \operatorname{epi} f_1) &= \|w\| + \max\{0, \alpha\} + \max\{0, -\beta\}, \\ d((x,\beta), \operatorname{epi} f_2) &= \|w\| + \max\{0, -\alpha\} + \max\{0, -\beta\}, \\ d((x,\beta), \operatorname{epi} f_1) + d((x,\beta), \operatorname{epi} f_2) &= 2\|w\| + |\alpha| + 2\max\{0, -\beta\}, \end{aligned}$$

và

$$d((x,\beta), \operatorname{epi} f_1 \cap \operatorname{epi} f_2) = \|w\| + |\alpha| + \max\{0, -\beta\}.$$

Do đó,

$$d((x,\beta), \operatorname{epi} f_1 \cap \operatorname{epi} f_2) \leq d((x,\beta), \operatorname{epi} f_1) + d((x,\beta), \operatorname{epi} f_2).$$

Điều này chứng tỏ rằng $\operatorname{epi} f_1$ và $\operatorname{epi} f_2$ thỏa mãn điều kiện (MQC) với δ tùy ý và $\gamma = 1$. Trong khi đó, ta tính được $\partial f_1(0,0) = W \times \mathbb{R}_+$, $\partial f_2(0,0) = W \times (-\mathbb{R}_+)$, và do đó $\partial f(0,0) = W \times \mathbb{R}$. Như vậy, $\partial f(0,0) = \partial f_1(0,0) + \partial f_2(0,0)$. Nói cách khác, quy tắc dưới vi phân của hàm maximum (2.2) là đúng. Tuy nhiên, do tính không liên tục của f_1 và f_2 nên Mệnh đề 1.35 không áp dụng được. Điều này cho thấy ưu điểm của kết quả thu được trong luận án.

Tiếp theo, đối với trường hợp không lồi, ta giả sử X là không gian Asplund và sử dụng công cụ đối đạo hàm. Ta có bổ đề sau đây về đối đạo hàm cho giao của các ánh xạ đa trị dưới điều kiện chính quy metric.

Bổ đề 2.4. *Giả sử $F_i : X \rightrightarrows Y$, $i = 1, 2, \ldots, m$ là các ánh xạ đa trị đóng. Giả thiết các tập* $\operatorname{gph} F_1$, $\operatorname{gph} F_2, \ldots, \operatorname{gph} F_m$ *thỏa mãn điều kiện chính quy metric* (MQC) *tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F_1 \cap \operatorname{gph} F_2 \cap \ldots \cap \operatorname{gph} F_m$. Khi đó với mọi $y^* \in Y^*$ ta có*

$$D_L^*\Big(\bigcap_{i=1}^m F_i\Big)(\bar{x}, \bar{y})(y^*) \subset \bigcup_{\sum_{i=1}^m y_i^* = y^*} \Big[\sum_{i=1}^m D_L^* F_i(\bar{x}, \bar{y})(y_i^*)\Big].$$

Chứng minh. Với mỗi $\bar{y} \in (\cap_{i=1}^m F_i)(\bar{x})$, $y^* \in Y^*$, lấy $x^* \in D_L^*(\cap_{i=1}^m F_i)(\bar{x}, \bar{y})(y^*)$ tùy ý. Theo định nghĩa đối đạo hàm ta có

$$(x^*, -y^*) \in N_L\big((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph}(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_m)\big).$$

Ta có $\operatorname{gph}(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_m) = \operatorname{gph}(F_1) \cap \operatorname{gph}(F_2) \cap \ldots \cap \operatorname{gph}(F_m)$. Dưới điều kiện (MQC), áp dụng Mệnh đề 1.44 ta được

$$(x^*, -y^*) \in \sum_{i=1}^m N_L\big((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} F_i\big).$$

Từ đó suy ra, tồn tại $(x_i^*, -y_i^*) \in N_L((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} F_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ thỏa mãn $x^* = x_1^* + x_2^* + \ldots + x_m^*$ và $-y^* = -y_1^* - y_2^* - \ldots - y_m^*$. Do đó

$$x^* \in D_L^* F_1(\bar{x}, \bar{y})(y_1^*) + D_L^* F_2(\bar{x}, \bar{y})(y_2^*) + \ldots + D_L^* F_m(\bar{x}, \bar{y})(y_m^*)$$

và $y^* = \sum_{i=1}^m y_i^*$, đây là điều phải chứng minh. □

Bổ đề sau đây thiết lập công thức đối đạo hàm cho giao của m ánh xạ đa trị tại một điểm thuộc phần trong của đồ thị của $m - 1$ hàm.

Bổ đề 2.5. *Cho $F_i : X \rightrightarrows Y$, $i = 1, 2, \ldots, m$, là các ánh xạ đa trị. Giả sử $(\bar{x}, \bar{y}) \in \cap_{i=1}^m (\operatorname{gph} F_i)$ và $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{int}(\operatorname{gph} F_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Khi đó, với mọi $y^* \in Y^*$ ta có*

$$D_L^*\Big(\bigcap_{i=1}^m F_i\Big)(\bar{x}, \bar{y})(y^*) = D_L^* F_m(\bar{x}, \bar{y})(y^*).$$

Chứng minh. Rõ ràng, $\text{gph}\,(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_m) = \text{gph}\,F_1 \cap \text{gph}\,F_2 \cap \ldots \cap \text{gph}\,F_m$. Do đó,

$$N_L\big((\bar{x},\bar{y}); \text{gph}\,(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_m)\big) = N_L\big((\bar{x},\bar{y}); \cap_{i=1}^m \text{gph}\,F_i\big).$$

Vì $(\bar{x},\bar{y}) \in \text{int}\,(\text{gph}\,F_i)$, $i = 1,2,\ldots,m-1$, nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho bao hàm thức $\mathbb{B}((\bar{x},\bar{y});\delta) \subset \text{gph}\,F_i$ đúng với mọi $i \in \{1,2,\ldots,m-1\}$. Từ đó suy ra,

$$\begin{aligned}\mathbb{B}((\bar{x},\bar{y});\delta) \cap \big(\cap_{i=1}^m \text{gph}\,F_i\big) &= \big[\mathbb{B}((\bar{x},\bar{y});\delta) \cap \text{gph}\,F_1 \cap \ldots \cap \text{gph}\,F_{m-1}\big] \cap \text{gph}\,F_m \\ &= \mathbb{B}((\bar{x},\bar{y});\delta) \cap \text{gph}\,F_m.\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$\widehat{N}_\varepsilon((x,y); \cap_{i=1}^m \text{gph}\,F_i) = \widehat{N}_\varepsilon((x,y); \text{gph}\,F_m),$$

với mọi $\varepsilon \geq 0$ và $(x,y) \in \cap_{i=1}^m \text{gph}\,F_i$ thỏa mãn $(x,y) \in \mathbb{B}((\bar{x},\bar{y});\delta)$. Do đó,

$$N_L\big((\bar{x},\bar{y}); \cap_{i=1}^m \text{gph}\,F_i\big) = N_L\big((\bar{x},\bar{y}); \text{gph}\,F_m\big).$$

Vì vậy, $D_L^*\big(\bigcap_{i=1}^m F_i\big)(\bar{x},\bar{y})(y^*) = D_L^* F_m(\bar{x},\bar{y})(y^*)$ với mọi $y^* \in Y^*$. □

Định lý tiếp theo trình bày kết quả đánh giá dưới vi phân Mordukhovich của hàm maximum dưới điều kiện chính quy metric.

Định lý 2.6. *Cho $\bar{x} \in X$. Giả sử f_i là l.s.c. với $i \in I(\bar{x})$ và là u.s.c. tại $\bar{x}$ với $i \notin I(\bar{x})$. Hơn nữa, giả sử tồn tại $\gamma > 0$ và $\delta > 0$ sao cho*

$$d((x,r), \text{epi}\,\bar{f}) \leq \gamma \sum_{i \in I(\bar{x})} d((x,r), \text{epi}\,f_i),\ \forall x \in \mathbb{B}(\bar{x},\delta), r \in \mathbb{B}(f(\bar{x}),\delta), \tag{2.6}$$

trong đó $\bar{f} := \max_{i \in I(\bar{x})} f_i$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\partial_L f(\bar{x}) &\subset \bigcup \Big\{ \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \circ \partial_L f_i(\bar{x}),\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_i) \in \Lambda(\bar{x}) \Big\}, \qquad (2.7)\\ \partial_L^\infty f(\bar{x}) &\subset \sum_{i \in I(\bar{x})} \partial_L^\infty f_i(\bar{x}),\end{aligned}$$

trong đó $\lambda \circ \partial_L f(\bar{x})$ được định nghĩa bằng $\lambda \partial_L f(\bar{x})$ khi $\lambda > 0$ và bằng $\partial_L^\infty f(\bar{x})$ khi $\lambda = 0$.

Chứng minh. Giả sử $x^* \in \partial_L f(\bar{x})$. Theo (1.5), ta có $x^* \in D_L^* E_f(\bar{x}, f(\bar{x}))(1)$. Rõ ràng, $E_f(x) = \bigcap_{i=1}^m E_{f_i}(x)$ với mọi $x \in X$. Ta có $(\bar{x}, f(\bar{x})) \in \operatorname{int}(\operatorname{gph} E_{f_i})$ với mọi $i \notin I(\bar{x})$ do giả thiết nửa liên tục trên. Theo Bổ đề 2.5, ta có

$$\begin{aligned} D_L^* E_f(\bar{x}, f(\bar{x}))(1) &= D_L^*\big(\cap_{i\in I(\bar{x})} E_{f_i}\big)(\bar{x}, f(\bar{x}))(1) \\ &= D_L^* E_{\bar{f}}(\bar{x}, f(\bar{x}))(1). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Từ (2.6) suy ra $\operatorname{gph} E_{f_i}$ với $i \in I(\bar{x})$ thỏa mãn điều kiện chính quy metric (MQC) tại $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Thêm vào đó, do f_i với $i \in I(\bar{x})$ là các hàm nửa liên tục dưới nên $\operatorname{epi} f_i$ với $i \in I(\bar{x})$ là các tập đóng. Nói cách khác, $\operatorname{gph} E_{f_i}$ với $i \in I(\bar{x})$ là các tập đóng. Dựa vào (2.8) và Bổ đề 2.4, ta thu được

$$\begin{aligned} D_L^* E_f(\bar{x}, f(\bar{x}))(1) &= D_L^* E_{\bar{f}}(\bar{x}, f(\bar{x}))(1) \\ &\subset \bigcup_{\sum_{i\in I(\bar{x})} \lambda_i = 1} \left[\sum_{i\in I(\bar{x})} D_L^* E_{f_i}(\bar{x}, f(\bar{x}))(\lambda_i) \right]. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\partial_L f(\bar{x}) \subset \bigcup \left\{ \sum_{i\in I(\bar{x})} D_L^* E_{f_i}(\bar{x}, f(\bar{x}))(\lambda_i),\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \bar{\Lambda}(\bar{x}) \right\}.$$

Do đó tồn tại $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \bar{\Lambda}(\bar{x})$ và $x_i^* \in D_L^* E_{f_i}(\bar{x}, f(\bar{x}))(\lambda_i)$, $i \in I(\bar{x})$, thỏa mãn $x^* = \sum_{i\in I(\bar{x})} x_i^*$. Do đó, với mỗi $i \in I(\bar{x})$,

$$(x_i^*, -\lambda_i) \in N_L((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{gph} E_{f_i}) = N_L((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f_i).$$

Theo [47, Mệnh đề 1.76], $\lambda_i \geq 0$ với mọi $i \in I(\bar{x})$, tức là, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x})$. Nếu $\lambda_i > 0$ thì $(\frac{1}{\lambda_i} x_i^*, -1) \in N_L((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f_i)$, do đó $\frac{1}{\lambda_i} x_i^* \in \partial_L f_i(\bar{x})$, hay $x_i^* \in \lambda_i \partial_L f_i(\bar{x})$. Nếu $\lambda_i = 0$ thì $x_i^* \in \partial_L^\infty f_i(\bar{x})$. Vì vậy $x_i^* \in \lambda_i \circ \partial_L f_i(\bar{x})$ với mọi $i \in I(\bar{x})$ và (2.7) được chứng minh.

Kết luận cho dưới vi phân suy biến của f được chứng minh tương tự chứng minh của (2.7) nên được lược bỏ. □

2.2 Điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán minimax lồi có tham số

Trong mục này, ta xét bài toán minimax rời rạc có tham số (P_x)

$$\min_{y\in G(x)} \max_{k\in J} \varphi_k(x,y),$$

trong đó các hàm $\varphi_k, k \in J$, là các hàm lồi, chính thường. Các kết quả chính gồm điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu minimax lồi có tham số. Phần đầu trình bày các định lý điều kiện cần và đủ tối ưu dựa trên điều kiện chính quy metric và tính liên tục. Phần cuối thiết lập công thức tính toán, đánh giá dưới vi phân và dưới vi phân suy biến của hàm giá trị tối ưu.

2.2.1 Điều kiện cần và đủ tối ưu

Điều kiện tối ưu cho bài toán minimax lồi được thiết lập dựa trên quy tắc dưới vi phân của tổng hai hàm lồi và quy tắc dưới vi phân cho hàm maximum của hữu hạn các hàm lồi.

Định lý 2.7 (Điều kiện cần và đủ tối ưu I)**.** *Xét bài toán $(P_{\bar{x}})$ với $\bar{x} \in X$ và $\bar{y} \in \bigcap_{k\in J} \operatorname{dom}\varphi_k(\bar{x},\cdot)$. Giả sử $\varphi_k(\bar{x},.)$, $k \in J$, là các hàm lồi và $G(\bar{x})$ là một tập lồi. Hơn nữa, giả thiết rằng:*

(i) $\operatorname{epi}\varphi(\bar{x},\cdot)$ *và* $G(\bar{x})\times\mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{y},\varphi(\bar{x},\bar{y}))$,

(ii) $\operatorname{epi}\varphi_k(\bar{x},\cdot)$, $k \in I(\bar{x},\bar{y})$, *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{y},\varphi(\bar{x},\bar{y}))$ *và* $\varphi_k(\bar{x},\cdot)$, $k \notin I(\bar{x},\bar{y})$, *liên tục tại* $\bar{y}$.

Khi đó, $\bar{y}$ là một nghiệm toàn cục của bài toán $(P_{\bar{x}})$ khi và chỉ khi

$$0 \in \bigcup \left\{ \sum_{k\in I(\bar{x},\bar{y})} \lambda_k \circ \partial_y\varphi_k(\bar{x},\bar{y}), (\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \Lambda(\bar{x},\bar{y}) \right\} + N(\bar{y}; G(\bar{x})), \qquad (2.9)$$

trong đó $I(\bar{x},\bar{y}) := \{k \in J :\ \varphi_k(\bar{x},\bar{y}) = \varphi(\bar{x},\bar{y})\}$,

$$\Lambda(\bar{x},\bar{y}) := \left\{ (\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+ : \sum_{k\in J} \lambda_k = 1, \lambda_k[\varphi_k(\bar{x},\bar{y}) - \varphi(\bar{x},\bar{y})] = 0, k \in J \right\}$$

và $\lambda_k \circ \partial_y\varphi_k(\bar{x},\bar{y})$ *được định nghĩa bằng* $\lambda_k\partial_y\varphi_k(\bar{x},\bar{y})$ *nếu* $\lambda_k > 0$ *và bằng* $\partial^\infty_y\varphi_k(\bar{x},\bar{y})$ *nếu* $\lambda_k = 0$.

Chứng minh. Giả sử $\bar{x} \in X$ cho trước. Xét hàm $\psi_G(y) = \varphi(\bar{x}, y) + \delta_{G(\bar{x})}(y)$, ở đây $\delta_G(\bar{x})$ là hàm chỉ của tập $G(\bar{x})$. Rõ ràng $\bar{y}$ là một nghiệm (toàn cục) của bài toán lồi $(P_{\bar{x}})$ (tức là, $\bar{y} \in M(\bar{x})$) khi và chỉ khi hàm ψ_G đạt cực tiểu địa phương tại $\bar{y}$. Do đó, theo Mệnh đề 1.36, $\bar{y} \in M(\bar{x})$ khi và chỉ khi

$$0 \in \partial\psi_G(\bar{y}) = \partial\Big(\varphi(\bar{x}, \cdot) + \delta_{G(\bar{x})}(\cdot)\Big)(\bar{y}). \tag{2.10}$$

Khẳng định: $\operatorname{epi}(\varphi(\bar{x}, \cdot) + \delta_{G(\bar{x})}) = \operatorname{epi}\varphi(\bar{x}, \cdot) \cap (G(\bar{x}) \times \mathbb{R})$.

Thật vậy, trước hết lưu rằng $\varphi(\bar{x}, \cdot) + \delta_{G(\bar{x})} : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ được cho bởi

$$(\varphi(\bar{x}, \cdot) + \delta_{G(\bar{x})})(y) = \begin{cases} \varphi(\bar{x}, y) & \text{nếu } \ y \in G(\bar{x}) \\ +\infty & \text{nếu } \ y \notin G(\bar{x}). \end{cases}$$

Lấy bất kỳ $(y, \alpha) \in \operatorname{epi}(\varphi(\bar{x}, \cdot) + \delta_{G(\bar{x})})$. Khi đó $\alpha \in \mathbb{R}$ và $(\varphi(\bar{x}, \cdot) + \delta_{G(\bar{x})})(y) \le \alpha$. Do đó $(\varphi(\bar{x}, \cdot) + \delta_{G(\bar{x})})(y) < +\infty$, suy ra $y \in G(\bar{x})$. Vì vậy $(y, \alpha) \in G(\bar{x}) \times \mathbb{R}$. Hơn nữa, $\varphi(\bar{x}, y) = (\varphi(\bar{x}, \cdot) + \delta_{G(\bar{x})})(y) \le \alpha$. Suy ra $(y, \alpha) \in \operatorname{epi}\varphi(\bar{x}, \cdot)$. Vậy $(y, \alpha) \in \operatorname{epi}\varphi(\bar{x}, \cdot) \cap (G(\bar{x}) \times \mathbb{R})$.

Ngược lại, giả sử $(y, \alpha) \in \operatorname{epi}\varphi(\bar{x}, \cdot) \cap (G(\bar{x}) \times \mathbb{R})$, thì $\varphi(\bar{x}, y) \le \alpha \in \mathbb{R}$ và $y \in G(\bar{x})$. Từ đó suy ra $(\varphi(\bar{x}, \cdot) + \delta_{G(\bar{x})})(y) = \varphi(\bar{x}, y) \le \alpha$. Điều này có nghĩa là $(y, \alpha) \in \operatorname{epi}(\varphi(\bar{x}, \cdot) + \delta_{G(\bar{x})})$. Như vậy ta đã chứng minh xong khẳng định.
Theo Mệnh đề 1.23 thì (2.10) tương đương với

$$\begin{aligned}(0, -1) &\in N((\bar{y}, \psi_G(\bar{y})); \operatorname{epi}\psi_G) \\ &= N((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \delta_{G(\bar{x})}(\bar{y})); \operatorname{epi}(\varphi(\bar{x}, \cdot) + \delta_{G(\bar{x})})).\end{aligned}$$

Rõ ràng, $\delta_{G(\bar{x})}(\bar{y}) = 0$. Theo khẳng định ở trên, ta có thể viết lại như sau

$$(0, -1) \in N((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi}\varphi(\bar{x}, \cdot) \cap (G(\bar{x}) \times \mathbb{R})).$$

Dưới giả thiết (i), ta có thể áp dụng Mệnh đề 1.43 để thu được

$$(0, -1) \in N((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi}\varphi(\bar{x}, \cdot)) + N((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); G(\bar{x}) \times \mathbb{R}).$$

Do đó tồn tại

$$(y_1^*, \alpha_1^*) \in N((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi}\varphi(\bar{x}, \cdot)) \tag{2.11}$$

và

$$(y_2^*, \alpha_2^*) \in N((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); G(\bar{x}) \times \mathbb{R}) \tag{2.12}$$

thỏa mãn $(0, -1) = (y_1^*, \alpha_1^*) + (y_2^*, \alpha_2^*)$. Điều này có nghĩa là

$$y_1^* = -y_2^* \tag{2.13}$$

$$\alpha_1^* + \alpha_2^* = -1. \tag{2.14}$$

Một mặt, vì $N((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); G(\bar{x}) \times \mathbb{R}) = N(\bar{y}; G(\bar{x})) \times N(\varphi(\bar{x}, \bar{y}); \mathbb{R})$, nên từ (2.12) ta suy ra $y_2^* \in N(\bar{y}; G(\bar{x}))$ và $\alpha_2^* \in N(\varphi(\bar{x}, \bar{y}); \mathbb{R}) = \{0\}$. Mặt khác, từ (2.11), (2.13) và (2.14) ta có

$$(y_1^*, -1) \in N((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi} \varphi(\bar{x}, \cdot)).$$

Suy ra $y_1^* \in \partial_y \varphi(\bar{x}, \bar{y})$. Do đó,

$$0 \in \partial_y \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + N(\bar{y}; G(\bar{x})). \tag{2.15}$$

Dưới giả thiết (ii), ta có thể áp dụng Định lý 2.1 để thu được

$$\partial_y \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \circ \partial_y \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\}. \tag{2.16}$$

Kết hợp (2.15) và (2.16) ta suy ra (2.9), đây là điều phải chứng minh. □

Sử dụng Mệnh đề 1.35 ta thu được điều kiện cần và đủ tối ưu cho bài toán (P_x) với điều kiện liên tục như sau.

Định lý 2.8 (Điều kiện cần và đủ tối ưu II)**.** *Xét bài toán $(P_{\bar{x}})$ với $\bar{x} \in X$ và $\bar{y} \in \bigcap_{k \in J} \operatorname{dom} \varphi_k(\bar{x}, \cdot)$. Giả thiết $\varphi_k(\bar{x}, .)$, $k \in J$, là các hàm lồi và $G(\bar{x})$ là một tập lồi. Hơn nữa giả sử rằng tất cả các $\varphi_k(\bar{x}, \cdot)$, $k \in J$, liên tục tại $\bar{y}$. Khi đó, $\bar{y}$ là một nghiệm toàn cục của bài toán (P_x) khi và chỉ khi*

$$0 \in \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \partial_y \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\} + N(\bar{y}; G(\bar{x})). \tag{2.17}$$

Chứng minh. Tương tự chứng minh Định lý 2.7. Cụ thể, xét hàm số $\psi_G(y) = \varphi(\bar{x}, y) + \delta_{G(\bar{x})}(y)$. Lập luận tương tự trong chứng minh Định lý 2.7,

ta suy ra $\bar{y} \in M(\bar{x})$ khi và chỉ khi $0 \in \partial\psi_G(\bar{y}) = \partial\Big(\varphi(\bar{x},\cdot) + \delta_{G(\bar{x})}(\cdot)\Big)(\bar{y})$. Vì tất cả các $\varphi_k(\bar{x},\cdot)$, $k \in J$, liên tục tại $\bar{y}$, nên $\varphi(\bar{x},\cdot)$ cũng liên tục tại $\bar{y}$. Do đó ta có thể áp dụng Mệnh đề 1.33 về quy tắc dưới vi phân của tổng hai hàm để suy ra

$$0 \in \partial_y\varphi(\bar{x},\bar{y}) + \partial\delta_{G(\bar{x})}(\bar{y}). \tag{2.18}$$

Hơn nữa, vì các hàm $f_i, i = 1,...,m$, liên tục nên theo Mệnh đề 1.35 ta có biểu diễn cho số hạng đầu tiên của vế phải của (2.18) như sau

$$\begin{aligned}\partial_y\varphi(\bar{x},\bar{y}) &= \operatorname{conv}\left(\bigcup_{k\in I(\bar{x},\bar{y})} \partial_y\varphi_k(\bar{x},\bar{y})\right)\\ &= \bigcup\left\{\sum_{k\in I(\bar{x},\bar{y})} \lambda_k\partial_y\varphi_k(\bar{x},\bar{y}), (\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \Lambda(\bar{x},\bar{y})\right\}.\end{aligned}$$

Ngoài ra, lưu ý rằng $\partial\delta_{G(\bar{x})}(\bar{y}) = N(\bar{y}; G(\bar{x}))$. Do đó ta thu được (2.17), đây là điều phải chứng minh. □

Ví dụ sau đây minh họa cho các kết quả đã trình bày ở trên.

Ví dụ 2.9. Giả sử $X = Y := \mathbb{R}$ và

$$G(x) := \begin{cases}\{y \in Y :\ y \geq x - 1\} & \text{nếu } x \geq 0,\\ \emptyset & \text{nếu } x < 0.\end{cases}$$

Định nghĩa hai hàm $\varphi_1(x,y) := x + y,\ \varphi_2(x,y) := x - y$. Ta có

$$\varphi(x,y) := \max_{k\in J}\varphi_k(x,y) = \max\{x+y, x-y\}.$$

Xét tại $\bar{x} := 0$. Ta có $G(0) = [-1,+\infty)$ nên $N(0;G(0)) = \{0\}$. Hơn nữa, ta có $\varphi(0,y) = \max\{y,-y\} = |y|$. Ta kiểm tra (2.17) cho các trường hợp khác nhau của $\bar{y} \in G(\bar{x}) = [-1,+\infty)$. Nếu $-1 < \bar{y} < 0$ thì $I(\bar{x},\bar{y}) = \{2\}$, $\partial_y\varphi_2(\bar{x},\bar{y}) = \{-1\}$ và $N(\bar{y}, G(\bar{x})) = \{0\}$ nên (2.17) không thỏa mãn. Tương tự, nếu $\bar{y} > 0$ thì ta có $I(\bar{x},\bar{y}) = \{1\}$, $\partial_y\varphi_1(\bar{x},\bar{y}) = \{1\}$ và $N(\bar{y}, G(\bar{x})) = \{0\}$ nên (2.17) cũng không thỏa mãn. Nếu $\bar{y} = -1$ thì $I(\bar{x},\bar{y}) = \{2\}$, $\partial_y\varphi_2(\bar{x},\bar{y}) = \{-1\}$ và $N(\bar{y}, G(\bar{x})) = (-\infty, 0]$ nên (2.17) vẫn không thỏa mãn.

Nếu $\bar{y} = 0$ thì $I(\bar{x}, \bar{y}) = \{1, 2\}$, $\partial_y \varphi_1(\bar{x}, \bar{y}) = \{1\}$, và $\partial_y \varphi_2(\bar{x}, \bar{y}) = \{-1\}$. Do đó, vế phải của (2.17) là $[-1, 1]$. Vì vậy, (2.17) đúng tại $\bar{y} = 0$. Chú ý rằng tất cả các giả thiết của Định lý 2.8 đều thỏa mãn. Do đó, $\bar{y} = 0$ là nghiệm tối ưu duy nhất của bài toán (P_x) xét tại $\bar{x} = 0$.

2.2.2 Phân tích độ nhạy nghiệm

Trong phần này chúng ta sẽ thiết lập công thức đánh giá/tính toán dưới vi phân và dưới vi phân suy biến của hàm giá trị tối ưu μ của bài toán (P_x) thông qua nón pháp tuyến của $\operatorname{gph} G$ và dưới vi phân của các $\varphi_k, k \in J$. Trước hết ta nhắc lại kết quả sau đây về tính chất lồi của hàm giá trị tối ưu.

Mệnh đề 2.10. *Giả sử $\varphi_k : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \in J$ là các hàm lồi và $G : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị lồi. Khi đó, hàm giá trị tối ưu μ cho bởi* (1.2) *là hàm lồi.*

Chứng minh. Vì các hàm φ_k, $k \in J$ là lồi nên $\varphi(x, y) := \max_{k \in J} \varphi_k(x, y)$ cũng là hàm lồi. Do đó, áp dụng [48, Định lý 2.129] ta suy ra μ là hàm lồi. □

Tiếp theo ta sẽ thiết lập công thức tính toán dưới vi phân của μ.

Định lý 2.11. *Xét bài toán (P_x). Giả sử ánh xạ G có đồ thị lồi, các hàm φ_k, $k \in J$, lồi trên $X \times Y$ và hàm giá trị tối ưu μ hữu hạn tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$. Ngoài ra, giả sử $\bar{y} \in M(\bar{x})$ và*

(i) $\operatorname{epi} \varphi$ *và* $\operatorname{gph} G \times \mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$*;*

(ii) $\operatorname{epi} \varphi_k, k \in I(\bar{x}, \bar{y})$*, thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$ *và các hàm* $\varphi_k, k \notin I(\bar{x}, \bar{y})$*, liên tục tại* $(\bar{x}, \bar{y})$*.*

Khi đó, $x^* \in \partial\mu(\bar{x})$ nếu và chỉ nếu

$$(x^*, 0) \in \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \circ \partial\varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\} + N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G), \tag{2.19}$$

trong đó $\lambda_k \circ \partial\varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ được định nghĩa bằng $\lambda_k \partial\varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ nếu $\lambda_k > 0$ và bằng $\partial^\infty \varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ nếu $\lambda_k = 0$.

Chứng minh. Giả sử $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$. Ta suy ra $M(\bar{x}) \neq \emptyset$. Lấy bất kỳ $\bar{y} \in M(\bar{x})$. Theo

Mệnh đề 2.10, hàm μ là lồi. Do đó, $x^* \in \partial\mu(\bar{x})$ khi và chỉ khi với mọi $x \in X$,

$$\begin{aligned}\langle x^*, x - \bar{x}\rangle &\leq \mu(x) - \mu(\bar{x}) = \mu(x) - \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \\ &\leq \varphi(x, y) - \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \text{ với mọi } y \in G(x),\end{aligned}$$

hay tương đương, với mọi $(x, y) \in X \times Y$, bất đẳng thức sau đây là đúng

$$\langle x^*, x - \bar{x}\rangle + \langle 0, y - \bar{y}\rangle \leq \varphi(x, y) + \delta_{\operatorname{gph} G}(x, y) - [\varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \delta_{\operatorname{gph} G}(\bar{x}, \bar{y})].$$

Ký hiệu $\psi(x, y) := \varphi(x, y) + \delta_{\operatorname{gph} G}(x, y)$, ta suy ra

$$(x^*, 0) \in \partial\psi(\bar{x}, \bar{y}) = \partial\left(\varphi + \delta_{\operatorname{gph} G}\right)(\bar{x}, \bar{y}),$$

hay tương đương

$$\begin{aligned}(x^*, 0, -1) &\in N\big((\bar{x}, \bar{y}, (\varphi + \delta_{\operatorname{gph} G})(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi}(\varphi + \delta_{\operatorname{gph} G})\big) \\ &= N\big((\bar{x}, \bar{y}, (\varphi + \delta_{\operatorname{gph} G})(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi}\varphi \cap \operatorname{gph} G \times \mathbb{R}\big)\end{aligned}$$

theo Khẳng định trong chứng minh của Định lý 2.7. Điều đó tương đương với

$$(x^*, 0, -1) \in N\big((\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi}\varphi\big) + N((\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{gph} G \times \mathbb{R})$$

do giả thiết (i). Do đó tồn tại

$$(x_1^*, y_1^*, \alpha_1^*) \in N((\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi}\varphi) \tag{2.20}$$

và

$$(x_2^*, y_2^*, \alpha_2^*) \in N((\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{gph} G \times \mathbb{R}) \tag{2.21}$$

sao cho

$$(x^*, 0, -1) = (x_1^*, y_1^*, \alpha_1^*) + (x_2^*, y_2^*, \alpha_2^*). \tag{2.22}$$

Từ (2.21) ta thu được $(x_2^*, y_2^*) \in N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G)$ và $\alpha_2^* = 0$. Do đó, $\alpha_1^* = -1$ theo (2.22) và $(x_1^*, y_1^*, -1) \in N((\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi}\varphi)$ theo (2.20). Do đó,

$$(x_1^*, -y_2^*, -1) = (x^*, 0, -1) - (x_2^*, y_2^*, 0) \in N((\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi}\varphi).$$

Điều này kéo theo $(x_1^*, -y_2^*) = \partial\varphi(\bar{x}, \bar{y})$. Kết hợp với $(x_2^*, y_2^*) \in N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G)$ ta thu được

$$(x^*, 0) \in \partial\varphi(\bar{x}, \bar{y}) + N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G). \tag{2.23}$$

Hơn nữa, dưới giả thiết (ii), ta suy ra

$$\partial\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \circ \partial\varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\} \tag{2.24}$$

bằng cách áp dụng Định lý 2.1. Khẳng định (2.19) là sự kết hợp của (2.23) và (2.24). Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Dưới vi phân suy biến của μ được tính theo công thức sau.

Định lý 2.12. *Giả sử ánh xạ G có đồ thị lồi, các hàm φ_k, $k \in J$, lồi trên $X \times Y$ và hàm giá trị tối ưu μ hữu hạn tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$. Ngoài ra, giả sử $\bar{y} \in M(\bar{x})$ và*

(i) $\operatorname{dom}\varphi \times \mathbb{R}_+$ *và* $\operatorname{gph} G \times \mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$*;*

(ii) $\operatorname{epi}\varphi_k, k \in I(\bar{x}, \bar{y})$, *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$ *và các hàm* $\varphi_k, k \notin I(\bar{x}, \bar{y})$, *liên tục tại* $(\bar{x}, \bar{y})$.

Khi đó, ta có

$$\partial^\infty\mu(\bar{x}) = \left\{ x^* \in X^* : (x^*, 0) \in \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \partial^\infty\varphi_k(\bar{x}, \bar{y}) + N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G) \right\}. \tag{2.25}$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh rằng (2.25) là hệ quả của (2.19). Thật vậy, ta có $x \in \operatorname{dom}\mu$ khi và chỉ khi

$$\mu(x) = \min\{\varphi(x, y) : y \in G(x)\} < \infty.$$

Điều này đúng khi và chỉ khi tồn tại $y \in G(x)$ sao cho $(x, y) \in \operatorname{dom}\varphi$. Khi đó

$$\delta_{\operatorname{dom}\mu}(x) = \min\{\delta_{\operatorname{dom}\varphi}(x, y) : y \in G(x)\}.$$

Vì $\operatorname{epi}\delta_{\operatorname{dom}\varphi} = \operatorname{dom}\varphi \times \mathbb{R}_+$ và $\operatorname{epi}\delta_{\operatorname{dom}\varphi_k} = \operatorname{dom}\varphi_k \times \mathbb{R}_+$ nên ta có thể áp dụng Định lý 2.11 với $\delta_{\operatorname{dom}\mu}$ và $\delta_{\operatorname{dom}\varphi}$ lần lượt đóng vai trò của μ và φ. Khi đó,

$x^* \in \partial\delta_{\operatorname{dom}\mu}(\bar{x})$ khi và chỉ khi

$$(x^*, 0) \in \partial\delta_{\operatorname{dom}\varphi}(\bar{x}, \bar{y}) + N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G).$$

Lưu ý rằng $\partial\delta_{\operatorname{dom}\mu}(\bar{x}) = N(\bar{x}; \operatorname{dom}\mu) = \partial^\infty\mu(\bar{x})$ và

$$\partial\delta_{\operatorname{dom}\varphi}(\bar{x}, \bar{y}) = N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{dom}\varphi) = \partial^\infty\varphi(\bar{x}, \bar{y}).$$

Hơn nữa, bằng cách áp dụng quy tắc dưới vi phân suy biến của tổng trong Định lý 2.1 ta được $\partial^\infty\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{k\in I(\bar{x},\bar{y})} \partial^\infty\varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$. Do đó, $x^* \in \partial^\infty\mu(\bar{x})$ khi và chỉ khi $(x^*, 0) \in \sum\limits_{k\in I(\bar{x},\bar{y})} \partial^\infty\varphi_k(\bar{x}, \bar{y}) + N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G)$, đây là điều phải chứng minh. □

Dưới giả thiết về tính liên tục của các hàm φ_k, ta có kết quả sau.

Định lý 2.13. *Giả sử ánh xạ G có đồ thị lồi, các hàm φ_k, $k \in J$, lồi trên $X \times Y$ và hàm giá trị tối ưu μ hữu hạn tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$. Hơn nữa giả sử φ_k liên tục tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} M$. Khi đó, $x^* \in \partial\mu(\bar{x})$ khi và chỉ khi*

$$\begin{aligned}(x^*, 0) \in \bigcup \Big\{ \sum_{k\in I(\bar{x},\bar{y})} \lambda_k \partial\varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \Big\} \\ + N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G),\end{aligned} \tag{2.26}$$

đồng thời ta có

$$\partial^\infty\mu(\bar{x}) = \Big\{ x^* \in X^* : (x^*, 0) \in \sum_{k\in I(\bar{x},\bar{y})} \partial^\infty\varphi_k(\bar{x}, \bar{y}) + N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G) \Big\}.$$

Chứng minh. Lấy tùy ý $x^* \in \partial\mu(\bar{x})$. Lập luận tương tự chứng minh Định lý 2.11, điều này có nghĩa là

$$\begin{aligned}(x^*, 0, -1) &\in N\big((\bar{x}, \bar{y}, (\varphi + \delta_{\operatorname{gph} G})(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi}\varphi \cap \operatorname{gph} G \times \mathbb{R}\big) \\ &= N\big((\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi}\varphi \cap \operatorname{gph} G \times \mathbb{R}\big).\end{aligned}$$

Từ giả thiết liên tục của các $\varphi_k, k \in J$ ta suy ra $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + 1) \in \operatorname{int}(\operatorname{epi}\varphi)$. Áp dụng Định lý 3.10 trong [48] về quy tắc nón pháp tuyến của giao của các tập, ta có $(x^*, 0, -1) \in N\big((\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi}\varphi\big) + N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G \times \mathbb{R})$. Lập luận tương tự phần cuối chứng minh Định lý 2.11, ta cũng thu được (2.23). Tiếp theo, thay

vì áp dụng Định lý 2.1, ta áp dụng Mệnh đề 1.35 để thu được (2.24). Do đó, kết hợp (2.23) và (2.24) cho ta (2.26).

Công thức tính toán dưới vi phân suy biến của μ được chứng minh tương tự chứng minh Định lý 2.12 bằng cách sử dụng giả thiết về tính liên tục của φ_k và Nhận xét 2.2. □

Ví dụ sau đây minh họa quá trình áp dụng các kết quả vừa thiết lập để xác định cấu trúc dưới vi phân của hàm giá trị tối ưu cho bài toán đa thức xấp xỉ tốt nhất theo nghĩa Chebyshev.

Ví dụ 2.14. Xét bài toán đa thức xấp xỉ tốt nhất được đề cập trong Ví dụ 1.8. Giả sử ta khảo sát tập dữ liệu gồm 20 điểm thực nghiệm ký hiệu là $(t_k, y_k)_{k=1}^{20}$. Mục tiêu của bài toán là tìm một đa thức bậc nhất $P(A,t) = a_1 + a_2 t$ xấp xỉ tốt nhất tập dữ liệu trên. Trong mô hình này, $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ đóng vai trò là biến quyết định, còn véctơ quan sát $y = (y_1, \ldots, y_{20}) \in \mathbb{R}^{20}$ đóng vai trò là tham số. Sai số xấp xỉ nhỏ nhất ứng với mỗi bộ dữ liệu y được đại diện bởi hàm giá trị tối ưu

$$\mu(y) = \min_{A \in \mathbb{R}^2} \max_{k \in \{1,\ldots,20\}} \varphi_k(y, A),$$

trong đó $\varphi_k(y, A) = |a_1 + a_2 t_k - y_k|$ và tập ràng buộc $G(y)$ là toàn bộ không gian $\mathbb{R}^{20} \times \mathbb{R}^2$ với mọi y.

Để kiểm chứng các giả thiết của Định lý 2.13, trước hết ta thấy tính lồi và tính liên tục của hàm thành phần φ_k trên $\mathbb{R}^{20} \times \mathbb{R}^2$ được suy ra trực tiếp từ tính chất của hàm trị tuyệt đối và tính tuyến tính của các toán tử thành phần. Xét tại bộ dữ liệu mẫu $\bar{y}$ và nghiệm tối ưu tương ứng A^*, theo định lý luân phiên Chebyshev (xem, chẳng hạn, [17, Chương 3]), sai số cực đại sẽ đạt được tại ít nhất $n + 2 = 3$ điểm nút. Ta ký hiệu tập các chỉ số này là $I(\bar{y}, A^*)$.

Giả sử tại điểm tham số $\bar{y}$, sai số tối ưu $\mu(\bar{y}) > 0$ và đạt được tại 3 điểm nút $k \in \{k_1, k_2, k_3\}$. Khi đó, dưới vi phân thành phần tại $(\bar{y}, A^*)$ là:

$$\partial \varphi_k(\bar{y}, A^*) = \sigma_k \cdot \left(\underbrace{-e_k}_{\text{theo tham số } y} \quad , \quad \underbrace{(1, t_k)}_{\text{theo biến } A} \right),$$

trong đó e_k là véctơ đơn vị của không gian $\mathbb{R}^{20}$ và các hệ số dấu được cho bởi

$\sigma_k = \text{sgn}(P(A^*, t_k) - \bar{y}_k) \in \{1, -1\}$. Khi đó, áp dụng Định lý 2.13, véctơ $v \in \partial\mu(\bar{y})$ khi và chỉ khi tồn tại các hệ số $\lambda_k \geq 0$ với $\sum_{k\in I(\bar{y},A^*)} \lambda_k = 1$ sao cho:

$$(v, 0) = \sum_{k\in I(\bar{y},A^*)} \lambda_k \cdot \underbrace{\sigma_k \cdot (-e_k, 1, t_k)}_{\partial\varphi_k}.$$

Như vậy, dưới vi phân v có cấu trúc rất thưa, chỉ phụ thuộc vào những điểm dữ liệu "tệ nhất". Nếu các điểm dữ liệu khác bị nhiễu nhẹ, sai số tối ưu toàn cục $\mu(y)$ vẫn không thay đổi. Trọng số λ_k chính là "tỷ trọng" ảnh hưởng của điểm dữ liệu t_k lên sai số hệ thống.

2.3 Điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán minimax không lồi có tham số

Xét bài toán minimax rời rạc có tham số (P_x) với giả thiết X, Y là các không gian Asplund và các hàm $\varphi_k, k \in J$, là các hàm chính thường.

2.3.1 Điều kiện cần và đủ tối ưu

Đầu tiên, chúng tôi trình bày điều kiện cần tối ưu sử dụng điều kiện chính quy metric cho nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_x).

Định lý 2.15 (Điều kiện cần tối ưu I)**.** *Giả sử $\bar{x} \in X$, $\varphi_k(\bar{x}, .)$, $k \in J$, là l.s.c. và $G(\bar{x})$ là một tập đóng. Hơn nữa, giả sử $\bar{y} \in Y$ là một nghiệm tối ưu địa phương của bài toán $(P_{\bar{x}})$ và*

(i) $\text{epi}\,\bar{\varphi}(\bar{x}, \cdot)$ *và $G(\bar{x}) \times \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại $(\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$, trong đó $\bar{\varphi}(x, y) := \max_{k\in I(\bar{x},\bar{y})} \varphi_k(x, y)$;*

(ii) *$\varphi_k(\bar{x}, \cdot), k \notin I(\bar{x}, \bar{y})$, là u.s.c. tại $\bar{y}$ và các tập $\text{epi}\,\varphi_k(\bar{x}, \cdot)$, $k \in I(\bar{x}, \bar{y})$, thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại $(\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$.*

Khi đó, ta có

$$0 \in \bigcup \left\{ \sum_{k\in I(\bar{x},\bar{y})} \lambda_k \circ \partial_{L,y}\varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\} + N_L(\bar{y}; G(\bar{x})), \quad (2.27)$$

trong đó $\lambda_k \circ \partial_{L,y}\varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ được định nghĩa bằng $\lambda_k \partial_{L,y}\varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ nếu $\lambda_k > 0$ và bằng $\partial^\infty_{L,y}\varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ nếu $\lambda_k = 0$.

Chứng minh. Giả sử $\bar{x} \in X$ và $\bar{y}$ là một nghiệm tối ưu địa phương của $(P_{\bar{x}})$. Xét hàm số $\psi : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ cho bởi $\psi(y) = \varphi(\bar{x}, y) + \delta_{G(\bar{x})}(y)$, trong đó $\delta_{G(\bar{x})}$ là hàm chỉ của tập $G(\bar{x})$, tức là $\delta_{G(\bar{x})}(y) = 0$ với $y \in G(\bar{x})$ và $\delta_{G(\bar{x})}(y) = +\infty$ với $y \notin G(\bar{x})$. Rõ ràng, $\bar{y}$ là một nghiệm tối ưu của bài toán $(P_{\bar{x}})$ khi và chỉ khi hàm ψ đạt cực tiểu địa phương tại $\bar{y}$. Theo Mệnh đề 1.37, ta có

$$0 \in \partial_L \psi(\bar{y}) = \partial_L\big(\varphi(\bar{x}, \cdot) + \delta_{G(\bar{x})}(\cdot)\big)(\bar{y}).$$

Điều này tương đương với

$$(0, -1) \in N_L((\bar{y}, \psi_G(\bar{y})); \operatorname{epi} \psi_G) = N_L((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \delta_{G(\bar{x})}(\bar{y})); \operatorname{epi} (\varphi(\bar{x}, \cdot) + \delta_{G(\bar{x})})).$$

Ta có $\operatorname{epi} (\varphi(\bar{x}, \cdot) + \delta_{G(\bar{x})}) = \operatorname{epi} \varphi(\bar{x}, \cdot) \cap (G(\bar{x}) \times \mathbb{R})$ và

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \delta_{G(\bar{x})}(\bar{y}) = \varphi(\bar{x}, \bar{y}).$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned}(0, -1) &\in N_L\big((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})\big); \operatorname{epi} \varphi(\bar{x}, \cdot) \cap \big(G(\bar{x}) \times \mathbb{R}\big)\big) \\ &= N_L\big((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})\big); \operatorname{epi} \bar{\varphi}(\bar{x}, \cdot) \cap \big(G(\bar{x}) \times \mathbb{R}\big)\big),\end{aligned}$$

ở đây đẳng thức cuối đúng là do tính nửa liên tục trên của $\varphi_k(\bar{x}, \cdot)$ với $k \notin I(\bar{x}, \bar{y})$. Dưới giả thiết (i), áp dụng Mệnh đề 1.44 ta được

$$\begin{aligned}(0, -1) &\in N_L\big((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi} \bar{\varphi}(\bar{x}, \cdot)\big) + N_L\big((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); G(\bar{x}) \times \mathbb{R}\big) \\ &= N_L\big((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi} \varphi(\bar{x}, \cdot)\big) + N_L\big((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); G(\bar{x}) \times \mathbb{R}\big).\end{aligned}$$

Do đó, tồn tại

$$(y_1^*, \alpha_1^*) \in N_L((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi} \varphi(\bar{x}, \cdot)) \tag{2.28}$$

và

$$(y_2^*, \alpha_2^*) \in N_L((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); G(\bar{x}) \times \mathbb{R}) \tag{2.29}$$

sao cho $(0, -1) = (y_1^*, \alpha_1^*) + (y_2^*, \alpha_2^*)$. Điều này kéo theo

$$y_1^* = -y_2^* \tag{2.30}$$

$$\alpha_1^* + \alpha_2^* = -1. \tag{2.31}$$

Một mặt, từ (2.29) ta suy ra $y_2^* \in N_L(\bar{y}; G(\bar{x}))$ và $\alpha_2^* \in N_L(\varphi(\bar{x}, \bar{y}); \mathbb{R}) = \{0\}$. Mặt khác, từ (2.28), (2.30) và (2.31) ta được

$$(y_1^*, -1) \in N_L((\bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y})); \operatorname{epi} \varphi(\bar{x}, \cdot)).$$

Do đó, $y_1^* \in \partial_{L,y}\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, và

$$0 \in \partial_{L,y}\varphi(\bar{x}, \bar{y}) + N_L(\bar{y}; G(\bar{x})). \tag{2.32}$$

Tiếp theo ta ước lượng $\partial_{L,y}\varphi(\bar{x}, \bar{y})$. Dưới giả thiết (ii), áp dụng Định lý 2.6 ta được

$$\partial_{L,y}\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \subset \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \circ \partial_{L,y}\varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\}. \tag{2.33}$$

Kết hợp (2.32) với (2.33) ta suy ra (2.27), đây là điều phải chứng minh. □

Định lý sau đây trình bày điều kiện cần cho nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_x) sử dụng điều kiện về tính liên tục Lipschitz.

Định lý 2.16 (Điều kiện cần tối ưu II)**.** *Giả sử $\bar{x} \in X$, $G(\bar{x})$ là một tập đóng và $\varphi_k(\bar{x}, \cdot)$, $k \in J$, là các hàm liên tục Lipschitz quanh $\bar{y} \in Y$. Nếu $\bar{y}$ là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_x) thì*

$$0 \in \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \partial_{L,y}\varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\} + N_L(\bar{y}; G(\bar{x})). \tag{2.34}$$

Chứng minh. Ta sẽ sử dụng lược đồ tương tự chứng minh Định lý 2.15. Giả sử $\bar{x} \in X$ và $\bar{y}$ là nghiệm tối ưu địa phương của (P_x). Xét hàm $\psi := \varphi(\bar{x}, \cdot) + \delta_{G(\bar{x})}(\cdot)$. Bằng các lập luận tương tự, ta thu được (2.10). Vì $\varphi_k(\bar{x}, \cdot)$, $k \in J$, liên tục Lipschitz quanh $\bar{y}$, ta suy ra $\varphi_k(\bar{x}, \cdot)$ là SNEC tại $\bar{x}$ (xem [47, tr. 121]) và φ liên tục Lipschitz quanh $\bar{y}$. Hơn nữa, vì $G(\bar{x})$ là tập đóng nên $\delta_{G(\bar{x})}$ là l.s.c. tại mọi $y \in G(\bar{x})$. Do đó, áp dụng quy tắc tổng cho dưới vi phân Mordukhovich (xem Mệnh đề 1.32) ta được

$$0 \in \partial_L \psi(\bar{y}) \subset \partial_{L,y}\varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \partial_L \delta_{G(\bar{x})}(\bar{y}).$$

Một mặt, $\partial_L \delta_{G(\bar{x})}(\bar{y}) = N_L(\bar{y}; G(\bar{x}))$. Mặt khác, $\varphi_k(\bar{x}, \cdot)$ là l.s.c. xung quanh $\bar{y}$ với

$k \in I(\bar{x}, \bar{y})$ và u.s.c. tại $\bar{y}$ với $k \notin I(\bar{x}, \bar{y})$ do tính liên tục Lipschitz của các hàm $\varphi_k(\bar{x}, \cdot), k \in J$. Áp dụng Mệnh đề 1.34, ta có

$$\partial_{L,y}\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \subset \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \partial_{L,y}\varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\}.$$

Vì vậy, ta thu được (2.34). □

Nhận xét 2.17. (i) Trong [18], các tác giả nghiên cứu điều kiện cần tối ưu cho bài toán tối ưu minimax, trong đó tập ràng buộc được cho bởi hữu hạn đẳng thức và bất đẳng thức dưới điều kiện liên tục Lipschitz và giả thiết SNC. Ở đây, chúng tôi xét bài toán minimax có tham số và ta thu được hai kết quả về điều kiện cần tối ưu: một dựa trên điều kiện chính quy metric và một dựa trên điều kiện liên tục Lipschitz. Mối quan hệ giữa hai loại điều kiện này vẫn chưa rõ ràng. Tuy nhiên, luận án đã trình bày một số ví dụ trong đó điều kiện chính quy metric áp dụng được nhưng điều kiện liên tục thì không thể áp dụng (xem các Ví dụ 1.42 và 2.3).

(ii) Trong bối cảnh không gian Asplund, Bao và các đồng tác giả [8] đã xét bài toán tối ưu minimax với ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc hình học, với giả thiết các hàm không khả vi và không Lipschitz. Trong đó, các tác giả trình bày điều kiện cần tối ưu theo dưới vi phân của hàm ràng buộc và hàm mục tiêu và điều kiện tối ưu dạng mờ (fuzzy form). Các điều kiện bổ sung được sử dụng trong bài báo trên là tính chất SNC và điều kiện chính quy pháp tuyến

$$\partial^{\infty}_{L,y}\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \cap \big(- N_L(\bar{y}; G(\bar{x})\big) = \{0\}. \tag{2.35}$$

Lưu ý rằng, điều kiện chính quy metric (MQC) thực sự yếu hơn điều kiện (2.35) như đã được chỉ ra trong [51, Mệnh đề 3.7].

Định lý tiếp theo thiết lập điều kiện đủ cho nghiệm tối ưu của bài toán (P_x).

Định lý 2.18 (Điều kiện đủ tối ưu)**.** *Giả sử $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in G(\bar{x})$ và điều kiện* (2.27) *được thỏa mãn. Nếu $\varphi_k(\bar{x}, \cdot)$, $k \in J$, là các hàm lồi và $G(\bar{x})$ là một tập lồi, thì $\bar{y}$ là một nghiệm toàn cục của bài toán $(P_{\bar{x}})$, tức là $\bar{y} \in M(\bar{x})$.*

Chứng minh. Vì $(\bar{x}, \bar{y})$ thỏa mãn (2.27), nên tồn tại $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y})$ và

$y_k^* \in \lambda_k \circ \partial_{L,y}\varphi_k(\bar{x},\bar{y})$, $k \in I(\bar{x},\bar{y})$, sao cho

$$-\sum_{k\in I(\bar{x},\bar{y})} y_k^* \in N_L(\bar{y}; G(\bar{x})). \tag{2.36}$$

Giả sử phản chứng, $\bar{y}$ không phải là nghiệm toàn cục của $(P_{\bar{x}})$. Khi đó, tồn tại $\hat{y} \in G(\bar{x})$ sao cho

$$\varphi(\bar{x},\bar{y}) > \varphi(\bar{x},\hat{y}). \tag{2.37}$$

Do tính lồi của $G(\bar{x})$ và (2.36), nên ta có

$$\left\langle \sum_{k\in I(\bar{x},\bar{y})} y_k^*, \hat{y}-\bar{y} \right\rangle \geq 0. \tag{2.38}$$

Với mỗi $k \in I(\bar{x},\bar{y})$, ta xét hai trường hợp sau đây:

Trường hợp 1. $\lambda_k > 0$. Vì $y_k^* \in \lambda_k \circ \partial_{L,y}\varphi_k(\bar{x},\bar{y}) = \lambda_k \partial_{L,y}\varphi_k(\bar{x},\bar{y})$, nên ta có

$$\frac{y_k^*}{\lambda_k} \in \partial_{L,y}\varphi_k(\bar{x},\bar{y}).$$

Do tính lồi của $\varphi_k(\bar{x},\cdot)$, nên

$$\varphi_k(\bar{x},\hat{y}) - \varphi_k(\bar{x},\bar{y}) \geq \left\langle \frac{y_k^*}{\lambda_k}, \hat{y}-\bar{y} \right\rangle,$$

hay tương đương với

$$\lambda_k[\varphi_k(\bar{x},\hat{y}) - \varphi_k(\bar{x},\bar{y})] \geq \langle y_k^*, \hat{y}-\bar{y}\rangle. \tag{2.39}$$

Trường hợp 2. $\lambda_k = 0$. Khi đó, $y_k^* \in \partial^\infty_{L,y}\varphi_k(\bar{x},\bar{y})$. Do (2.37) nên $\hat{y} \in \operatorname{dom}\varphi(\bar{x},\cdot)$. Hơn nữa, theo Mệnh đề 1.31, ta có

$$\partial^\infty_{L,y}\varphi_k(\bar{x},\bar{y}) = N_L(\bar{y}; \operatorname{dom}\varphi(\bar{x},\cdot)).$$

Do đó, ta có

$$\langle y_k^*, \hat{y}-\bar{y}\rangle \leq 0. \tag{2.40}$$

Từ (2.38) và (2.40), ta suy ra

$$\left\langle \sum_{k\in I(\bar{x},\bar{y}),\lambda_k>0} y_k^*, \hat{y}-\bar{y} \right\rangle \geq -\left\langle \sum_{k\in I(\bar{x},\bar{y}),\lambda_k=0} y_k^*, \hat{y}-\bar{y} \right\rangle \geq 0.$$

Kết hợp với (2.39) ta thu được

$$\sum_{k\in I(\bar{x},\bar{y}),\lambda_k>0} \lambda_k[\varphi_k(\bar{x},\hat{y}) - \varphi_k(\bar{x},\bar{y})] \geq 0,$$

hay tương đương với

$$\sum_{k\in J} \lambda_k[\varphi_k(\bar{x},\hat{y}) - \varphi_k(\bar{x},\bar{y})] \geq 0. \tag{2.41}$$

Một mặt, vì $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \Lambda(\bar{x},\bar{y})$ nên ta suy ra $\sum_{k\in J}\lambda_k\varphi_k(\bar{x},\bar{y}) = \varphi(\bar{x},\bar{y})$ và $\varphi(\bar{x},\hat{y}) \geq \sum_{k\in J}\lambda_k\varphi_k(\bar{x},\hat{y})$. Mặt khác, lưu ý đến (2.41) ta được $\varphi(\bar{x},\hat{y}) \geq \varphi(\bar{x},\bar{y})$. Điều này mâu thuẫn với (2.37). Vậy $\bar{y}$ là một nghiệm toàn cục của bài toán $(P_{\bar{x}})$. □

Nhận xét 2.19. Điều kiện đủ tối ưu cho bài toán tối ưu minimax cũng đã được nghiên cứu trong [18] bằng cách sử dụng giả thiết về L-invexity-infineness. Mặc dù lớp các hàm L-invex-infine chứa một số hàm không lồi nhưng nói chung điều kiện này rất khó kiểm tra.

Phần cuối của tiểu mục dành để trình bày ứng dụng của các định lý điều kiện tối ưu vừa thiết lập. Từ các kết quả cho bài toán minimax, chúng tôi sẽ vận dụng để suy ra các điều kiện tối ưu tương ứng cho bài toán đa mục tiêu.
Xét bài toán tối ưu đa mục tiêu có tham số

$$\mathrm{Min}_{\mathbb{R}^m_+}\{(\varphi_1(x,y),\ldots,\varphi_m(x,y)) \,|\, y \in G(x)\}, \tag{MOP_x}$$

trong đó x là tham số và $\mathbb{R}^m_+$ là orthant không âm của $\mathbb{R}^m$. Điểm $\bar{y} \in G(x)$ được gọi là một *nghiệm Pareto yếu* của bài toán (MOP_x) nếu không tồn tại $y \in G(x)$ sao cho

$$\varphi_k(x,y) < \varphi_k(x,\bar{y}), \quad \forall k \in J.$$

Ta sẽ bắt đầu với các hệ quả về điều kiện cần cho nghiệm Pareto yếu của bài toán (MOP_x). Hệ quả sau đây sử dụng điều kiện chính quy metric.

Hệ quả 2.20. *Cho $\bar{x} \in X$ và $\bar{y} \in G(\bar{x})$. Giả sử rằng tất cả các giả thiết của Định lý 2.15 được thỏa mãn. Nếu $\bar{y}$ là nghiệm Pareto yếu của bài toán $(MOP_{\bar{x}})$ thì tồn tại $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in \mathbb{R}^m_+$, $\sum\limits_{k\in J}\alpha_k = 1$ sao cho*

$$0 \in \sum_{k\in J} \alpha_k \circ \partial_{L,y}\varphi_k(\bar{x},\bar{y}) + N_L(\bar{y}; G(\bar{x})). \tag{2.42}$$

Chứng minh. Giả sử $\bar{y}$ là nghiệm Pareto yếu của bài toán $(MOP_{\bar{x}})$. Với mỗi $y \in Y$ và $k \in J$, ta đặt

$$\widetilde{\varphi}_k(\bar{x}, y) := \varphi_k(\bar{x}, y) - \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}).$$

Ta sẽ chỉ ra rằng $\bar{y}$ là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán tối ưu minimax

$$\min_{y \in G(\bar{x})} \max_{k \in J} \widetilde{\varphi}_k(\bar{x}, y). \tag{2.43}$$

Thật vậy, đặt $\widetilde{\varphi}(\bar{x}, \cdot) := \max_{k \in J} \widetilde{\varphi}_k(\bar{x}, \cdot)$. Vì $\bar{y}$ là nghiệm Pareto yếu của $(MOP_{\bar{x}})$ nên không tồn tại $y \in G(\bar{x})$ sao cho

$$\varphi_k(\bar{x}, y) < \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}) \ \ \forall k \in J.$$

Suy ra, với mỗi $y \in G(\bar{x})$, tồn tại $k_0 \in J$ sao cho

$$\varphi_{k_0}(\bar{x}, y) \geq \varphi_{k_0}(\bar{x}, \bar{y}),$$

hay tương đương

$$\widetilde{\varphi}(\bar{x}, y) \geq \widetilde{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

với mọi $y \in G(\bar{x})$. Do đó $\bar{y}$ là một nghiệm tối ưu địa phương của bài toán(2.43). Bây giờ ta áp dụng Định lý 2.15 cho bài toán (2.43), trong đó $\widetilde{\varphi}_k$ và $\widetilde{\varphi}$ lần lượt đóng vai trò của φ_k và φ. Khi đó, tồn tại $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m_+$, $\sum\limits_{k \in J} \alpha_k = 1$ thỏa mãn

$$0 \in \sum_{k \in J} \alpha_k \circ \partial_{L,y} \widetilde{\varphi}_k(\bar{x}, \bar{y}) + N_L(\bar{y}; G(\bar{x})).$$

Rõ ràng, $\partial_{L,y} \widetilde{\varphi}_k(\bar{x}, \bar{y}) = \partial_{L,y} \varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ với mọi $k \in J$ và do đó ta được (2.42). □

Hệ quả tiếp theo sử dụng điều kiện liên tục Lipschitz.

Hệ quả 2.21. *Cho $\bar{x} \in X$ và $\bar{y} \in G(\bar{x})$. Giả sử rằng tất cả các giả thiết của Định lý 2.16 đều thỏa mãn. Nếu $\bar{y}$ là nghiệm Pareto yếu của $(MOP_{\bar{x}})$ thì tồn tại $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m_+$, $\sum\limits_{k \in J} \alpha_k = 1$ sao cho*

$$0 \in \sum_{k \in J} \alpha_k \partial_{L,y} \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}) + N_L(\bar{y}; G(\bar{x})).$$

Chứng minh. Sử dụng lược đồ trong chứng minh Hệ quả 2.20 và áp dụng Định

lý 2.16 thay cho Định lý 2.15 ta thu được điều phải chứng minh. □

Ta kết thúc phần này với kết quả về điều kiện đủ cho nghiệm Pareto yếu của bài toán (MOP_x) sử dụng tính lồi.

Hệ quả 2.22. *Cho $\bar{x} \in X$ và $\bar{y} \in G(\bar{x})$. Giả sử $\varphi_k(\bar{x}, \cdot)$, $k \in J$, là các hàm lồi và G là ánh xạ đa trị lồi. Nếu tồn tại $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m_+$, $\sum\limits_{k\in J} \alpha_k = 1$ thỏa mãn điều kiện (2.42) thì $\bar{y}$ là một nghiệm Pareto yếu của bài toán $(MOP_{\bar{x}})$.*

Chứng minh. Lập luận tương tự chứng minh của Hệ quả 2.20, ta đặt

$$\widetilde{\varphi}_k(\bar{x}, y) := \varphi_k(\bar{x}, y) - \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), \quad k \in J,\, y \in Y$$

và

$$\widetilde{\varphi}(\bar{x}, \cdot) := \max_{k\in J} \widetilde{\varphi}_k(\bar{x}, \cdot).$$

Rõ ràng, $\widetilde{\varphi}_k(\bar{x}, \cdot)$, $k \in J$, là các hàm lồi. Do đó, ta áp dụng Định lý 2.18 để suy ra $\bar{y}$ là nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán (2.43), tức là

$$\widetilde{\varphi}(\bar{x}, y) \geq 0 \;\; \forall y \in G(\bar{x}),$$

hay tương đương

$$\max_{k\in J}\{\varphi_k(\bar{x}, y) - \varphi_k(\bar{x}, \bar{y})\} \geq 0 \;\; \forall y \in G(\bar{x}).$$

Do đó, không tồn tại $y \in G(\bar{x})$ thỏa mãn

$$\varphi_k(\bar{x}, y) < \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}) \;\; \forall k \in J.$$

Suy ra $\bar{y}$ là nghiệm Pareto yếu của bài toán $(MOP_{\bar{x}})$. □

2.3.2 Phân tích độ nhạy nghiệm

Trong phần này, chúng tôi trình bày ước lượng trên cho dưới vi phân Mordukhovich của hàm giá trị tối ưu μ của bài toán (P_x). Các ước lượng này được thiết lập thông qua dưới vi phân Mordukhovich của $\varphi_k, k \in J$, và nón pháp tuyến Mordukhovich của gph G.

Trước hết nhắc lại rằng ánh xạ nghiệm $M : X \rightrightarrows Y$ của bài toán tối ưu có tham số (P_x) được gọi là *μ-nửa liên tục nội bộ* hay *μ-nửa liên tục trong* (μ-inner

semicontinuous) tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} M$ nếu với mỗi dãy $x_k \xrightarrow{\mu} \bar{x}$, tồn tại dãy $y_k \in M(x_k)$ hội tụ tới $\bar{y}$ khi $k \to +\infty$. Tính chất này là một mở rộng của các khái niệm tương ứng trong [47, Định nghĩa 1.63] và áp dụng chúng cho ánh xạ nghiệm M của (P_x). Điểm khác biệt là điều kiện $x_k \to \bar{x}$ trong [47] được thay thế bởi điều kiện yếu hơn là $x_k \xrightarrow{\mu} \bar{x}$. Điều này không ảnh hưởng gì đến kết luận của [47, Định lý 1.108] về biểu diễn dưới vi phân của hàm giá trị tối ưu thông qua dưới vi phân của hàm mục tiêu, như đã phân tích trong [50].

Định lý 2.23. *Xét bài toán (P_x). Giả sử G có đồ thị đóng, φ_k, $k \in J$, là l.s.c., hàm giá trị tối ưu μ nhận giá trị hữu hạn tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$ và $\bar{y} \in M(\bar{x})$. Hơn nữa, giả sử*

(i) *Ánh xạ nghiệm M là μ-nửa liên tục nội bộ tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} M$;*

(ii) $\operatorname{epi} \bar{\varphi}$ *và* $\operatorname{gph} G \times \mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$, *trong đó* $\bar{\varphi} := \max_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \varphi_k$;

(iii) $\varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ *là l.s.c. quanh* $(\bar{x}, \bar{y})$ *với* $k \in I(\bar{x}, \bar{y})$ *và u.s.c. tại* $(\bar{x}, \bar{y})$ *với* $k \notin I(\bar{x}, \bar{y})$, $\operatorname{epi} \varphi_k$ *thỏa mãn điều kiện* (MQC) *tại* $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$.

Khi đó nếu $x^* \in \partial_L \mu(\bar{x})$ thì

$$(x^*, 0) \in \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \circ \partial_L \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\} + N_L((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G), \tag{2.44}$$

trong đó $\lambda_k \circ \partial_L \varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ được định nghĩa bằng $\lambda_k \partial_L \varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ nếu $\lambda_k > 0$ và bằng $\partial_L^\infty \varphi_k(\bar{x}, \bar{y})$ nếu $\lambda_k = 0$.

Chứng minh. Vì ánh xạ nghiệm M là μ-nửa liên tục nội bộ tại $(\bar{x}, \bar{y})$, nên áp dụng [47, Định lý 1.108] cho bài toán tối ưu không ràng buộc với hàm mục tiêu là $\varphi + \delta_{\operatorname{gph} G}$ ta suy ra

$$\partial_L \mu(\bar{x}) \subset \{x^* \in X^* : (x^*, 0) \in \partial_L(\varphi + \delta_{\operatorname{gph} G})(\bar{x}, \bar{y})\}. \tag{2.45}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh

$$\partial_L(\varphi + \delta_{\operatorname{gph} G})(\bar{x}, \bar{y}) \subset \partial_L \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \partial_L \delta_{\operatorname{gph} G}(\bar{x}, \bar{y}) \tag{2.46}$$

dưới điều kiện (ii). Thật vậy, lấy bất kỳ $(u^*,0)\in\partial_L(\varphi+\delta_{\operatorname{gph} G})(\bar{x},\bar{y})$. Khi đó

$$(u^*,0,-1)\in N_L\Big(\big(\bar{x},\bar{y},(\varphi+\delta_{\operatorname{gph} G})(\bar{x},\bar{y})\big);\operatorname{epi}(\varphi+\delta_{\operatorname{gph} G})\Big). \tag{2.47}$$

Lập luận tương tự trong chứng minh Định lý 2.15, ta có thể khẳng định $(\varphi+\delta_{\operatorname{gph} G})(\bar{x},\bar{y})=\varphi(\bar{x},\bar{y})$ và $\operatorname{epi}(\varphi+\delta_{\operatorname{gph} G})=\operatorname{epi}\varphi\cap\operatorname{gph} G\times\mathbb{R}$. Do đó, (2.47) được viết lại như sau

$$\begin{aligned}(u^*,0,-1)&\in N_L\big(\big(\bar{x},\bar{y},\varphi(\bar{x},\bar{y})\big);\operatorname{epi}\varphi\cap(\operatorname{gph} G\times\mathbb{R})\big)\\&=N_L\big(\big(\bar{x},\bar{y},\varphi(\bar{x},\bar{y})\big);\operatorname{epi}\bar{\varphi}\cap(\operatorname{gph} G\times\mathbb{R})\big).\end{aligned} \tag{2.48}$$

Lưu ý rằng $\operatorname{epi}\bar{\varphi}=\bigcap\limits_{k\in J}\operatorname{epi}\varphi_k$. Do giả thiết (ii), (iii) nên theo Mệnh đề 1.44 ta có

$$\begin{aligned}N_L\big(\big(\bar{x},\bar{y},\varphi(\bar{x},\bar{y})\big);\operatorname{epi}\bar{\varphi}\cap(\operatorname{gph} G\times\mathbb{R})\big)&\subset N_L((\bar{x},\bar{y},\varphi(\bar{x},\bar{y}));\operatorname{epi}\bar{\varphi})\\&\quad+N_L((\bar{x},\bar{y},\varphi(\bar{x},\bar{y}));\operatorname{gph} G\times\mathbb{R})\\&=N_L((\bar{x},\bar{y},\varphi(\bar{x},\bar{y}));\operatorname{epi}\varphi)\\&\quad+N_L((\bar{x},\bar{y},\varphi(\bar{x},\bar{y}));\operatorname{gph} G\times\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Kết hợp với (2.48) cho ta

$$(u^*,0,-1)\in N_L((\bar{x},\bar{y},\varphi(\bar{x},\bar{y});\operatorname{epi}\varphi)+N_L((\bar{x},\bar{y},\varphi(\bar{x},\bar{y}));\operatorname{gph} G\times\mathbb{R}).$$

Do đó, tồn tại bộ ba $(u_1^*,v_1^*,\alpha_1)\in N_L((\bar{x},\bar{y},\varphi(\bar{x},\bar{y});\operatorname{epi}\varphi))$ và bộ ba $(u_2^*,v_2^*,\alpha_2)\in N_L((\bar{x},\bar{y},\varphi(\bar{x},\bar{y});\operatorname{gph} G\times\mathbb{R})$ sao cho

$$u^*=u_1^*+u_2^*;\ 0=v_1^*+v_2^*;\ -1=\alpha_1+\alpha_2. \tag{2.49}$$

Vì $N_L((\bar{x},\bar{y},\varphi(\bar{x},\bar{y});\operatorname{gph} G\times\mathbb{R})=N_L((\bar{x},\bar{y});\operatorname{gph} G)\times N_L(\varphi(\bar{x},\bar{y});\mathbb{R})$, nên $\alpha_2=0$. Do đó, $\alpha_1=-1$. Từ đó ta suy ra $(u_1^*,v_1^*,-1)\in N_L((\bar{x},\bar{y},\varphi(\bar{x},\bar{y});\operatorname{epi}\varphi))$ và $(u_2^*,-v_1^*)\in N_L((\bar{x},\bar{y});\operatorname{gph} G)$. Điều đó chứng tỏ rằng $(u_1^*,v_1^*)\in\partial_L\varphi(\bar{x},\bar{y})$ và $(u_2^*,-v_1^*)\in\partial_L\delta_{\operatorname{gph} G}(\bar{x},\bar{y})$. Kết hợp với (2.49), ta được

$$(u^*,0)\in\partial_L\varphi(\bar{x},\bar{y})+\partial_L\delta_{\operatorname{gph} G}(\bar{x},\bar{y}),$$

như vậy ta đã chứng minh được (2.46). Bây giờ ta viết lại (2.45) như sau

$$\partial_L \mu(\bar{x}) \subset \{x^* \in X^* : (x^*, 0) \in \partial_L \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \partial_L \delta_{\operatorname{gph} G}(\bar{x}, \bar{y})\}.$$

Một mặt, với điều kiện (iii) ta áp dụng Định lý 2.6 để suy ra

$$\partial_L \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \subset \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \circ \partial_L \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\}.$$

Mặt khác, $\partial_L \delta_{\operatorname{gph} G}(\bar{x}, \bar{y}) = N_L((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G)$. Do đó, ta thu được (2.44). □

Dưới giả thiết về tính liên tục Lipschitz của các hàm φ_k, ta có kết quả sau.

Định lý 2.24. *Xét bài toán (P_x). Giả sử hàm giá trị tối ưu μ cho bởi (1.2) nhận giá trị hữu hạn tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$ và $\bar{y} \in M(\bar{x})$. Hơn nữa, giả sử rằng G có đồ thị đóng, φ_k liên tục Lipschitz quanh $(\bar{x}, \bar{y})$ với $k \in J$ và ánh xạ nghiệm M là μ-nửa liên tục nội bộ tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} M$. Khi đó, nếu $x^* \in \partial_L \mu(\bar{x})$ thì*

$$(x^*, 0) \in \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \partial_L \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\} + N_L((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G).$$

Chứng minh. Sử dụng lập luận tương tự như trong chứng minh Định lý 2.23, ta cũng thu được (2.45). Vì φ_k liên tục Lipschitz quanh $(\bar{x}, \bar{y})$ nên φ cũng có tính chất này. Điều này kéo theo φ là SNEC tại $(\bar{x}, \bar{y})$ (xem [47, tr. 121]). Thêm vào đó, $\delta_{\operatorname{gph} G}$ là l.s.c. do tính đóng của $\operatorname{gph} G$. Vì vậy, sử dụng quy tắc tổng cho dưới vi phân Mordukhovich trong Mệnh đề 1.32 ta được

$$\partial_L(\varphi + \delta_{\operatorname{gph} G})(\bar{x}, \bar{y}) \subset \partial_L \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \partial_L \delta_{\operatorname{gph} G}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Do đó

$$\partial_L \mu(\bar{x}) \subset \{x^* \in X^* : (x^*, 0) \in \partial_L \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \partial_L \delta_{\operatorname{gph} G}(\bar{x}, \bar{y})\}.$$

Lưu ý rằng $\partial_L \delta_{\operatorname{gph} G}(\bar{x}, \bar{y}) = N_L((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G)$. Hơn nữa, φ_k thỏa mãn điều kiện l.s.c. quanh $(\bar{x}, \bar{y})$ với $k \in I(\bar{x}, \bar{y})$ và u.s.c. tại $(\bar{x}, \bar{y})$ với $k \notin I(\bar{x}, \bar{y})$ do giả thiết liên

tục Lipschitz quanh $(\bar{x}, \bar{y})$ với $k \in J$ của φ_k. Áp dụng Mệnh đề 1.34 ta được

$$\partial_L \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \subset \bigcup \left\{ \sum_{k \in I(\bar{x}, \bar{y})} \lambda_k \partial_L \varphi_k(\bar{x}, \bar{y}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \right\}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Ví dụ 2.25. Giả sử $X = Y := \mathbb{R}$ và $J := \{1, 2\}$. Xét các hàm $\varphi_1(x, y) := |y| - x$, $\varphi_2(x, y) := -|y| + x^2$ và ánh xạ đa trị $G(x) := \{y \in \mathbb{R} : y^2 \leq x^2 + 1\}$ có đồ thị đóng. Xét bài toán

$$\min_{y \in G(x)} \max_{k \in J} \varphi_k(x, y),$$

Đặt $\varphi(x, y) := \max_{k \in J} \varphi_k(x, y)$, hàm $\mu(x) := \inf_{y \in G(x)} \varphi(x, y)$ và ánh xạ nghiệm $M(x) := \arg\min_{y \in G(x)} \varphi(x, y)$. Rõ ràng, φ_1 là hàm lồi và φ_2 là hàm không lồi. Cả hai hàm đều liên tục Lipschitz địa phương trên $\mathbb{R}^2$.

Xét tại điểm $\bar{x} = 0$. Ta có

$$\varphi(0, y) = \max\{\varphi_1(0, y), \varphi_2(0, y)\} = \max\{|y|, -|y|\} = |y|.$$

Mặt khác, $G(0) = \{y \in \mathbb{R} : |y| \leq 1\}$. Do đó, nghiệm tối ưu đạt tại $\bar{y} = 0$ và $\mu(0) = 0,\ M(0) = \{0\}$. Hơn nữa, do $\varphi_1(0, 0) = \varphi_2(0, 0) = 0$ nên suy ra tập chỉ số hoạt tại $(\bar{x}, \bar{y})$ là $I(\bar{x}, \bar{y}) = \{1, 2\}$. Trong một lân cận của $(0, 0)$, ta có

$$\varphi(x, y) = \max\{|y| - x,\ -|y| + x^2\} = \begin{cases} |y| - x, & \text{nếu } |y| \geq \dfrac{x + x^2}{2}, \\ -|y| + x^2, & \text{nếu } |y| \leq \dfrac{x + x^2}{2}. \end{cases}$$

Vì $G(x) = \{y :\ |y| \leq \sqrt{x^2 + 1}\}$, đặt $t = |y|$, ta được

$$\mu(x) = \min_{0 \leq t \leq \sqrt{x^2+1}} \max\{t - x, -t + x^2\}.$$

Xét hai hàm $f_1(t) = t - x, f_2(t) = -t + x^2$. Ta có f_1 tăng theo t còn f_2 giảm theo t nên giá trị nhỏ nhất đạt được tại giao điểm của hai hàm nếu điểm này thuộc miền ràng buộc. Giải phương trình $t - x = -t + x^2$ thu được $t_0 = \frac{x+x^2}{2}$.

Nếu $x \geq 0$ đủ nhỏ thì $t_0 \in [0, \sqrt{x^2 + 1}]$, do đó

$$\mu(x) = t_0 - x = \frac{x + x^2}{2} - x = \frac{x^2 - x}{2}.$$

Nếu $x < 0$ đủ gần 0 thì $t_0 < 0$, do đó giá trị nhỏ nhất đạt tại $t = 0$. Ta suy ra $\mu(x) = \max\{-x, x^2\} = -x$. Vì vậy, trong một lân cận của 0 ta có

$$\mu(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ \dfrac{x^2 - x}{2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra $\partial_L \mu(0) = \{-1, -\frac{1}{2}\}$. Mặt khác ta có

$$\partial_L \varphi_1(0,0) = \{(-1, \eta) \mid \eta \in [-1, 1]\},$$

và

$$\partial_L \varphi_2(0,0) = \{(0, \xi) \mid \xi \in \{-1, 1\}\}.$$

Vì $y^2 \leq x^2 + 1$ là bất đẳng thức chặt tại $(0,0)$, nên $(0,0)$ là điểm trong của $\operatorname{gph} G$ nên $N_L((0,0); \operatorname{gph} G) = \{(0,0)\}$. Theo Định lý 2.24, với mọi $x^* \in \partial_L \mu(0)$ tồn tại $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y})$, $\eta \in [-1, 1]$, $\xi \in \{-1, 1\}$ sao cho

$$(x^*, 0) \in \lambda_1(-1, \eta) + \lambda_2(0, \xi).$$

Suy ra $x^* = -\lambda_1, 0 \leq \lambda_1 \leq 1$, nên $x^* \in [-1, -\frac{1}{2}]$. Vì $\partial_L \mu(0) = \{-1, -\frac{1}{2}\} \subset [-1, -\frac{1}{2}]$ nên kết quả của Định lý 2.24 là phù hợp.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Chương 2 đã trình bày các kết quả chính của luận án về bài toán tối ưu minimax có tham số. Cụ thể, chương đã thiết lập quy tắc dưới vi phân của hàm maximum dưới điều kiện chính quy metric, qua đó mở rộng và bổ sung cho các kết quả tương ứng dưới giả thiết liên tục đã được trình bày ở Chương 1. Trên cơ sở này, các điều kiện cần và đủ tối ưu cấp một cho bài toán đang xét đã được xây dựng một cách hệ thống. Bên cạnh đó, chương cũng tiến hành phân tích độ nhạy nghiệm trong cả hai trường hợp: lồi và không lồi, thông qua đánh giá dưới vi phân của hàm giá trị tối ưu. Các hướng mở rộng tiếp theo là nghiên cứu điều kiện tối ưu và độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu minimax với dữ liệu gần lồi (nearly convex), hoặc nghiên cứu độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu minimax liên tục có tham số.

Chương 3

Đặc trưng nghiệm cho bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến

Phần đầu chương này trình bày định nghĩa cấu trúc thứ tự hai biến. Đây là khái niệm mở rộng của khái niệm cấu trúc thứ tự thay đổi thông thường. Phần tiếp theo nghiên cứu các tính chất liên quan, định nghĩa các khái niệm nghiệm tối ưu dựa trên cấu trúc thứ tự hai biến, so sánh với các định nghĩa và các tính chất đã có dựa trên cấu trúc thứ tự thay đổi thông thường. Phần cuối chương trình bày cách tiếp cận sử dụng hàm vô hướng hóa phi tuyến để thu được điều kiện cần và đủ cho nghiệm địa phương của bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến. Các kết quả trong chương này đã được công bố trong bài báo (CT3) trong danh mục công trình liên quan đến luận án (xem trang 101).

3.1 Cấu trúc thứ tự hai biến

3.1.1 Định nghĩa và các tính chất

Trong phần này, chúng tôi định nghĩa cấu trúc thứ tự hai biến trên không gian véctơ tôpô thực Y và nghiên cứu tính chất liên quan. Cụ thể, xét ánh xạ đa trị $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$ thỏa mãn $\operatorname{dom} C = Y \times Y$, tức là, $C(y_1, y_2)$ khác rỗng với mọi $(y_1, y_2) \in Y \times Y$.

Định nghĩa 3.1. Giả sử $y_1, y_2 \in Y$. Ta định nghĩa

$$y_1 \leq^C y_2 \Leftrightarrow y_2 \in y_1 + C(y_1, y_2). \tag{3.1}$$

Ánh xạ đa trị C được gọi là *ánh xạ thứ tự hai biến* và $\leq^C$ được gọi là *cấu trúc thứ tự hai biến* trên Y. Ở đây, ký hiệu $y_1 + C(y_1, y_2)$ được hiểu theo nghĩa tổng Minkowski $\{y_1\} + C(y_1, y_2)$, tức là: $y_1 + C(y_1, y_2) := \{y_1 + z : z \in C(y_1, y_2)\}$.

Nhận xét 3.2. (i) Định nghĩa trên bao hàm các cấu trúc thứ tự thay đổi đã có là $\leq_1^{\mathcal{D}}$ và $\leq_2^{\mathcal{D}}$ được nghiên cứu bởi Eichfelder trong [21]. Thật vậy, nếu ta định nghĩa $C_1^{\mathcal{D}}(y_1, y_2) := \mathcal{D}(y_1)$ thì $\leq^{C_1^{\mathcal{D}}}$ trùng với $\leq_1^{\mathcal{D}}$. Tương tự, nếu ta chọn $C_2^{\mathcal{D}}(y_1, y_2) := \mathcal{D}(y_2)$ thì $\leq^{C_2^{\mathcal{D}}}$ đồng nhất với $\leq_2^{\mathcal{D}}$. Do đó, các tính chất và các khái niệm tối ưu liên quan đến $\leq_1^{\mathcal{D}}$ và $\leq_2^{\mathcal{D}}$ sẽ được bao hàm trong các tính chất và khái niệm tương ứng dựa trên quan hệ (3.1) và các ánh xạ thứ tự hai biến $C_1^{\mathcal{D}}$ và $C_2^{\mathcal{D}}$.

(ii) *Quan hệ ưu tiên công bằng* (equitability preference) trong mô hình hóa bài toán tối ưu danh mục đầu tư và bài toán xác định vị trí tối ưu (xem [24]) là một ví dụ cho thấy ứng dụng của cấu trúc thứ tự hai biến. Trong trường hợp hai mục tiêu, ta ký hiệu các tập

$$\begin{aligned}
S_1 &:= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 - y_2 \geq 0\},\\
S_2 &:= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_2 - y_1 \geq 0\},\\
D_1 &:= \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : d_1 \geq 0,\ d_1 + d_2 \geq 0\},\\
D_2 &:= \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : d_2 \geq 0,\ d_1 + d_2 \geq 0\},
\end{aligned}$$

và hàm hoán vị $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi $p(y_1, y_2) = (y_2, y_1)$ với mọi $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Khi đó, quan hệ ưu tiên công bằng, ký hiệu là $\leq_e$, xác định như sau:

$$y^1 \leq_e y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y^1 \in -D_1 & \text{nếu} \quad y^1, y^2 \in S_1, \\ y^2 - y^1 \in -D_2 & \text{nếu} \quad y^1, y^2 \in S_2, \\ p(y^2) - y^1 \in -D_1 & \text{nếu} \quad y^1 \in S_1,\ y^2 \in S_2, \\ p(y^2) - y^1 \in -D_2 & \text{nếu} \quad y^1 \in S_2,\ y^2 \in S_1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Như vậy, tình huống $y^1 \leq_e y^2$ không chỉ phụ thuộc vào hiệu $y^2 - y^1$ hoặc $p(y^2) - y^1$ mà còn phụ thuộc vào vị trí của hai điểm y^1, y^2 trong các tập S_1 và S_2. Do đó, ta biểu diễn quan hệ (3.2) bằng cách xét $Y = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ và ánh xạ đa trị $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$ sau đây:

$$C((y^1, v^1), (y^2, v^2)) = \begin{cases} \{(d, e) \in Y :\ d \in -D_1\} & \text{nếu} \quad y^1, y^2 \in S_1, \\ \{(d, e) \in Y :\ d \in -D_2\} & \text{nếu} \quad y^1, y^2 \in S_2, \\ \{(d, e) \in Y :\ e \in -D_1\} & \text{nếu} \quad y^1 \in S_1,\ y^2 \in S_2, \\ \{(d, e) \in Y :\ e \in -D_2\} & \text{nếu} \quad y^1 \in S_2,\ y^2 \in S_1. \end{cases}$$

Khi đó, dễ dàng kiểm tra rằng $y^1 \leq_e y^2$ khi và chỉ khi $(y^1, y^1) \leq^C (y^2, p(y^2))$. Quan hệ hai ngôi $\leq^C$ xác định như trên là một cấu trúc thứ tự hai biến trên Y. Dựa trên cấu trúc thứ tự này, khái niệm về điểm không trội theo nghĩa công bằng sẽ được trình bày trong Mục 3.1.2, điều kiện cần và đủ để một điểm là không trội theo nghĩa công bằng sẽ được khảo sát trong Ví dụ 3.30.

Tiếp theo, để nghiên cứu các tính chất của ánh xạ thứ tự hai biến C, ta định nghĩa hai ánh xạ đa trị $D_C, I_C : Y \rightrightarrows Y$ như sau:

$$D_C(y) := \{d \in Y : y \leq^C y + d\},$$
$$I_C(y) := \{d \in Y : y - d \leq^C y\}.$$

Bổ đề tiếp theo trình bày một số tính chất liên quan đến ánh xạ D_C, I_C.

Bổ đề 3.3. *Các tính chất sau đây là đúng:*

(i) *Với mọi $y, z \in Y$,*

$$y \leq^C z \Leftrightarrow z \in y + D_C(y) \Leftrightarrow y \in z - I_C(z).$$

(ii) *$D_C(y)$ và $I_C(y)$ có thể biểu diễn dưới dạng*

$$D_C(y) = \bigcup_{d \in Y} [\{d\} \cap C(y, y + d)] \tag{3.3}$$

và

$$I_C(y) = \bigcup_{d \in Y} [\{d\} \cap C(y - d, y)]. \tag{3.4}$$

Ngoài ra, $d \in D_C(y) \Leftrightarrow d \in I_C(y + d)$, $d \in I_C(y) \Leftrightarrow d \in D_C(y - d)$.

(iii) *Xét ánh xạ đa trị $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$. Khi đó $D_{C_1^{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}$ (tương ứng, $I_{C_2^{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}$).*

Chứng minh. (i) Trước hết ta chứng minh rằng

$$y \leq^C z \Leftrightarrow z \in y + D_C(y).$$

Thật vậy, giả sử $y \leq^C z$, tức là $z - y \in C(y, z)$. Khi đó tồn tại $d \in C(y, z)$ sao cho $z = y + d$. Do đó, $y \leq^C y + d$ nên $d \in D_C(y)$. Để chứng minh chiều ngược lại, giả sử $z \in y + D_C(y)$, tức là, $z - y \in D_C(y)$. Từ định nghĩa của $D_C(y)$, ta suy ra

$y \leq^C y + (z - y)$, do đó $y \leq^C z$. Sử dụng lập luận tương tự, ta thu được kết quả $y \leq^C z \Leftrightarrow y \in z - I_C(z)$.

(ii) Từ định nghĩa của D_C, ta có $d \in D_C(y)$ khi và chỉ khi $y \leq^C y + d$. Tức là, $y + d \in y + C(y, y + d)$, hay $d \in C(y, y + d)$. Điều này tương đương với (3.3). Tương tự, ta thu được (3.4).

Từ (3.3) và (3.4) ta thấy rằng

$$d \in D_C(y) \Leftrightarrow d \in C(y, y + d) = C((y + d) - d, y + d) \Leftrightarrow d \in I_C(y + d)$$

và do đó

$$d \in I_C(y) = I_C((y - d) + d) \Leftrightarrow d \in D_C(y - d).$$

Như vậy ta đã chứng minh xong (ii).

(iii) Ta có

$$\begin{aligned} D_{C_1^{\mathcal{D}}}(y) &= \{d \in Y : y \leq^{C_1^{\mathcal{D}}} y + d\} \\ &= \{d \in Y : y + d \in y + C_1^{\mathcal{D}}(y, y + d)\} \\ &= \{d \in Y : y + d \in y + \mathcal{D}(y)\} \\ &= \{d \in Y : d \in \mathcal{D}(y)\} \\ &= \mathcal{D}(y) \end{aligned}$$

và do đó $D_{C_1^{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}$. Phần chứng minh đẳng thức $I_{C_2^{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}$ là tương tự nên được lược bỏ. □

Nhận xét 3.4. Từ Bổ đề 3.3 ta suy ra rằng với mọi $y_1, y_2 \in Y$,

$$y_1 \leq^C y_2 \Leftrightarrow y_1 \leq_1^{D_C} y_2 \Leftrightarrow y_1 \leq_2^{I_C} y_2.$$

Nói cách khác, quan hệ $\leq^C$ cũng có thể biểu diễn lại dưới dạng quan hệ $\leq_1^{\mathcal{D}}$ và $\leq_2^{\mathcal{D}}$ bằng cách lần lượt xét các ánh xạ đa trị $\mathcal{D} = D_C$ và $\mathcal{D} = I_C$.

Tiếp theo ta phát biểu và chứng minh một số tính chất quan trọng của cấu trúc thứ tự hai biến. Cần lưu ý rằng, tương tự trường hợp một biến, ngay cả khi ánh xạ thứ tự nhận giá trị là các nón lồi thì cấu trúc thứ tự vẫn không nhất thiết đảm bảo tính bắc cầu, phản xứng hay tính tương thích với các phép toán không gian

tuyến tính. Các kết quả sẽ được trình bày theo trình tự: đầu tiên là các tính chất tổng quát đối với cấu trúc thứ tự hai biến, tiếp đến là hệ thống các hệ quả rút ra nhằm đối chiếu và so sánh trực tiếp với những kết quả tương ứng đã biết trong trường hợp một biến.

Định lý 3.5. *Giả sử $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ thứ tự hai biến.*

(i) *Quan hệ hai ngôi $\leq^C$ là phản xạ khi và chỉ khi $0 \in C(y, y)$, với mọi $y \in Y$.*

(ii) *Quan hệ hai ngôi $\leq^C$ là bắc cầu khi và chỉ khi*

$$\bigcup_{z \in y + D_C(y)} (z + D_C(z)) \subset y + D_C(y), \quad \forall y \in Y \tag{3.5}$$

hoặc

$$\bigcup_{z \in w - I_C(w)} (z - I_C(z)) \subset w - I_C(w), \quad \forall w \in Y. \tag{3.6}$$

(iii) *Quan hệ hai ngôi $\leq^C$ là phản xứng khi và chỉ khi*

$$\bigcup_{y \in Y} \bigcup_{d \in D_C(y)} [\{d\} \cap (-D_C(y + d))] \subset \{0\}, \tag{3.7}$$

hoặc

$$\bigcup_{y \in Y} \bigcup_{d \in I_C(y)} [\{d\} \cap (-I_C(y - d))] \subset \{0\}. \tag{3.8}$$

(iv) *Quan hệ hai ngôi $\leq^C$ là tương thích với phép cộng khi và chỉ khi D_C (hoặc I_C) là ánh xạ hằng.*

(v) *Quan hệ hai ngôi $\leq^C$ là tương thích với phép nhân với vô hướng khi và chỉ khi*

$$\alpha D_C(y) \subset D_C(\alpha y), \quad \forall y \in Y, \forall \alpha > 0 \tag{3.9}$$

hoặc

$$\alpha I_C(y) \subset I_C(\alpha y), \quad \forall y \in Y, \forall \alpha > 0.$$

Chứng minh. Phần (i) là dễ thấy. Đối với các phần còn lại, ta sẽ chỉ chứng minh các kết quả cho D_C, vì lập luận cho I_C hoàn toàn tương tự.

(ii) Giả sử quan hệ $\leq^C$ có tính chất bắc cầu, w là một phần tử bất kỳ thuộc vế trái của (3.5). Khi đó tồn tại $z \in y + D_C(y)$ sao cho $w \in z + D_C(z)$. Theo Bổ đề

3.3(i), $z \in y + D_C(y)$ khi và chỉ khi $y \leq^C z$, trong khi $w \in z + D_C(z)$ khi và chỉ khi $z \leq^C w$. Sử dụng tính chất bắc cầu của $\leq^C$, ta suy ra $y \leq^C w$, hay tương đương, w thuộc vế phải của (3.5). Để chứng minh điều ngược lại, giả sử (3.5) là đúng và giả sử $y \leq^C z$ và $z \leq^C w$. Theo Bổ đề 3.3(i), ta có $z \in y + D_C(y)$ và $w \in z + D_C(z)$. Do đó, w thuộc vế trái của (3.5), suy ra w thuộc vế phải của (3.5), tức là $y \leq^C w$. Vì vậy, quan hệ $\leq^C$ có tính chất bắc cầu.

(iii) Giả sử $\leq^C$ là phản xứng. Ta chỉ cần xét trường hợp vế trái của (3.7) khác rỗng, vì nếu không thì kết quả là hiển nhiên. Lấy d tùy ý thuộc tập này, ta có $d \in D_C(y) \cap (-D_C(y + d))$ với $y \in Y$ nào đó. Tức là, $y \leq^C y + d$ và $y + d \leq^C y$. Do quan hệ $\leq^C$ có tính chất phản xứng nên $y = y + d$. Vậy $d = 0$.

Ngược lại, giả sử $y \leq^C z$, và $z \leq^C y$. Khi đó $d := z - y \in D_C(y)$ và

$$z - y \in -D_C(z) = -D_C(y + d).$$

Do đó, theo tính chất (3.7), ta suy ra $d = 0$, tức là, $z = y$.

(iv) Giả sử $\leq^C$ tương thích với phép cộng. Để chứng minh D_C là ánh xạ hằng, ta sẽ chỉ ra rằng $D_C(y) \subset D_C(z)$ với mọi y, z thuộc Y. Thật vậy, lấy bất kỳ $d \in D_C(y)$ thì $y \leq^C y + d$. Sử dụng tính chất tương thích với phép cộng của $\leq^C$, ta có $y + (z - y) \leq^C y + d + (z - y)$, hay tương đương, $z \leq^C z + d$. Do đó $d \in D_C(z)$ và ta suy ra $D_C(y) \subset D_C(z)$.

Ngược lại, xét $y \leq^C z$ và D_C là ánh xạ hằng. Khi đó, $z - y \in D_C(y)$ và $D_C(y) = D_C(y + w)$ với mọi $w \in Y$. Suy ra $z - y \in D_C(y + w)$. Sử dụng định nghĩa của D_C, điều đó kéo theo $y + w \leq^C (y + w) + (z - y)$. Do đó $y + w \leq^C z + w$ với mọi $w \in Y$, tức là quan hệ $\leq^C$ tương thích với phép cộng.

(v) Giả sử $\leq^C$ tương thích với phép nhân với vô hướng. Với mọi $y \in Y$ và $\alpha > 0$, lấy tùy ý $d \in \alpha D_C(y)$. Khi đó, $\frac{1}{\alpha} d \in D_C(y)$. Khi đó, $y \leq^C y + \frac{1}{\alpha} d$. Vì quan hệ $\leq^C$ tương thích với phép nhân với vô hướng nên $\alpha y \leq^C \alpha y + d$. Do đó $d \in D_C(\alpha y)$.

Ngược lại, giả sử (3.9) là đúng và $y \leq^C z$, $\alpha > 0$. Theo Bổ đề 3.3(i), ta có $z - y \in D_C(y)$. Do đó $\alpha z - \alpha y \in \alpha D_C(y) \subset D_C(\alpha y)$. Vậy $\alpha y \leq^C \alpha z$. □

Nhận xét 3.6. Lưu ý rằng khẳng định (3.7) có thể được viết lại như sau:

$$\bigcup_{d \in D_C(y) \setminus \{0\}} [\{d\} \cap (-D_C(y + d))] = \emptyset, \quad \forall y \in Y.$$

Thêm vào đó, với mỗi $y \in Y$, $d \in D_C(y)\backslash\{0\}$ thì $\{d\} \cap (-D_C(y+d)) = \emptyset$ có nghĩa $y \leq^C y+d$ và $y+d \not\leq^C y$. Tương tự, khẳng định (3.8) tương đương với

$$\bigcup_{d \in I_C(y)\backslash\{0\}} [\{d\} \cap (-I_C(y-d))] = \emptyset, \quad \forall y \in Y,$$

và với mỗi $y \in Y$, $d \in I_C(y)\backslash\{0\}$ và đẳng thức $\{d\} \cap (-I_C(y-d)) = \emptyset$ có nghĩa là $y-d \leq^C y$ và $y \not\leq^C y-d$. Rõ ràng, tính chất phản xứng của $\leq^C$ sẽ thỏa mãn nếu một trong hai điều kiện tương đương sau đây thỏa mãn: $D_C(Y) \cap (-D_C(Y)) \subset \{0\}$, $I_C(Y) \cap (-I_C(Y)) \subset \{0\}$.

Về tính chất bắc cầu, hệ quả tiếp theo cho thấy một trường hợp đặc biệt mà trong đó các điều kiện (3.5) và (3.6) dễ kiểm tra hơn.

Hệ quả 3.7. *Giả sử $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$ là một cấu trúc thứ tự hai biến sao cho các ánh xạ đa trị D_C, I_C nhận giá trị là các nón lồi đóng. Khi đó, quan hệ hai ngôi $\leq^C$ thỏa mãn tính chất bắc cầu khi và chỉ khi*

$$D_C(y+d) \subset D_C(y), \quad \forall y \in Y, d \in D_C(y), \tag{3.10}$$

hoặc

$$I_C(y-d) \subset I_C(y), \quad \forall y \in Y, d \in I_C(y).$$

Chứng minh. Ở đây ta sẽ chỉ chứng minh (3.10) vì khẳng định còn lại được chứng minh tương tự. Trước hết giả sử $\leq^C$ thỏa mãn tính chất bắc cầu. Xét các điểm tùy ý $y \in Y$ và $d \in D_C(y)$. Từ (3.5) ta suy ra $d + D_C(y+d) \subset D_C(y)$. Vì các tập $D_C(y+d)$ và $D_C(y)$ là các nón nên ta có $(1/\alpha)d + D_C(y+d) \subset D_C(y)$. Tiếp theo, do $D_C(y)$ là tập đóng, nên nếu cho $\alpha \to 0$ ta suy ra

$$D_C(y+d) \subset \operatorname{cl} D_C(y) = D_C(y).$$

Ngược lại, giả sử (3.10) được thỏa mãn. Lấy bất kỳ $y \in Y$ và $d \in D_C(y)$. Khi đó

$$y + d + D_C(y+d) \subset y + D_C(y) + D_C(y+d) \subset y + D_C(y) + D_C(y) = y + D_C(y)$$

suy ra (3.5) đúng. Do đó, theo Định lý 3.5(ii) ta kết luận được quan hệ $\leq^C$ có tính chất bắc cầu. □

Định lý 3.5 bao hàm các tính chất sau đây liên quan đến $\leq_1^{\mathcal{D}}$ và $\leq_2^{\mathcal{D}}$.

Hệ quả 3.8. *Xét ánh xạ đa trị $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$. Ta có:*

(i) *Với mỗi $i \in \{1, 2\}$, $\leq_i^{\mathcal{D}}$ là phản xạ khi và chỉ khi $0 \in \mathcal{D}(y)$, với mọi $y \in Y$.*

(ii) *Quan hệ $\leq_1^{\mathcal{D}}$ (tương ứng, $\leq_2^{\mathcal{D}}$) là bắc cầu khi và chỉ khi*

$$d + \mathcal{D}(y + d) \subset \mathcal{D}(y) \tag{3.11}$$

$$(\textit{tương ứng, } d + \mathcal{D}(y - d) \subset \mathcal{D}(y)), \quad \forall y \in Y, \forall d \in \mathcal{D}(y). \tag{3.12}$$

(iii) *Quan hệ $\leq_1^{\mathcal{D}}$ (tương ứng $\leq_2^{\mathcal{D}}$) là phản xứng khi và chỉ khi*

$$d \notin -\mathcal{D}(y + d) \tag{3.13}$$

$$(\textit{tương ứng, } d \notin -\mathcal{D}(y - d)), \quad \forall y \in Y, \forall d \in \mathcal{D}(y) \backslash \{0\}. \tag{3.14}$$

(iv) *Với mỗi $i \in \{1, 2\}$, $\leq_i^{\mathcal{D}}$ tương thích với phép cộng khi và chỉ khi $\mathcal{D}$ là ánh xạ hằng.*

(v) *Với mỗi $i \in \{1, 2\}$, $\leq_i^{\mathcal{D}}$ tương thích với phép nhân với vô hướng khi và chỉ khi*

$$\alpha\mathcal{D}(y) \subset \mathcal{D}(\alpha y), \quad \forall y \in Y, \forall \alpha > 0. \tag{3.15}$$

Chứng minh. Các kết quả trên thu được bằng cách áp dụng Định lý 3.5 và Bổ đề 3.3(iii) cho các ánh xạ đa trị $C_1^{\mathcal{D}}$ và $C_2^{\mathcal{D}}$. Lưu ý rằng từ Nhận xét 3.2 ta có $\leq^{C_1^{\mathcal{D}}} = \leq_1^{\mathcal{D}}$ và $\leq^{C_2^{\mathcal{D}}} = \leq_2^{\mathcal{D}}$. □

Nhận xét 3.9. Hệ quả 3.8 bao hàm [24, Bổ đề 1.10], ở đó giá trị của $\mathcal{D}(y)$ được giả thiết là các nón lồi. Tuy nhiên, chúng tôi có các cải tiến sau đây:

(i) Các tính chất trong Hệ quả 3.8 đúng với ánh xạ đa trị $\mathcal{D}$ bất kỳ.

(ii) Liên quan đến tính chất bắc cầu, bao hàm thức (3.11) tổng quát hơn so với điều kiện (1.3) trong [24, Bổ đề 1.10(ii)]: $\mathcal{D}(y + d) \subset \mathcal{D}(y)$, với mọi $y \in Y$, $d \in \mathcal{D}(y)$. Thật vậy, lấy tùy ý $y \in Y$, $d \in \mathcal{D}(y)$ thì ta có

$$\begin{aligned} d + \mathcal{D}(y + d) &\subset \mathcal{D}(y) + \mathcal{D}(y + d) \\ &\subset \mathcal{D}(y) + \mathcal{D}(y) \\ &= \mathcal{D}(y) \quad (\text{vì } \mathcal{D}(y) \text{ là nón lồi}) \end{aligned}$$

và bao hàm thức (3.11) sẽ đúng nếu (1.3) trong [24, Bổ đề 1.10(ii)] được thỏa mãn. Khi $\mathcal{D}(y)$ đóng với mọi $y \in Y$, hai điều kiện trên là tương đương (xem Hệ quả 3.7).

Tương tự, ta có thể thu được kết quả so sánh giữa bao hàm thức (3.12) và điều kiện (1.4) trong [24, Bổ đề 1.10(iii)]: $\mathcal{D}(y-d) \subset \mathcal{D}(y)$, với mọi $y \in Y, d \in \mathcal{D}(y)$.

(iii) Trong [24, Bổ đề 1.10(v)], tính chất tương thích với phép nhân với vô hướng được đặc trưng bởi điều kiện

$$\mathcal{D}(y) \subset \mathcal{D}(\alpha y), \quad \forall y \in Y, \forall \alpha > 0.$$

Điều kiện này tương đương với (3.15) khi $\mathcal{D}(y)$ là nón.

(iv) Tính chất phản xứng của các quan hệ $\leq_1^{\mathcal{D}}$ và $\leq_2^{\mathcal{D}}$ được phát biểu trong [24, Bổ đề 1.10(vi)] như sau: điều kiện $\bigcup_{y\in Y} \mathcal{D}(y)$ nhọn là điều kiện đủ để đảm bảo tính chất phản xứng. Rõ ràng, giả thiết này thỏa mãn sẽ kéo theo điều kiện (3.13) và (3.14) thỏa mãn. Tuy nhiên, điều ngược lại nói chung không đúng. Chẳng hạn, xét $Y = \mathbb{R}^2$ và $\mathcal{D} : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ được định nghĩa bởi

$$\mathcal{D}(y) = \begin{cases} \{0\} \times \mathbb{R}_+ & \text{nếu } y_2 \geq 0 \\ \{0\} \times \mathbb{R}_- & \text{nếu } y_2 < 0 \end{cases}$$

với mọi $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Khi đó $\bigcup_{y\in Y} \mathcal{D}(y)$ không nhọn nhưng (3.13) vẫn thỏa mãn.

3.1.2 Các khái niệm điểm hữu hiệu, nghiệm tối ưu

Mục này được chia thành hai phần: Khái niệm điểm cực tiểu, điểm không trội (gọi chung là điểm hữu hiệu) của một tập được trình bày ở phần thứ nhất và các khái niệm nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến được trình bày ở phần thứ hai. Các tính chất liên quan cũng được khảo sát chi tiết.

a) Khái niệm về điểm hữu hiệu của một tập hợp

Cho Ω là tập con khác rỗng của Y. Nhắc lại rằng *phần trong đại số* của Ω (xem [34, 42]) là tập hợp

$$\operatorname{cor}\Omega := \{\bar{y} \in \Omega : \forall y \in Y, \exists \bar{\lambda} > 0 \text{ sao cho } \bar{y} + \lambda y \in \Omega \ \forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}]\}.$$

Giả sử $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ thứ tự hai biến. Ta kí hiệu $\operatorname{cor} C : Y \times Y \rightrightarrows Y$ xác định bởi $\operatorname{cor} C\,(y_1, y_2) := \operatorname{cor}\,(C(y_1, y_2))$ với mọi $y_1, y_2 \in Y$. Ta định nghĩa hai khái niệm liên quan đến điểm hữu hiệu của tập Ω theo quan hệ $\leq^C$ như sau.

Định nghĩa 3.10. Điểm $\bar{y} \in \Omega$ được gọi là

(a) một *điểm $\leq^C$-cực tiểu* của Ω, ký hiệu $\bar{y} \in \operatorname{Min}(\Omega, C)$, nếu

$$y \in \Omega,\ y \leq^C \bar{y} \quad \Rightarrow \quad \bar{y} \leq^C y; \tag{3.16}$$

(b) một *điểm $\leq^C$-không trội* của Ω, ký hiệu $\bar{y} \in \operatorname{ND}(\Omega, C)$, nếu không tồn tại $y \in \Omega \setminus \{\bar{y}\}$ thỏa mãn $y \leq^C \bar{y}$;

(c) một *điểm $\leq^C$-không trội mạnh* của Ω, ký hiệu $\bar{y} \in \operatorname{SND}(\Omega, C)$, nếu $\bar{y} \leq^C y$, với mọi $y \in \Omega \setminus \{\bar{y}\}$;

(d) Giả sử $\operatorname{dom}(\operatorname{cor} C) = Y \times Y$. Khi đó, $\bar{y}$ được gọi là một *điểm $\leq^C$-không trội yếu* của Ω, ký hiệu $\bar{y} \in \operatorname{WND}(\Omega, C)$, nếu $\bar{y} \in \operatorname{ND}(\Omega, \operatorname{cor} C)$.

Nhận xét 3.11. (i) Xét $\bar{y} \in \Omega$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
\bar{y} \in \operatorname{Min}(\Omega, C) &\Leftrightarrow [d \in I_C(\bar{y}) \Rightarrow -d \in D_C(\bar{y})],\\
\bar{y} \in \operatorname{ND}(\Omega, C) &\Leftrightarrow \bar{y} \notin y + C(y, \bar{y}), \quad \forall y \in \Omega\backslash\{\bar{y}\}\\
&\Leftrightarrow I_C(\bar{y}) \subset \{0\},\\
\bar{y} \in \operatorname{SND}(\Omega, C) &\Leftrightarrow y \in \bar{y} + C(\bar{y}, y), \quad \forall y \in \Omega\backslash\{\bar{y}\}\\
&\Leftrightarrow (\Omega - \{\bar{y}\})\backslash\{0\} \subset D_C(\bar{y}).
\end{aligned}$$

(ii) Xét ánh xạ đa trị $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$ có giá trị $\mathcal{D}(y)$ là nón và chính thường (tức là, $\mathcal{D}(y) \neq Y$) với mọi $y \in Y$. Khái niệm điểm không trội (tương ứng, điểm cực tiểu) của Ω theo $\mathcal{D}$ được giới thiệu bởi Eichfelder [21, Định nghĩa 2.1] (tương ứng, [21, Định nghĩa 2.2]) có thể xem như kết quả của việc áp dụng Định nghĩa 3.10(b) cho ánh xạ thứ tự hai biến $C_1^{\mathcal{D}}$ (tương ứng, $C_2^{\mathcal{D}}$).

Tương tự, khái niệm điểm không trội yếu (tương ứng, điểm cực tiểu yếu) của Ω theo $\mathcal{D}$ được giới thiệu bởi Eichfelder [23, Định nghĩa 4.1] (tương ứng [23, Định nghĩa 4.2]) tương ứng với khái niệm điểm $\leq^{C_1^{\mathcal{D}}}$-không trội yếu (tương ứng, điểm $\leq^{C_2^{\mathcal{D}}}$-không trội yếu) của Ω trong Định nghĩa 3.10(d).

Cuối cùng, nếu ta áp dụng Định nghĩa 3.10(c) cho $\leq^{C_2^{\mathcal{D}}}$ (tương ứng, $\leq^{C_1^{\mathcal{D}}}$) thì ta thu được khái niệm điểm không trội mạnh (tương ứng, điểm cực tiểu mạnh) của Ω theo $\mathcal{D}$ trong [23, Định nghĩa 4.1] (tương ứng, [23, Định nghĩa 4.2]).

(iii) Một ứng dụng trực quan cho thấy ưu điểm của quan hệ hai ngôi $\leq^C$ là khi ta có thể đồng thời xem xét cả hai cách tiếp cận của Eichfelder đối với điểm hữu hiệu của một tập hợp. Chẳng hạn, cho trước một phân hoạch Ω_1, Ω_2 của tập Ω khác rỗng và một ánh xạ thứ tự một biến $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$. Giả sử chúng ta muốn tìm các điểm thuộc Ω_1 là điểm không trội của Ω và tìm các điểm thuộc Ω_2 là điểm cực tiểu của Ω. Để thực hiện điều này, ta chỉ cần xét các điểm $\leq^C$-không trội của Ω theo ánh xạ thứ tự hai biến sau trên Ω:

$$C(y,v) = \begin{cases} \mathcal{D}(y) & \text{nếu} \quad v \in \Omega_1, \\ \mathcal{D}(v) & \text{nếu} \quad v \in \Omega_2. \end{cases}$$

Trong các phần tiếp theo, ta ký hiệu

$$I_C^{\Omega}(y) := \{d \in I_C(y) : y - d \in \Omega\}, \quad \forall y \in \Omega.$$

Nhận xét 3.12. Rõ ràng, nếu $\operatorname{gph} C_1 \subset \operatorname{gph} C_2$ thì $\mathrm{ND}(\Omega, C_2) \subset \mathrm{ND}(\Omega, C_1)$.

Định lý sau đây thể hiện mối quan hệ giữa các khái niệm điểm hữu hiệu của một tập hợp.

Định lý 3.13. *Giả sử $\bar{y} \in \Omega$.*

(i) *Nếu $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-không trội của Ω thì $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-không trội yếu của Ω.*

(ii) *Giả sử $C(y,\bar{y}) \cap (-C(\bar{y},y)) \subset \{0\}$, với mọi $y \in \Omega \backslash \{\bar{y}\}$. Khi đó, nếu $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-không trội mạnh của Ω thì $\bar{y}$ cũng là một điểm $\leq^C$-không trội của Ω. Hơn nữa, có nhiều nhất một điểm $\leq^C$-không trội mạnh của Ω.*

(iii) *Nếu $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-không trội của Ω thì nó cũng là điểm $\leq^C$-cực tiểu của Ω. Ngược lại, nếu $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-cực tiểu của Ω và*

$$\bigcup_{d \in I_C^{\Omega}(\bar{y}) \backslash \{0\}} [\{d\} \cap (-I_C^{\Omega}(\bar{y} - d))] = \emptyset, \tag{3.17}$$

thì nó cũng là điểm $\leq^C$-không trội của Ω.

Chứng minh. Phần (i) suy ra trực tiếp từ Nhận xét 3.12.

(ii) Giả sử $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-không trội mạnh của Ω. Theo định nghĩa ta có

$$\bar{y} \in y - C(\bar{y}, y), \quad \forall y \in \Omega \backslash \{\bar{y}\}.$$

Kết hợp với giả thiết của (ii), ta được $\bar{y} \notin y + C(y, \bar{y})$ với mọi $y \in \Omega \setminus \{\bar{y}\}$. Suy ra không tồn tại $y \in \Omega \setminus \{\bar{y}\}$ sao cho $y \leq^C \bar{y}$ và do đó $\bar{y}$ là một điểm $\leq^C$-không trội của Ω. Đồng thời, y không thể là điểm $\leq^C$-không trội mạnh của Ω, với mọi $y \in \Omega \backslash \{\bar{y}\}$.

(iii) Giả sử $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-không trội của Ω. Khi đó không tồn tại $y \in \Omega \setminus \{\bar{y}\}$ thỏa mãn $y \leq^C \bar{y}$. Do đó, (3.16) thỏa mãn, tức là $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-cực tiểu của Ω.

Để chứng minh khẳng định ngược lại, lưu ý rằng từ giả thiết (3.17), Nhận xét 3.6 và định nghĩa của ánh xạ đa trị I_C^Ω ta suy ra với mỗi $y \in \Omega \backslash \{\bar{y}\}$, $y \leq^C \bar{y}$ thì $\bar{y} \not\leq^C y$. Do đó, nếu $\bar{y} \in \Omega$ là một điểm $\leq^C$-cực tiểu của Ω thì không tồn tại $y \in \Omega \backslash \{\bar{y}\}$ thỏa mãn $y \leq^C \bar{y}$. Nói cách khác, $\bar{y}$ cũng là điểm $\leq^C$-không trội của Ω. □

Nhận xét 3.14. Một số tính chất trong Định lý 3.13 đã được phát biểu trong các tài liệu trước đây cho các trường hợp riêng $C_1^{\mathcal{D}}$ và $C_2^{\mathcal{D}}$. Chẳng hạn, Định lý 3.13(i) rút gọn thành [23, Bổ đề 4.2(c)] và [24, Bổ đề 2.23(ii)] bằng cách xét các ánh xạ thứ tự hai biến $C_1^{\mathcal{D}}$ và $C_2^{\mathcal{D}}$ và ánh xạ đa trị $\mathcal{D}$ nhận giá trị là nón lồi nhọn.
Tương tự, Định lý 3.13(iii) bao hàm [9, Mệnh đề 3.1] bằng cách xét các ánh xạ thứ tự hai biến $C_1^{\mathcal{D}}$ và $C_2^{\mathcal{D}}$ và ánh xạ đa trị $\mathcal{D}$ thỏa mãn $0 \in \mathcal{D}(y)$, với mọi $y \in Y$ và giả thiết về tính chất nhọn liên quan đến điểm đang xét $\bar{y}$:

$$\left(\bigcup_{y \in \Omega} \mathcal{D}(y) \right) \cap (-\mathcal{D}(\bar{y})) = \{0\}. \tag{3.18}$$

Áp dụng điều kiện (3.17) với $C_1^{\mathcal{D}}$ và $C_2^{\mathcal{D}}$ ta được kết quả lần lượt là

$$\{d\} \cap \mathcal{D}(\bar{y} - d) \cap (-\mathcal{D}(\bar{y})) = \emptyset, \tag{3.19}$$

$$\{d\} \cap \mathcal{D}(\bar{y}) \cap (-\mathcal{D}(\bar{y} - d)) = \emptyset, \quad \forall d \in \bar{y} - (\Omega \backslash \{\bar{y}\}). \tag{3.20}$$

Rõ ràng, giả thiết (3.18) kéo theo (3.19) và (3.20) nhưng chúng không tương đương. Thật vậy, xét $Y = \mathbb{R}^2$, $\Omega = \mathbb{R}^2_+$, $\bar{y} = (0, 0)$, $\mathcal{D}(\bar{y}) = \mathbb{R}^2_+$ và $D(y) = -\mathbb{R}^2_+$ với mọi $y \in Y \backslash \{\bar{y}\}$. Giả thiết (3.18) không thỏa mãn, trong khi cả hai điều kiện (3.19) và

(3.20) đều thỏa mãn. Do đó, vì $\bar{y} \notin \mathrm{ND}(\Omega, C_1^{\mathcal{D}})$ nên theo Định lý 3.13(iii) ta suy ra $\bar{y} \notin \mathrm{Min}(\Omega, C_1^{\mathcal{D}})$ và kết luận này không thể thu được bằng cách áp dụng [9, Mệnh đề 3.1].

Kết quả sau đây cho phép chúng ta rút gọn việc tìm kiếm các điểm $\leq^C$-không trội của một tập về tìm kiếm trên biên của tập đó, ở đây kí hiệu $\mathrm{fr}\,\Omega$ là biên tôpô của tập hợp Ω.

Định lý 3.15. *Giả sử $\bar{y} \in Y$.*

(i) *Nếu $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-không trội của Ω và tồn tại một lưới $(y_i) \subset Y\backslash\{\bar{y}\}$ thỏa mãn $y_i \to \bar{y}$ và*

$$\bar{y} - y_i \in C(y_i, \bar{y}), \quad \forall i \tag{3.21}$$

thì $\bar{y} \in \mathrm{fr}\,\Omega$.

(ii) *Nếu $\bar{y}$ là một điểm $\leq^C$-không trội yếu của Ω và tồn tại một lưới $(y_i) \subset Y\backslash\{\bar{y}\}$ thỏa mãn $y_i \to \bar{y}$ và*

$$\bar{y} - y_i \in \mathrm{cor}\, C(y_i, \bar{y}), \quad \forall i \tag{3.22}$$

thì $\bar{y} \in \mathrm{fr}\,\Omega$.

Chứng minh. (i) Giả sử phản chứng $\bar{y} \in \mathrm{int}\,\Omega$. Khi đó tồn tại i_0 thỏa mãn $y_{i_0} \in \Omega$. Theo (3.21) ta suy ra $y_{i_0} \leq^C \bar{y}$, mâu thuẫn với giả thiết $\bar{y}$ là điểm $\leq^C$-không trội của Ω. Do đó $\bar{y} \in \mathrm{fr}\,\Omega$.

(ii) Sử dụng lập luận phản chứng tương tự chứng minh (i). □

Nhận xét 3.16. (i) Định lý 3.15 không còn đúng nếu ta thay biên tôpô bởi biên đại số. Chẳng hạn, xét $Y = \mathbb{R}^2$ và

$$\Omega = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : |y_2| \geq y_1^2\} \cup \mathrm{cone}\{(1,0), (-1,0)\}.$$

Đặt $H := \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_2 \geq 0\}$, $\mathcal{D}_1 : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{D}_1((y_1, y_2)) := \begin{cases} -H & \text{nếu} \quad (y_1, y_2) \in \Omega, y_2 < 0 \\ \mathrm{cone}\{(1,1)\} & \text{nếu} \quad (y_1, y_2) \in \Omega, y_2 = 0 \\ H & \text{nếu} \quad (y_1, y_2) \in \Omega, y_2 > 0 \\ \mathbb{R}^2_+ & \text{nếu} \quad (y_1, y_2) \notin \Omega. \end{cases}$$

Ta có $(-1/n,-1/n^3) \to \bar{y} := (0,0)$, $(-1/n,-1/n^3) \leq^{C_1^{\mathcal{D}_1}} \bar{y}$, với mọi $n \geq 2$ và $\bar{y} \in \mathrm{ND}(\Omega, C_1^{\mathcal{D}_1})$. Rõ ràng, $\bar{y} \in \mathrm{fr}\,\Omega$ nhưng $\bar{y}$ không thuộc biên đại số của M vì $\bar{y} \in \mathrm{cor}\,\Omega$.

Tương tự, nếu ta đặt $\mathcal{D}_2 : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{D}_2((y_1,y_2)) := \begin{cases} -H & \text{nếu} \quad (y_1,y_2) \in \Omega, y_2 \leq 0 \\ H & \text{nếu} \quad (y_1,y_2) \in \Omega, y_2 > 0 \\ \mathbb{R}^2_+ & \text{nếu} \quad (y_1,y_2) \notin \Omega, \end{cases}$$

thì $(-1/n,-1/n^3) \leq^{\mathrm{cor}\, C_1^{\mathcal{D}_2}} \bar{y}$, với mọi $n \geq 2$. Ta vẫn có $(-1/n,-1/n^3) \to \bar{y}$ và $\bar{y} \in \mathrm{fr}\,\Omega$. Lưu ý rằng $\bar{y} \in \mathrm{WND}(\Omega, C_1^{\mathcal{D}_2}) \cap \mathrm{cor}\,\Omega$.

(ii) Khẳng định (i) trong Định lý 3.15 được phát biểu trong [23, Bổ đề 4.3(b)(ii)] (sử dụng biên đại số) và trong [24, Bổ đề 2.34(ii)] cho trường hợp $C_1^{\mathcal{D}}$, trong đó $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$, $\mathcal{D}(y)$ là nón lồi nhọn với mọi $y \in Y$ và thay thế giả thiết (3.21) bởi $\bigcap_{y\in\Omega} \mathcal{D}(y) \neq \{0\}$. Lưu ý rằng các giả thiết này mạnh hơn các giả thiết mà chúng tôi đưa ra trong Định lý 3.15. Thật vậy, lấy $\bar{d} \in \bigcap_{y\in\Omega} \mathcal{D}(y)$, $\bar{d} \neq 0$ và định nghĩa $y_n := \bar{y} - (1/n)\bar{d}$. Rõ ràng, $y_n \to \bar{y}$, $y_n \neq \bar{y}$ và

$$\bar{y} - y_n = (1/n)\bar{d} \in \bigcap_{y\in\Omega} \mathcal{D}(y) \subset \mathcal{D}(y_n) = C_1^{\mathcal{D}}(y_n, \bar{y}), \quad \forall n.$$

Do đó điều kiện (3.21) cũng đúng. Ngoài ra, nếu xét: $Y = \Omega = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{D}(y) = \mathrm{cone}\{y\}$ với mọi $y \in \mathbb{R}^2$ và $\bar{y} = (1,1)$ thì ta có $\bigcap_{y\in\Omega} \mathcal{D}(y) = \{0\}$ và do đó [24, Bổ đề 2.34(ii)] không thể áp dụng được. Tuy nhiên, nếu ta xét dãy $(y_n)_{n\geq 2}$, $y_n := \bar{y} - (1/n)\bar{y}$ thì

$$\bar{y} - y_n = (1/n)\bar{y} \in \mathrm{cone}\{y_n\} = \mathcal{D}(y_n) = C_1^{\mathcal{D}}(y_n, \bar{y}), \quad \forall n \geq 2,$$

nên giả thiết (3.21) thỏa mãn. Do đó theo Định lý 3.15(i) và do $\bar{y} \in \mathrm{int}\,\Omega$ ta suy ra $\bar{y}$ không phải là điểm $\leq^C$-không trội của Ω.

(iii) Tương tự, trong [21, Bổ đề 2.1(a)] và trong [24, Bổ đề 2.34(i)], dạng tương tự của Định lý 3.15(ii) về điểm $\leq^C$-không trội yếu được phát biểu trong trường hợp riêng $C_1^{\mathcal{D}}$, ở đó $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$ và $\mathcal{D}(y)$ là nón lồi nhọn với mọi $y \in Y$. Trong kết quả này, giả thiết $\bigcap_{y\in\Omega} \mathrm{cor}\,\mathcal{D}(y) \neq \emptyset$ được sử dụng để thay thế cho (3.22). Ta sẽ chỉ ra

giả thiết đó mạnh hơn. Thật vậy, một mặt, sử dụng lập luận tương tự trong (ii) ta thấy rằng dãy $y_n := \bar{y} - (1/n)\bar{d}$ thỏa mãn điều kiện (3.22) nếu $\bar{d} \in \bigcap_{y\in\Omega} \operatorname{cor} \mathcal{D}(y)$. Mặt khác, giả sử $Y = \Omega = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}^2_+$, với mọi $y \in \mathbb{R}^2_+$, $\mathcal{D}(y) = -\mathbb{R}^2_+$ nếu ngược lại, $\bar{y} = (1, 1)$. Ta có $\bigcap_{y\in\Omega} \operatorname{cor} \mathcal{D}(y) = \emptyset$ và do đó [24, Bổ đề 2.34(i)] không thể áp dụng. Trong khi đó, dãy $y_n := \bar{y} - (1/n)\bar{y}$ thỏa mãn

$$\bar{y} - y_n = (1/n)\bar{y} \in \operatorname{cor} \mathbb{R}^2_+ = \operatorname{cor} \mathcal{D}(y_n) = \operatorname{cor} C_1^{\mathcal{D}}(y_n, \bar{y}), \quad \forall n \geq 1.$$

Suy ra điều kiện (3.22) thỏa mãn. Do đó, áp dụng (ii) ta kết luận được $\bar{y}$ không phải là điểm $\leq^C$-không trội yếu của Ω vì $\bar{y} \in \operatorname{int} \Omega$.

b) Khái niệm nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu véctơ

Xét bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc

$$\min_C\{f(x) : x \in S\}, \tag{P}$$

trong đó $f : X \to Y$, S là một tập con khác rỗng của X và $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$ xác định một cấu trúc thứ tự hai biến $\leq^C$ trên Y.

Định nghĩa 3.17. Điểm $\bar{x}$ thuộc S được gọi là

(a) một *nghiệm C-cực tiểu địa phương* của bài toán (P), ký hiệu là $\bar{x} \in \operatorname{LMin}(f, S, C)$, nếu tồn tại một lân cận U của $\bar{x}$ sao cho

$$x \in U \cap S, \quad f(x) \leq^C f(\bar{x}) \Rightarrow f(\bar{x}) \leq^C f(x). \tag{3.23}$$

(b) một *nghiệm C-không trội địa phương* (P), ký hiệu là $\bar{x} \in \operatorname{LND}(f, S, C)$, nếu tồn tại một lân cận U của $\bar{x}$ sao cho

$$x \in U \cap S, \quad f(x) \leq^C f(\bar{x}) \Rightarrow f(x) = f(\bar{x}). \tag{3.24}$$

(c) một *nghiệm C-không trội mạnh địa phương* của bài toán (P), ký hiệu là $\bar{x} \in \operatorname{LSND}(f, S, C)$, nếu tồn tại một lân cận U của $\bar{x}$ sao cho

$$f(\bar{x}) \leq^C f(x), \quad \forall x \in U \cap (S\backslash\{\bar{x}\}). \tag{3.25}$$

(d) một *nghiệm C-không trội yếu địa phương* của bài toán (P), ký hiệu là $\bar{x} \in \operatorname{LWND}(f, S, C)$, nếu $\bar{x} \in \operatorname{LND}(f, S, \operatorname{cor} C)$.

Nếu điều kiện (3.23) (tương ứng, (3.24), (3.25)) đúng với mọi $x \in S \setminus \{\bar{x}\}$ thì $\bar{x}$ được gọi là *nghiệm C-cực tiểu toàn cục* (tương ứng, *nghiệm C-không trội toàn cục*, *nghiệm C-không trội mạnh toàn cục*) của bài toán (P), ký hiệu là $\bar{x} \in \mathrm{GMin}(f, S, C)$ (tương ứng, $\bar{x} \in \mathrm{GND}(f, S, C)$, $\bar{x} \in \mathrm{GSND}(f, S, C)$). Tương tự, $\bar{x}$ được gọi là *nghiệm C-không trội yếu toàn cục* của bài toán (P), ký hiệu là $\bar{x} \in \mathrm{GWND}(f, S, C)$, nếu $\bar{x} \in \mathrm{GND}(f, S, \mathrm{cor}C)$.

Nhận xét 3.18. (i) Dễ dàng kiểm tra các khẳng định sau đây là đúng:

$$\begin{aligned}\bar{x} \in \mathrm{LMin}(f, S, C) &\Leftrightarrow \bar{x} \in S \text{ và } f(\bar{x}) \in \bigcup_{U \in \mathcal{N}(\bar{x})} \mathrm{Min}(f(U \cap S), C) \\ &\Leftrightarrow \bar{x} \in \bigcup_{U \in \mathcal{N}(\bar{x})} f^{-1}(\mathrm{Min}(f(U \cap S), C)) \cap S,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{x} \in \mathrm{LND}(f, S, C) &\Leftrightarrow \bar{x} \in S \text{ và } f(\bar{x}) \in \bigcup_{U \in \mathcal{N}(\bar{x})} \mathrm{ND}(f(U \cap S), C) \\ &\Leftrightarrow \bar{x} \in \bigcup_{U \in \mathcal{N}(\bar{x})} f^{-1}(\mathrm{ND}(f(U \cap S), C)) \cap S,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{x} \in \mathrm{LSND}(f, S, C) &\Rightarrow \bar{x} \in S \text{ và } f(\bar{x}) \in \bigcup_{U \in \mathcal{N}(\bar{x})} \mathrm{SND}(f(U \cap S), C) \\ &\Leftrightarrow \bar{x} \in \bigcup_{U \in \mathcal{N}(\bar{x})} f^{-1}(\mathrm{SND}(f(U \cap S), C)) \cap S.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Chiều ngược lại của (3.26) là đúng nếu điều kiện $\{x \in S : f(x) = f(\bar{x})\} = \{\bar{x}\}$ hoặc điều kiện $0 \in C(f(\bar{x}), f(\bar{x}))$ được thỏa mãn.

(ii) Trong [9, Định nghĩa 4.1], các tác giả đưa ra khái niệm nghiệm địa phương cho bài toán (P) trường hợp không ràng buộc (tức là $S = X$), ở đó $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$ thỏa mãn $0 \in \mathcal{D}(y)$ với mọi $y \in Y$, đồng thời $\mathcal{D}$ thỏa mãn điều kiện (3.18) khi thay tập Ω bởi tập $\Omega \cap V$ với V là một lân cận của $f(\bar{x})$ như sau: $\bar{x}$ được gọi là một nghiệm không trội địa phương của hàm f theo $\mathcal{D}$ nếu tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ và một lân cận V của $f(\bar{x})$ sao cho $f(\bar{x}) \in \mathrm{Min}(f_V(U), C_1^{\mathcal{D}})$, trong đó

$$f_V(U) := f(f^{-1}(V) \cap U) = \{y \in V : f^{-1}(y) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng khái niệm này không phù hợp nếu xét quan hệ thứ tự

thông thường. Xét $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = [0, +\infty)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$ và

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2 & \text{nếu} \quad x_1 < 0, x_2 < 0, \\ 0 & \text{nếu} \quad x_1 < 0, x_2 \geq 0, \\ 1 & \text{nếu} \quad\quad x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Ta thấy, $y_1 \leq^{C_1^{\mathcal{D}}} y_2$ khi và chỉ khi $y_2 \geq y_1$. Do đó bài toán (P) là bài toán tối ưu vô hướng có ràng buộc thông thường. Ta có $\bar{x} = (0, 0)$ không phải là nghiệm địa phương của bài toán theo quan hệ thứ tự thông thường. Tuy nhiên, nếu xét U là hình cầu đơn vị mở và $V := (1/2, 3/2)$ ta có $f^{-1}(V) = f^{-1}(\{1\})$ và do đó $f_V(U) = \{1\}$. Suy ra, $f(\bar{x}) \in \text{Min}(f_V(U), C_1^{\mathcal{D}})$ và do đó $\bar{x}$ là nghiệm không trội địa phương của bài toán (P) theo $\mathcal{D}$. Nói cách khác, khái niệm này không trùng với khái niệm nghiệm địa phương thường dùng trong bài toán tối ưu vô hướng.

Khái niệm nghiệm C-cực tiểu địa phương và C-không trội địa phương tổng quát hóa các khái niệm nghiệm tối ưu tương ứng theo ánh xạ thứ tự một biến $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$ thông qua hai cấu trúc hai biến $C_1^{\mathcal{D}}$ và $C_2^{\mathcal{D}}$. Cụ thể, bằng cách thay $\leq^C$ bởi $C_1^{\mathcal{D}}$ và $C_2^{\mathcal{D}}$, ta thu được các khái niệm ở Nhận xét 3.2(i).

Định nghĩa 3.19. Xét cấu trúc thứ tự một biến $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$. Với $i = 1, 2$, điểm $\bar{x}$ thuộc S được gọi là

(a) một *nghiệm $\leq_i^{\mathcal{D}}$-cực tiểu địa phương* của bài toán (P), ký hiệu là $\bar{x} \in \text{LMin}(f, S, \leq_i^{\mathcal{D}})$, nếu tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ sao cho bao hàm thức sau đây được thỏa mãn:

$$x \in U \cap S, \quad f(x) \leq_i^{\mathcal{D}} f(\bar{x}) \Rightarrow f(\bar{x}) \leq_i^{\mathcal{D}} f(x).$$

(b) một *nghiệm $\leq_i^{\mathcal{D}}$-không trội địa phương* của bài toán (P) nếu tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ sao cho

$$x \in U \cap S, \quad f(x) \leq_i^{\mathcal{D}} f(\bar{x}) \Rightarrow f(x) = f(\bar{x}).$$

Khi đó ta ký hiệu $\bar{x} \in \text{LND}(f, S, \leq_i^{\mathcal{D}})$.

Các khái niệm nghiệm toàn cục tương ứng với các khái niệm nghiệm địa phương nêu trên được ký hiệu lần lượt là $\text{GMin}(f, S, \leq_i^{\mathcal{D}})$ và $\text{GND}(f, S, \leq_i^{\mathcal{D}})$.

Nhận xét 3.20. Khái niệm nghiệm $\leq_i^{\mathcal{D}}$-không trội địa phương trùng với khái niệm nghiệm không trội địa phương được trình bày trong [10, Định nghĩa 4.1]. Khái niệm nghiệm không trội truyền thống (tương ứng, nghiệm hữu hiệu truyền thống) và nghiệm $\mathcal{D}$-không trội (tương ứng, nghiệm $\mathcal{D}$-hữu hiệu) được đề cập trong [11, Định nghĩa 2.3] tương ứng với tập $\mathrm{GMin}(f, X, \leq_1^{\mathcal{D}})$ (tương ứng, $\mathrm{GMin}(f, X, \leq_2^{\mathcal{D}})$) và tập $\mathrm{GND}(f, X, \leq_1^{\mathcal{D}})$ (tương ứng $\mathrm{GND}(f, X, \leq_2^{\mathcal{D}})$).

Định lý sau đây thiết lập mối liên hệ giữa các khái niệm nghiệm của bài toán (P). Các kết quả này được suy ra từ Định lý 3.13 và Nhận xét 3.18(i).

Định lý 3.21. (i) *Mỗi nghiệm C-không trội địa phương của bài toán* (P) *cũng là một nghiệm C-không trội yếu địa phương của bài toán* (P).

(ii) *Giả sử tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ sao cho*

$$C(y, f(\bar{x})) \cap (-C(f(\bar{x}), y)) \subset \{0\}, \quad \forall y \in f(U \cap S) \backslash \{f(\bar{x})\}.$$

Khi đó, nếu $\bar{x}$ là một nghiệm C-không trội mạnh địa phương của bài toán (P) *thì nó cũng là một nghiệm C-không trội địa phương của bài toán* (P).

(iii) *Mỗi nghiệm C-không trội địa phương của bài toán* (P) *cũng là một nghiệm C-cực tiểu địa phương. Ngược lại, nếu $\bar{x} \in S$ là một nghiệm $\leq^C$-cực tiểu địa phương và tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ sao cho*

$$\bigcup_{d \in I_C^{f(S\cap U)}(f(\bar{x})) \backslash \{0\}} [\{d\} \cap (-I_C^{f(S\cap U)}(f(\bar{x}) - d))] = \emptyset, \tag{3.27}$$

thì nó cũng là một nghiệm C-không trội địa phương.

Nhận xét 3.22. Giả sử $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$ thỏa mãn $0 \in \mathcal{D}(y)$, với mọi $y \in Y$. Trong [11], Mệnh đề 2.4.(ii) đã phát biểu rằng nếu $\bar{x} \in X$ là một nghiệm $\leq^{C_1^{\mathcal{D}}}$-không trội toàn cục của bài toán (P) với $S = X$ nếu nó là một nghiệm $\leq^{C_1^{\mathcal{D}}}$-cực tiểu toàn cục và điều kiện về tính chất nhọn (3.18) đúng với $M = f(X)$ và $\bar{y} = f(\bar{x})$:

$$\mathcal{D}(f(x)) \cap (-\mathcal{D}(f(\bar{x}))) = \{0\}, \quad \forall x \in X. \tag{3.28}$$

Rõ ràng, khi đó giả thiết (3.27) với $U = X$ có thể viết lại tương tự (3.19):

$$d \in \mathcal{D}(f(\bar{x}) - d)\backslash\{0\}, f(\bar{x}) - d \in f(X) \Rightarrow d \notin -\mathcal{D}(f(\bar{x})).$$

Điều kiện này tổng quát hơn (3.28) (xem ví dụ phần cuối Nhận xét 3.14).

Tương tự, với ánh xạ đa trị $C_2^{\mathcal{D}}$, trong [11, Mệnh đề 2.4.(ii)] phát biểu rằng $\bar{x} \in X$ là một nghiệm $\leq^{C_2^{\mathcal{D}}}$-không trội toàn cục của bài toán (P) với $S = X$ nếu nó là nghiệm $\leq^C$-cực tiểu toàn cục và điều kiện (3.28) được thỏa mãn. Khi đó, giả thiết (3.27) trở thành

$$d \in \mathcal{D}(f(\bar{x}))\backslash\{0\}, f(\bar{x}) - d \in f(S) \Rightarrow d \notin -\mathcal{D}(f(\bar{x}) - d).$$

Điều kiện này cũng tổng quát hơn (3.28).

Tiếp theo, ta khảo sát mối liên hệ giữa các khái niệm nghiệm C-tối ưu của bài toán (P) với các khái niệm tương ứng liên quan đến cấu trúc thứ tự một biến.

Xét $\bar{x} \in S$. Với mỗi $V \in \mathcal{N}(\bar{x})$, định nghĩa các ánh xạ đa trị $\mathcal{D}_{1,V}^i, \mathcal{D}_{1,V}^u, \mathcal{D}_{2,V}^u : Y \rightrightarrows Y$ và $\widehat{C}_V : Y \times Y \rightrightarrows Y$ như sau

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{1,V}^i(y) &:= \bigcap_{x \in V \cap S} C(f(x), y), \\
\mathcal{D}_{1,V}^u(y) &:= \bigcup_{x \in V \cap S} C(f(x), y), \\
\mathcal{D}_{2,V}^u(y) &:= \bigcup_{x \in V \cap S} C(y, f(x)), \\
\widehat{C}_V(y_1, y_2) &:= \big(C(y_1, y_2) \setminus (-\mathcal{D}_{2,V}^u(y_2))\big) \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

Định lý 3.23. (i) *Nếu* $\bar{x} \in \bigcup_{V \in \mathcal{N}(\bar{x})} \mathrm{LND}(f, S, \leq_2^{\mathcal{D}_{1,V}^u})$ *thì* $\bar{x} \in \mathrm{LND}(f, S, C)$.

(ii) *Giả sử* $\operatorname{dom} \mathcal{D}_{1,V}^i = Y$, *với mọi* $V \in \mathcal{N}(\bar{x})$. *Khi đó, nếu* $\bar{x} \in \mathrm{LND}(f, S, C)$ *thì* $\bar{x} \in \bigcup_{V \in \mathcal{N}(\bar{x})} \mathrm{LND}(f, S, \leq_2^{\mathcal{D}_{1,V}^i})$.

(iii) *Nếu* $\bar{x} \in \mathrm{LMin}(f, S, C)$ *thì ta có* $\bar{x} \in \bigcup_{V \in \mathcal{N}(\bar{x})} \mathrm{LND}(f, S, \widehat{C}_V)$.

Chứng minh. (i) Giả sử $\bar{x} \in \bigcup_{V \in \mathcal{N}(\bar{x})} \mathrm{LND}(f, S, \leq_2^{\mathcal{D}_{1,V}^u})$. Khi đó tồn tại $V_1 \in \mathcal{N}(\bar{x})$ sao

cho $\bar{x} \in \mathrm{LND}(f, S, \leq_2^{\mathcal{D}^u_{1,V_1}})$. Do đó, tồn tại $V_2 \in \mathcal{N}(\bar{x})$ thỏa mãn

$$x \in V_2 \cap S, \quad f(x) \leq_2^{\mathcal{D}^u_{1,V_1}} f(\bar{x}) \Rightarrow f(x) = f(\bar{x}).$$

Điều này tương đương với

$$x \in V_2 \cap S, \quad f(\bar{x}) \in f(x) + \mathcal{D}^u_{1,V_1}(f(\bar{x})) \Rightarrow f(x) = f(\bar{x}). \tag{3.29}$$

Nếu $x_0 \in V_1 \cap V_2 \cap S$ thỏa mãn $f(x_0) \leq^C f(\bar{x})$ thì

$$f(\bar{x}) - f(x_0) \in C(f(x_0), f(\bar{x})) \subset \bigcup_{x \in V_1 \cap S} C(f(x), f(\bar{x})) = \mathcal{D}^u_{1,V_1}(f(\bar{x})).$$

Kết hợp với (3.29) ta suy ra $f(x_0) = f(\bar{x})$. Vậy $\bar{x}$ là một nghiệm C-không trội địa phương.

(ii) Giả sử $\bar{x}$ là một nghiệm C-không trội địa phương, với lân cận tương ứng là $V \in \mathcal{N}(\bar{x})$. Nếu $x_0 \in V \cap S$ thỏa mãn $f(x_0) \leq_2^{\mathcal{D}^i_{1,V}} f(\bar{x})$ thì

$$f(\bar{x}) - f(x_0) \in \mathcal{D}^i_{1,V}(f(\bar{x})) = \bigcap_{x \in V \cap S} C(f(x), f(\bar{x})) \subset C(f(x_0), f(\bar{x})).$$

Do đó, $f(x_0) \leq^C f(\bar{x})$. Vì $\bar{x}$ là một nghiệm C-không trội địa phương, nên ta suy ra $f(x_0) = f(\bar{x})$. Điều này kéo theo $\bar{x}$ là một nghiệm $\leq_2^{\mathcal{D}^i_{1,V}}$-không trội địa phương.

(iii) Vì $\bar{x}$ là một nghiệm C-cực tiểu địa phương nên tồn tại một lân cận V của $\bar{x}$ sao cho với mọi $x \in V \cap S$, nếu $f(x) \leq^C f(\bar{x})$ thì $f(\bar{x}) \leq^C f(x)$. Giả sử tồn tại $x_0 \in V \cap S$ thỏa mãn $f(x_0) \leq^{\widehat{C}_V} f(\bar{x})$. Khi đó $f(\bar{x}) - f(x_0) \in \widehat{C}_V(f(x_0), f(\bar{x}))$, hay

$$f(\bar{x}) - f(x_0) \in \Big(C(f(x_0), f(\bar{x})) \setminus (-\mathcal{D}^u_{2,V}(f(\bar{x}))) \Big) \cup \{0\}. \tag{3.30}$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned}
C(f(x_0), f(\bar{x})) \setminus (-\mathcal{D}^u_{2,V}(f(\bar{x}))) &= C(f(x_0), f(\bar{x})) \cap \left[- \bigcup_{x \in V \cap S} C(f(\bar{x}), f(x)) \right]^c \\
&= C(f(x_0), f(\bar{x})) \cap \left[- \bigcap_{x \in V \cap S} C^c(f(\bar{x}), f(x)) \right] \\
&= \bigcap_{x \in V \cap S} [C(f(x_0), f(\bar{x})) \cap (-C^c(f(\bar{x}), f(x)))] \\
&\subset C(f(x_0), f(\bar{x})) \cap (-C^c(f(\bar{x}), f(x_0))).
\end{aligned}$$

Nếu $f(x_0) \neq f(\bar{x})$ thì theo (3.30) và bao hàm thức trên ta suy ra

$$f(\bar{x}) - f(x_0) \in C(f(x_0), f(\bar{x})),$$
$$f(x_0) - f(\bar{x}) \notin C(f(\bar{x}), f(x_0)),$$

tức là $f(x_0) \leq^C f(\bar{x})$ và $f(\bar{x}) \not\leq^C f(x_0)$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\bar{x}$ là nghiệm C-cực tiểu địa phương. Từ đó suy ra $f(x_0) = f(\bar{x})$. Do đó $\bar{x}$ là một nghiệm $\widehat{C}_V$-không trội địa phương. □

Nhận xét 3.24. Trong trường hợp $S := X$ và $\bar{x}$ là nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán (P), các mối liên hệ phát biểu ở trên bao hàm các kết quả phát biểu trong [11, Mệnh đề 2.5]. Cụ thể, đối với ánh xạ đa trị một biến $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$ ta thu được các trường hợp riêng sau đây của Định lý 3.23:

(i) áp dụng Định lý 3.23(i) cho trường hợp $V = X$ và $C_1^{\mathcal{D}}$, ta có khẳng định $\mathcal{D}^u_{1,X}(y) = \mathcal{D}(f(X))$, với mọi $y \in Y$ và ta thu được [11, Mệnh đề 2.5(iv)].

(ii) áp dụng Định lý 3.23(ii) cho trường hợp $V = X$ và ánh xạ thứ tự hai biến $C_1^{\mathcal{D}}$ thì $\mathcal{D}^i_{1,X}(y) = \bigcap_{x \in X} \mathcal{D}(f(x))$ với mọi $y \in Y$, do đó ta thu được [11, Mệnh đề 2.5(iii)]. Tương tự, nếu áp dụng cho ánh xạ $C_2^{\mathcal{D}}$ thì $\mathcal{D}^i_{1,X}(y) = \mathcal{D}(y)$ với mọi $y \in Y$, do đó ta thu được [11, Mệnh đề 2.5(ii)].

(iii) áp dụng Định lý 3.23(iii) cho trường hợp $C_2^{\mathcal{D}}$ và $V = X$, ta thu được kết quả trong [11, Mệnh đề 2.5(i)]. Lưu ý rằng khi đó, $\mathcal{D}^u_{2,V}$ trở thành ánh xạ hằng $\mathcal{D}^u_{2,V}(y) = \mathcal{D}(f(X))$ với mọi $y \in Y$ và $\widehat{C}_V(y_1, y_2) = \big(\mathcal{D}(y_2) \backslash (-\mathcal{D}(f(X)))\big) \cup \{0\}$.

3.2 Đặc trưng nghiệm sử dụng hàm vô hướng hóa phi tuyến

Trong mục này, điều kiện cần và đủ cho điểm không trội của một tập hợp và nghiệm không trội địa phương của bài toán tối ưu véctơ sẽ thu được thông qua phương pháp vô hướng hóa. Ta biết rằng, vô hướng hóa là một công cụ toán học quan trọng khi nghiên cứu các bài toán tối ưu véctơ vì nó giúp chuyển bài toán này về bài toán tối ưu thông thường. Kỹ thuật này thường dựa vào các hàm vô hướng hóa, trong đó đặc biệt quan trọng phải kể đến hàm vô hướng hóa phi tuyến có dạng sau

$$\varphi_{K,q}(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} : y \in tq - K\}. \tag{3.31}$$

Hàm $\varphi_{K,q}$ trong (3.31) được sử dụng để thiết lập các kết quả liên quan đến tính chất tách phi tuyến của các tập không lồi - một hướng nghiên cứu được khởi xướng bởi Gerstewitz vào những năm 1980 (theo [30, tr. 79]). Hàm này sau đó đã được áp dụng rộng rãi để thu được các kết quả cho bài toán tối ưu véctơ không lồi, trong đó không gian ảnh Y được trang bị quan hệ thứ tự bộ phận $\leq^K$ xác định bởi nón hằng lồi nhọn K (xem [30, 57]). Nếu cấu trúc thứ tự được định nghĩa bởi một ánh xạ đa trị một biến $\mathcal{D}$ thì các kết quả liên quan đến hàm vô hướng hóa này cũng đã được nghiên cứu, chẳng hạn trong [5, 14, 15, 16, 24].

Ở đây, chúng ta sẽ dùng phương pháp vô hướng hóa để đặc trưng điểm $\leq^C$-không trội/không trội yếu của tập Ω và nghiệm C-không trội/không trội yếu địa phương của bài toán (P) thông qua một dạng mở rộng của hàm $\varphi_{K,q}$. Hàm vô hướng hóa này cho phép hướng q thay đổi bằng cách sử dụng ánh xạ $q : Y \times Y \to Y$ thay cho véctơ q cố định. Các kết quả thu được có hai điểm mới. Một là thiết lập được các kết quả vô hướng hóa tổng quát có thể áp dụng cho ánh xạ thứ tự hai biến C. Hai là, trong trường hợp đặc biệt khi xét cấu trúc thứ tự một biến, kết quả thu được đã giảm nhẹ được giả thiết của bài toán (xem Nhận xét 3.32 và Ví dụ 3.33). Hàm vô hướng hóa Gerstewitz suy rộng được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 3.25. Xét ánh xạ đa trị $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$ thỏa mãn $\operatorname{dom} C = Y \times Y$, hàm $q : Y \times Y \to Y\backslash\{0\}$ và điểm $\bar{y} \in Y$. *Hàm vô hướng hóa* $\varphi^C_{\bar{y},q} : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ được định nghĩa như sau

$$\varphi^C_{\bar{y},q}(y) := \inf \Lambda^C_q(y, \bar{y}),$$

trong đó $\Lambda^C_q : Y \times Y \rightrightarrows \mathbb{R}$,

$$\Lambda^C_q(y_1, y_2) := \{t \in \mathbb{R} : y_2 + tq(y_1, y_2) - y_1 \in C(y_1, y_2)\}$$

với quy ước $\inf \emptyset = +\infty$.

Một số tính chất quan trọng của hàm vô hướng hóa $\varphi^C_{\bar{y},q}$ được trình bày trong Bổ đề 3.27 dưới đây. Trong phần này ta sử dụng khái niệm bao đóng đại số theo hướng (xem các tài liệu [55], [57, Mục 2.3.2] và [33, Mục 3]). Điều này là tự nhiên vì các tập mức dưới của hàm vô hướng hóa $\varphi^C_{\bar{y},q}$ liên quan đến khái niệm bao đóng đại số theo hướng (xem Bổ đề 3.27(iii)). Cụ thể, giá trị của hàm $\varphi^C_{\bar{y},q}$ phụ thuộc

vào bao đóng đại số của giá trị của ánh xạ đa trị C vì $\varphi^{C}_{\bar{y},q} = \varphi^{\mathrm{vcl}_q C}_{\bar{y},q}$ (xem Bổ đề 3.27(i)).

Giả sử E là một tập con khác rỗng của Y và $q \in Y\backslash\{0\}$. *Phần trong theo hướng* q của E (xem [57]), được ký hiệu là $\mathrm{int}_q E$, là tập hợp

$$\mathrm{int}_q\, E := \{y \in E : \exists\, \varepsilon > 0, y + [0,\varepsilon]q \subset E\}. \tag{3.32}$$

Ta có $\mathrm{cor}\, E = \bigcap_{q\in Y\backslash\{0\}} \mathrm{int}_q\, E$. Tập tất cả các phần tử thuộc Y nhưng không thuộc $\mathrm{cor}\, E$ hoặc $\mathrm{cor}(Y\backslash E)$ được gọi là *biên đại số* của E. Ta biết rằng nếu E là tập lồi và $\mathrm{int}\, E \neq \emptyset$ thì $\mathrm{cor}\, E = \mathrm{int}\, E$ (xem [42, Bổ đề 1.32]). Nhắc lại rằng *bao đóng của* E *theo hướng* q (sau đây gọi là q*-bao đóng véctơ của* E) là tập hợp

$$\mathrm{vcl}_q E := \{y \in Y : \forall \lambda > 0\, \exists\, \lambda' \in [0,\lambda] \text{ sao cho } y + \lambda' q \in E\}.$$

Ta nói rằng tập E là *đóng theo hướng* q nếu $\mathrm{vcl}_q E = E$. *Biên theo hướng* q *của* E (xem [57]) là tập hợp $\mathrm{bd}_q E := \mathrm{vcl}_q E\backslash\mathrm{int}_{-q} E$. Nhắc lại rằng *nón lùi xa* (recession cone) của tập E là nón lồi $0^+E := \{y \in Y : E + \mathbb{R}_+ y = E\}$. Bổ đề sau đây tổng hợp một số tính chất của bao đóng véctơ của một tập hợp. Các tính chất này đã được trình bày, chẳng hạn trong [57, Mục 2.3.2], song ở đây chúng tôi đưa ra chứng minh chi tiết để thuận lợi cho sự theo dõi của độc giả.

Bổ đề 3.26. *Ta có*

(i) $y \in \mathrm{vcl}_q E$ *khi và chỉ khi tồn tại dãy* $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ *sao cho* $t_n \to 0$ *và* $y + t_n q \in E$*, với mọi* n*.*

(ii) $E \subset \mathrm{vcl}_q E \subset \mathrm{vcl}_q E + \mathbb{R}_+ q = \mathrm{vcl}_q(E + \mathbb{R}_+ q)$.

(iii) $\mathrm{vcl}_q(\mathrm{vcl}_q E) = \mathrm{vcl}_q E$ *và* $\mathrm{vcl}_q(\mathrm{vcl}_q E + \mathbb{R}_+ q) = \mathrm{vcl}_q(E + \mathbb{R}_+ q)$.

(iv) $Y\backslash\mathrm{vcl}_q E = \mathrm{int}_q(Y\backslash E)$.

(v) *Nếu* $q \in 0^+E$ *thì*

$$E + (0,+\infty)q = \mathrm{int}_{-q} E, \tag{3.33}$$

$$\mathrm{vcl}_q E + [0,+\infty)q = \mathrm{vcl}_q E. \tag{3.34}$$

(vi) *Nếu* $q \in -\mathrm{cor}(0^+E)\backslash\{0\}$ *thì* $\mathrm{cor} E = \mathrm{int}_q E$.

Chứng minh. Khẳng định (i) và (iv) là dễ thấy.

(ii) Các bao hàm thức

$$E \subset \mathrm{vcl}_q E \subset \mathrm{vcl}_q E + \mathbb{R}_+ q \subset \mathrm{vcl}_q(E + \mathbb{R}_+ q)$$

suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

Để chứng minh $\mathrm{vcl}_q(E + \mathbb{R}_+ q) \subset \mathrm{vcl}_q E + \mathbb{R}_+ q$, ta xét điểm $y \in Y$ và dãy $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \to 0$, thỏa mãn $y + t_n q \in E + \mathbb{R}_+ q$. Khi đó tồn tại dãy $(s_n) \subset \mathbb{R}_+$ thỏa mãn $y + t_n q \in E + s_n q$ với mọi n. Nếu tồn tại k sao cho $s_k \geq t_k$ thì ta có $y \in E + (s_k - t_k)q \subset E + \mathbb{R}_+ q \subset \mathrm{vcl}_q E + \mathbb{R}_+ q$. Nếu ngược lại thì $s_n < t_n$ với mọi n và do đó $s_n \to 0$ và $y + (t_n - s_n)q \in E$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó, ta suy ra $y \in \mathrm{vcl}_q(E) \subset \mathrm{vcl}_q(E) + \mathbb{R}_+ q$, đây là điều phải chứng minh.

(iii) Bao hàm thức $\mathrm{vcl}_q E \subset \mathrm{vcl}_q(\mathrm{vcl}_q E)$ suy từ định nghĩa. Để chứng minh bao hàm thức ngược lại, giả sử $y \in \mathrm{vcl}_q(\mathrm{vcl}_q E)$ và $y \notin \mathrm{vcl}_q E$. Khi đó tồn tại $\lambda > 0$ sao cho $(y + [0, \lambda]q) \cap E = \emptyset$. Vì $y \in \mathrm{vcl}_q(\mathrm{vcl}_q E)$ nên tồn tại dãy $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \to 0$, sao cho $y + t_n q \in \mathrm{vcl}_q E$ với mọi n. Do $y \notin \mathrm{vcl}_q E$ nên ta suy ra $t_n > 0$ và do đó, với mỗi n tồn tại $s_n \in [0, t_n]$ sao cho $(y + t_n q) + s_n q \in E$. Do đó $s_n \to 0$. Khi đó $\alpha_n := t_n + s_n > 0$, $\alpha_n \to 0$ và $y + \alpha_n q \in E$, mâu thuẫn.

Từ phần (ii) ta có

$$\mathrm{vcl}_q(\mathrm{vcl}_q E + \mathbb{R}_+ q) = \mathrm{vcl}_q \mathrm{vcl}_q(E + \mathbb{R}_+ q) = \mathrm{vcl}_q(E + \mathbb{R}_+ q)$$

nên ta suy ra đẳng thức thứ hai của (iii).

(v) Xét $y \in E$ và $q \in 0^+ E$. Với mỗi $t > 0$ ta có

$$y + tq + [0, t/2](-q) = y + [t/2, t]q \subset E$$

và $y + tq \in \mathrm{int}_{-q} E$. Do đó, $E + (0, +\infty)q \subset \mathrm{int}_{-q} E$. Ngược lại, nếu $y \in \mathrm{int}_{-q} E$ thì tồn tại $t > 0$ sao cho $y + [0, t](-q) \subset E$. Suy ra $y \in tq + E \subset (0, +\infty)q + E$.

Để chứng minh đẳng thức thứ hai của (v), ta thấy $\mathrm{vcl}_q E \subset \mathrm{vcl}_q E + [0, +\infty)q$. Ngược lại nếu $y \in \mathrm{vcl}_q E$ thì tồn tại dãy $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \to 0$ sao cho $y + t_n q \in E$. Do đó, với mỗi $s \geq 0$, vì $q \in 0^+ E$ nên ta có

$$y + sq + t_n q = (y + t_n q) + sq \in E + [0, +\infty]q = E.$$

Vậy $y + sq \in \mathrm{vcl}_q E$, điều phải chứng minh.

(vi) Từ khẳng định (3.32) ta suy ra $\mathrm{cor} E \subset \mathrm{int}_q E$ với mọi $q \in Y\backslash\{0\}$. Ngược lại, giả sử $q \in -\mathrm{cor}(0^+E)\backslash\{0\}$, xét $y \in \mathrm{int}_q E$ và véctơ bất kỳ $v \in Y\backslash\{0\}$. Khi đó tồn tại $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ sao cho $y + [0, \varepsilon_1]q \subset E$ và $-q + [0, \varepsilon_2]v \subset 0^+E$, tức là $E + \mathbb{R}_+(-q + [0, \varepsilon_2]v) = E$. Với mỗi $t \in [0, \varepsilon_1\varepsilon_2]$ ta có

$$y + tv = (y + \varepsilon_1 q) + \varepsilon_1((t/\varepsilon_1)v - q) \in E + \mathbb{R}_+(-q + [0, \varepsilon_2]v) = E.$$

Suy ra $y \in \mathrm{int}_v E$. Do đó $y \in \mathrm{cor}\, E$ vì v được chọn tùy ý. □

Bây giờ ta xem xét một số tính chất của hàm vô hướng hóa $\varphi^C_{\bar{y},q}$. Cho trước $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$ và $q : Y \times Y \to Y\backslash\{0\}$, $\mathrm{vcl}_q C$, $\mathrm{bd}_q C$ và $\mathrm{vcl}_q C + \mathbb{R}_+ q$ ký hiệu các ánh xạ đa trị từ $Y \times Y$ vào Y lần lượt cho bởi $(\mathrm{vcl}_q C)(y_1, y_2) = \mathrm{vcl}_{q(y_1,y_2)} C(y_1, y_2)$, $(\mathrm{bd}_q C)(y_1, y_2) = \mathrm{bd}_{q(y_1,y_2)} C(y_1, y_2)$ và

$$(\mathrm{vcl}_q C + \mathbb{R}_+ q)(y_1, y_2) = (\mathrm{vcl}_q C)(y_1, y_2) + \mathbb{R}_+ q(y_1, y_2).$$

Bổ đề 3.27. *Các khẳng định sau đây là đúng:*

(i) $\varphi^C_{\bar{y},q} = \varphi^{C'}_{\bar{y},q}$ *với mọi ánh xạ đa trị* $C' : Y \times Y \rightrightarrows Y$ *thỏa mãn*

$$\mathrm{gph}\, C \subset \mathrm{gph}\, \mathrm{vcl}_q C' \subset \mathrm{gph}(\mathrm{vcl}_q C + \mathbb{R}_+ q). \tag{3.35}$$

Nói riêng, $\varphi^C_{\bar{y},q} = \varphi^{\mathrm{vcl}_q C}_{\bar{y},q} = \varphi^{\widetilde{C}}_{\bar{y},q}$, *trong đó* $\widetilde{C} := \mathrm{vcl}_q C + \mathbb{R}_+ q$.

(ii) Với mọi $y \in Y$ *và* $s \in \mathbb{R}$ *ta có*

$$\varphi^C_{\bar{y},q}(y) < s \Leftrightarrow y - \bar{y} \in (-\infty, s)q(y, \bar{y}) - C(y, \bar{y}).$$

(iii) Với mọi $y \in Y$ *và* $s \in \mathbb{R}$ *ta có*

$$\varphi^C_{\bar{y},q}(y) \le s \Leftrightarrow y - \bar{y} \in (-\infty, s]q(y, \bar{y}) - \mathrm{vcl}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y}). \tag{3.36}$$

Chứng minh. (i) Từ khẳng định (3.35) ta suy ra $\Lambda^C_q(y_1, y_2) \subset \Lambda^{\widetilde{C}}_q(y_1, y_2)$, với mọi $y_1, y_2 \in Y$. Do đó $\varphi^{\widetilde{C}}_{\bar{y},q} \le \varphi^C_{\bar{y},q}$. Nói riêng, $\varphi^{\widetilde{C}}_{\bar{y},q}(y) = \varphi^C_{\bar{y},q}(y)$ nếu $\varphi^{\widetilde{C}}_{\bar{y},q}(y) = +\infty$. Xét $\varphi^{\widetilde{C}}_{\bar{y},q}(y) < +\infty$ và lấy $(y, \bar{y}, t) \in \mathrm{gph}\, \Lambda^{\widetilde{C}}_q$. Khi đó

$$\bar{y} + tq(y, \bar{y}) - y \in \widetilde{C}(y, \bar{y}) = \mathrm{vcl}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y}) + \mathbb{R}_+ q(y, \bar{y}).$$

Do đó tồn tại $\alpha \geq 0$ sao cho

$$\bar{y} + tq(y, \bar{y}) - y - \alpha q(y, \bar{y}) \in \mathrm{vcl}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y}).$$

Theo Bổ đề 3.26(i) thì tồn tại dãy $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ thỏa mãn $t_n \to 0$ và

$$\bar{y} + tq(y, \bar{y}) - y - \alpha q(y, \bar{y}) + t_n q(y, \bar{y}) \in C(y, \bar{y}), \quad \forall n.$$

Suy ra $(y, \bar{y}, t - \alpha + t_n) \in \mathrm{gph}\, \Lambda_q^C$ và $\varphi_{\bar{y},q}^C(y) \leq t - \alpha + t_n$ với mọi n. Vì $t_n \to 0$ và $\alpha \geq 0$ nên $\varphi_{\bar{y},q}^C(y) \leq t$. Hơn nữa, do t được lấy tùy ý trong $\Lambda_q^{\widetilde{C}}(y, \bar{y})$ nên $\varphi_{\bar{y},q}^C(y) \leq \inf \Lambda_{\bar{y},q}^{\widetilde{C}}(y, \bar{y}) = \varphi_{\bar{y},q}^{\widetilde{C}}(y)$. Do đó $\varphi_{\bar{y},q}^C(y) = \varphi_{\bar{y},q}^{\widetilde{C}}(y)$.

Cuối cùng, nếu C' thỏa mãn (3.35) thì

$$\varphi_{\bar{y},q}^C = \varphi_{\bar{y},q}^{\widetilde{C}} \leq \varphi_{\bar{y},q}^{\mathrm{vcl}_q C'} \leq \varphi_{\bar{y},q}^C$$

và ta có $\varphi_{\bar{y},q}^C = \varphi_{\bar{y},q}^{\widetilde{C}} = \varphi_{\bar{y},q}^{\mathrm{vcl}_q C'}$. Rõ ràng $C' := C$ thỏa mãn (3.35) nên ta có $\varphi_{\bar{y},q}^C = \varphi_{\bar{y},q}^{\mathrm{vcl}_q C} = \varphi_{\bar{y},q}^{\widetilde{C}}$.

(ii) Xét $y \in Y$ và $s \in \mathbb{R}$. Khi đó, $\varphi_{\bar{y},q}^C(y) < s$ khi và chỉ khi tồn tại $t \in \mathbb{R}$ sao cho $(y, \bar{y}, t) \in \mathrm{gph}\, \Lambda_{\bar{y},q}^C$ và $t < s$, hay tương đương

$$y - \bar{y} \in (-\infty, s) q(y, \bar{y}) - C(y, \bar{y}).$$

(iii) Lấy tùy ý $y \in Y$ và $s \in \mathbb{R}$. Nếu $y - \bar{y} \in (-\infty, s] q(y, \bar{y}) - \mathrm{vcl}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y})$ thì theo phần (i) ta được

$$\varphi_{\bar{y},q}^C(y) = \varphi_{\bar{y},q}^{\mathrm{vcl}_q C}(y) \leq s.$$

Ngược lại, giả sử rằng $\varphi_{\bar{y},q}^C(y) \leq s$. Khi đó, với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$ ta có $\varphi_{\bar{y},q}^C(y) < s + 1/n$. Theo kết quả phần (ii) ta suy ra

$$y - \bar{y} \in (-\infty, s + 1/n) q(y, \bar{y}) - C(y, \bar{y}).$$

Do đó, tồn tại dãy số thực (t_n) thỏa mãn $t_n < s + 1/n$ và $y - \bar{y} \in t_n q(y, \bar{y}) - C(y, \bar{y})$ với mọi n. Nếu $t_n \leq s$ với n nào đó thì

$$y - \bar{y} \in (-\infty, s] q(y, \bar{y}) - C(y, \bar{y}) \subset (-\infty, s] q(y, \bar{y}) - \mathrm{vcl}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y}).$$

Nếu ngược lại thì $s < t_n$ với mọi n. Khi đó ta có $s_n := t_n - s > 0$, $s_n \to 0$ và

$y - \bar{y} - sq(y, \bar{y}) \in s_n q(y, \bar{y}) - C(y, \bar{y})$ với mọi n. Suy ra

$$y - \bar{y} \in sq(y, \bar{y}) - \mathrm{vcl}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y}) \subset (-\infty, s]q(y, \bar{y}) - \mathrm{vcl}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y}).$$

Bổ đề được chứng minh xong. □

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng tập $\mathrm{vcl}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y})$ trong biểu thức (3.36) không thể thay thế bằng tập $C(y, \bar{y})$.

Ví dụ 3.28. Xét $Y := \mathbb{R}^2, \bar{y} := (0, 0)$, $C(y, \bar{y}) := \mathrm{int}\, \mathbb{R}^2_+ \cup \{(0, 0)\}$ và $q(y, \bar{y}) := (1, 1)$ với mọi $y \in Y$. Khi đó, $q(y, \bar{y}) \in 0^+ C(y, \bar{y})$ và theo (3.34) ta có

$$(-\infty, 0]q(y, \bar{y}) - \mathrm{vcl}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y}) = -\mathrm{vcl}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y}) = -\mathbb{R}^2_+, \quad \forall y \in Y.$$

Ngoài ra, áp dụng Bổ đề 3.27(i), ta suy ra rằng $\varphi^C_{\bar{y},q}(y) = \varphi^{\mathrm{vcl}_q C}_{\bar{y},q}(y)$ với mọi $y = (y_1, y_2) \in Y$ và

$$\begin{aligned}
\varphi^C_{\bar{y},q}(y) &= \inf\{t \in \mathbb{R} : \bar{y} + tq(y, \bar{y}) - y \in \mathrm{vcl}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y})\} \\
&= \inf\{t \in \mathbb{R} : (t - y_1, t - y_2) \in \mathbb{R}^2_+\} \\
&= \max\{y_1, y_2\}.
\end{aligned}$$

Xét điểm $z = (0, -1)$ thì ta có $\varphi^C_{\bar{y},q}(z) = 0$. Chú ý rằng $z - \bar{y} = (0, -1)$ thuộc $-\mathrm{vcl}_{q(z,\bar{y})} C(z, \bar{y})$, nhưng không thuộc $-C(z, \bar{y})$.

Nhận xét 3.29. (i) Trong [15], các tác giả giới thiệu hàm vô hướng hóa $\xi : Y \times Y \to \mathbb{R}$ khi làm việc với ánh xạ thứ tự một biến $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$, ở đó giá trị $\mathcal{D}(y)$ là nón lồi đóng chính thường với mọi $y \in Y$ và $k \in \mathrm{int}(\bigcap_{y \in Y} \mathcal{D}(y))$:

$$\xi(y, z) = \inf\{t \in \mathbb{R} : z \in tk - \mathcal{D}(y)\}. \tag{3.37}$$

Rõ ràng, $\xi(y, z) = \varphi^{C_1^{\mathcal{D}}}_{y-z,q^k}(y) = \varphi^{C_2^{\mathcal{D}}}_{y,q^k}(y + z)$ với $q^k : Y \times Y \to Y$, $q^k(y, z) = k$. Do giả thiết của $\mathcal{D}$, dễ dàng suy ra $0^+\mathcal{D}(y) = \mathcal{D}(y)$, $\mathrm{cor}(0^+\mathcal{D}(y)) = \mathrm{int}\mathcal{D}(y)$ và $\mathrm{vcl}_k \mathcal{D}(y) = \mathcal{D}(y)$. Do đó, áp dụng Bổ đề 3.26(v) ta thấy rằng phần (ii) và (iii) của Bổ đề 3.27 rút gọn thành phần (i) và (ii) của [15, Bổ đề 2.3]. Lưu ý rằng Bổ đề 3.27 được phát biểu mà không đặt giả thiết gì lên ánh xạ thứ tự hai biến C.

(ii) Trong [9, Mệnh đề 3.1], các tác giả đưa ra một biểu diễn của hàm vô hướng hóa ξ để đặc trưng điểm không trội của tập Ω theo quan hệ thứ tự một biến sinh

bởi $C_2^{\mathcal{D}}$, kèm theo giả thiết $0 \in \mathcal{D}(y)$ với mọi $y \in Y$ và $k \in \bigcap_{y\in Y} \mathcal{D}(y)$. Cụ thể, các tác giả xét hàm vô hướng hóa $\xi' : Y \times Y \to \mathbb{R}$, $\xi'(y,z) = \xi(y, y-z)$ với mọi $y, z \in Y$. Theo phần (i) ở trên ta có $\xi'(y,z) = \varphi^{C_1^{\mathcal{D}}}_{z,q^k}(y) = \varphi^{C_2^{\mathcal{D}}}_{y,q^k}(2y-z)$ và do đó điều kiện đủ của Bổ đề 3.27(iii) rút gọn thành [9, Mệnh đề 3.1(i)], còn điều kiện cần thì bao hàm [9, Mệnh đề 3.1(ii)] do khẳng định (3.34) và điều kiện đủ của Bổ đề 3.27(ii) rút gọn thành [9, Mệnh đề 3.1(iii)].

Các Bổ đề 3.26 và 3.27 cho phép đặc trưng hóa các điểm không trội của một tập thông qua hàm vô hướng hóa $\varphi^C_{\bar{y},q}$. Trong ví dụ tiếp theo, chúng tôi minh họa phương pháp này đối với quan hệ ưu tiên công bằng được đề cập trong Nhận xét 3.2(ii). Ở đây, với mỗi tập con khác rỗng $\Omega \subset Y$, ta kí hiệu

$$\begin{aligned}\operatorname{argmin}_\Omega \varphi &:= \{\bar{y} \in \Omega : \varphi(\bar{y}) \leq \varphi(y), \forall y \in \Omega\},\\ \operatorname{argsmin}_\Omega \varphi &:= \{\bar{y} \in \Omega : \varphi(\bar{y}) < \varphi(y), \forall y \in \Omega\backslash\{\bar{y}\}\}.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.30. Nhắc lại rằng với mỗi $y^1, y^2 \in \mathbb{R}^2$, ta định nghĩa $y^1 \leq_e y^2$ khi và chỉ khi $(y^1, y^1) \leq^C (y^2, p(y^2))$, trong đó $p((y_1, y_2)) = (y_2, y_1)$ và

$$C((y^1,v^1),(y^2,v^2)) = \begin{cases} (-D_1)\times\mathbb{R}^2 & \text{nếu} \quad y^1, y^2 \in S_1,\\ (-D_2)\times\mathbb{R}^2 & \text{nếu} \quad y^1, y^2 \in S_2,\\ \mathbb{R}^2\times(-D_1) & \text{nếu} \quad y^1 \in S_1, y^2 \in S_2,\\ \mathbb{R}^2\times(-D_2) & \text{nếu} \quad y^1 \in S_2, y^2 \in S_1.\end{cases}$$

Xét $q((y^1,v^1),(y^2,v^2)) = (-1,-1,-1,-1)$, với mọi $(y^1,v^1),(y^2,v^2) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$. Ta thấy ánh xạ đa trị C là nhận giá trị là các nón lồi đóng. Do đó

$$\begin{aligned}&0^+C((y^1,v^1),(y^2,v^2)) = C((y^1,v^1),(y^2,v^2)),\\ &\operatorname{vcl}_q C((y^1,v^1),(y^2,v^2)) = C((y^1,v^1),(y^2,v^2)),\ \forall (y^1,v^1),(y^2,v^2) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2. \quad (3.38)\end{aligned}$$

Ngoài ra, ta có

$$\varphi^C_{(y^2,p(y^2)),q}((y^1,y^1)) = \begin{cases} \max\{y_1^2 - y_1^1, h(y^1,y^2)\} & \text{nếu} \quad y^1, y^2 \in S_1,\\ \max\{y_2^2 - y_2^1, h(y^1,y^2)\} & \text{nếu} \quad y^1, y^2 \in S_2,\\ \max\{y_2^2 - y_1^1, h(y^1,y^2)\} & \text{nếu} \quad y^1 \in S_1, y^2 \in S_2,\\ \max\{y_1^2 - y_2^1, h(y^1,y^2)\} & \text{nếu} \quad y^1 \in S_2, y^2 \in S_1,\end{cases}$$

trong đó $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(y^1, y^2) = \dfrac{y_1^2 + y_2^2 - (y_1^1 + y_2^1)}{2}$. Do đó, từ (3.34), (3.36) và (3.38) ta suy ra

$$\varphi^C_{(y^2,p(y^2)),q}((y^1, y^1)) \leq 0 \Leftrightarrow (y^1, y^1) \leq^C (y^2, p(y^2)).$$

Mặt khác, $\varphi^C_{(y,p(y)),q}((y, y)) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}^2$. Do đó, với một tập khác rỗng $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, điểm $\bar{y} \in \Omega$ là một điểm không trội theo nghĩa công bằng của Ω, tức là $y \not\leq_e \bar{y}$ với mọi $y \in \Omega \setminus \{\bar{y}\}$, nếu

$$\varphi^C_{(\bar{y},p(\bar{y})),q}((y, y)) > 0 = \varphi^C_{(\bar{y},p(\bar{y})),q}((\bar{y}, \bar{y})), \quad \forall y \in \Omega.$$

Do đó, nếu ký hiệu $g_{\bar{y}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_{\bar{y}}(y) = \varphi^C_{(\bar{y},p(\bar{y})),q}((y, y))$ thì $\bar{y} \in \Omega$ là một điểm không trội theo nghĩa công bằng của Ω khi và chỉ khi $\bar{y} \in \operatorname{argmin}_\Omega g_{\bar{y}}$. Kết quả này được phát biểu cho cấu trúc thứ tự hai biến tổng quát trong Định lý 3.31.

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập điều kiện cần và đủ cho điểm không trội và điểm không trội yếu của một tập theo cấu trúc thứ tự $\leq^C$.

Định lý 3.31. *Cho Ω là một tập con khác rỗng của Y và $\bar{y} \in \Omega$.*

(i) Giả sử $q(y, \bar{y}) \in 0^+C(y, \bar{y})$ với mọi $y \in Y$ và $0 \in \operatorname{bd}_{q(\bar{y},\bar{y})}C(\bar{y}, \bar{y})$. Khi đó, $\bar{y} \in \operatorname{ND}(\Omega, \operatorname{int}_{-q}C)$ khi và chỉ khi $\bar{y} \in \operatorname{argmin}_\Omega \varphi^C_{\bar{y},q}$.

(ii) Giả sử $q(y, \bar{y}) \in \operatorname{cor} 0^+C(y, \bar{y})$ với mọi $y \in Y\setminus\{\bar{y}\}$, $q(\bar{y}, \bar{y}) \in 0^+C(\bar{y}, \bar{y})$ và $0 \in \operatorname{bd}_{q(\bar{y},\bar{y})}C(\bar{y}, \bar{y})$. Khi đó, $\bar{y} \in \operatorname{WND}(\Omega, C)$ khi và chỉ khi $\bar{y} \in \operatorname{argmin}_\Omega \varphi^C_{\bar{y},q}$.

(iii) Giả sử $q(y, \bar{y}) \in 0^+C(y, \bar{y})$ với mọi $y \in Y$ và $0 \in \operatorname{bd}_{q(\bar{y},\bar{y})}C(\bar{y}, \bar{y})$. Khi đó $\bar{y} \in \operatorname{ND}(\Omega, \operatorname{vcl}_q C)$ khi và chỉ khi $\bar{y} \in \operatorname{argsmin}_\Omega \varphi^C_{\bar{y},q}$.

(iv) Giả sử $C(y, \bar{y})$ là đóng theo hướng $q(y, \bar{y})$ với mọi $y \in Y\setminus\{\bar{y}\}$, $q(y, \bar{y}) \in 0^+C(y, \bar{y})$ với mọi $y \in Y$ và $0 \in \operatorname{bd}_{q(\bar{y},\bar{y})}C(\bar{y}, \bar{y})$. Khi đó, $\bar{y} \in \operatorname{ND}(\Omega, C)$ khi và chỉ khi $\bar{y} \in \operatorname{argsmin}_\Omega \varphi^C_{\bar{y},q}$.

(v) Giả sử $q(y, \bar{y}) \in 0^+C(y, \bar{y})$, với mọi $y \in Y$ và $0 \in \operatorname{bd}_{q(\bar{y},\bar{y})}C(\bar{y}, \bar{y})$. Khi đó, nếu $\bar{y} \in \operatorname{argmin}_\Omega \varphi^C_{\bar{y},q} \setminus \operatorname{argsmin}_\Omega \varphi^C_{\bar{y},q}$ thì

$$\emptyset \neq \{y \in \Omega\setminus\{\bar{y}\} : \bar{y} \in y + \operatorname{bd}_{q(y,\bar{y})}C(y, \bar{y})\} = \{y \in \Omega\setminus\{\bar{y}\} : \varphi^C_{\bar{y},q}(y) = 0\}.$$

Chứng minh. (i) Theo giả thiết và khẳng định (3.33) ta có

$$C(y,\bar{y}) + (0,+\infty)q(y,\bar{y}) = \operatorname{int}_{-q(y,\bar{y})}C(y,\bar{y}), \quad \forall y \in Y.$$

Áp dụng Bổ đề 3.27(ii), ta suy ra với mỗi $y \in Y$,

$$\varphi^C_{\bar{y},q}(y) < 0 \Leftrightarrow \bar{y} \in y + \operatorname{int}_{-q(y,\bar{y})}C(y,\bar{y}).$$

Do đó, $\bar{y} \in \mathrm{ND}(\Omega, \operatorname{int}_{-q}C)$ khi và chỉ khi $\varphi^C_{\bar{y},q}(y) \geq 0$ với mọi $y \in \Omega\backslash\{\bar{y}\}$. Hơn nữa, từ $0 \in \operatorname{bd}_{q(\bar{y},\bar{y})}C(\bar{y},\bar{y})$ suy ra $\varphi^C_{\bar{y},q}(\bar{y}) = 0$. Thật vậy, vì $0 \in \operatorname{vcl}_{q(\bar{y},\bar{y})}C(\bar{y},\bar{y})$, nên tồn tại dãy $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \to 0$, sao cho $t_n q(\bar{y},\bar{y}) \in C(\bar{y},\bar{y})$ với mọi n. Do đó

$$\varphi^C_{\bar{y},q}(\bar{y}) = \inf\{t \in \mathbb{R} : tq(\bar{y},\bar{y}) \in C(\bar{y},\bar{y})\} \leq 0.$$

Thêm vào đó, $tq(\bar{y},\bar{y}) \notin C(\bar{y},\bar{y})$ với mọi $t < 0$. Thật vậy, giả sử ngược lại. Khi đó ta có $[-t_0,+\infty)q(\bar{y},\bar{y}) \subset C(\bar{y},\bar{y})$ với $t_0 > 0$ nào đó. Suy ra $[0,t_0](-q(\bar{y},\bar{y})) \subset C(\bar{y},\bar{y})$, mâu thuẫn vì $0 \notin \operatorname{int}_{-q(\bar{y},\bar{y})}C(\bar{y},\bar{y})$.

Vậy $\bar{y} \in \mathrm{ND}(\Omega, \operatorname{int}_{-q}C)$ khi và chỉ khi $\varphi^C_{\bar{y},q}(y) \geq \varphi^C_{\bar{y},q}(\bar{y})$ với mọi $y \in \Omega$, tức là, khi và chỉ khi $\bar{y} \in \operatorname{argmin}_\Omega \varphi^C_{\bar{y},q}$. Ta có điều phải chứng minh.

(ii) Từ giả thiết $q(y,\bar{y}) \in \operatorname{cor} 0^+C(y,\bar{y})$ và áp dụng Bổ đề 3.26(vi) ta suy ra $\operatorname{cor} C(y,\bar{y}) = \operatorname{int}_{-q(y,\bar{y})}C(y,\bar{y})$ với mọi $y \in Y\backslash\{\bar{y}\}$. Kết hợp với (i) ta được

$$\bar{y} \in \mathrm{ND}(\Omega, \operatorname{int}_{-q}C) = \mathrm{ND}(\Omega, \operatorname{cor} C) = \mathrm{WND}(\Omega, C).$$

Chứng minh của phần (iii) tương tự chứng minh của phần (i), lưu ý rằng trong đó ta sử dụng đẳng thức (3.34) và Bổ đề 3.27(iii) thay cho đẳng thức (3.33) và Bổ đề 3.27(ii).

Phần (iv) suy ra từ phần (iii).

(v) Giả sử $\bar{y} \in \operatorname{argmin}_\Omega \varphi^C_{\bar{y},q}\backslash\operatorname{argsmin}_\Omega \varphi^C_{\bar{y},q}$. Kết hợp phần (i) và (iii) ta suy ra $\bar{y} \in \mathrm{ND}(\Omega, \operatorname{int}_{-q}C)\backslash\mathrm{ND}(\Omega, \operatorname{vcl}_q C)$. Do đó, tồn tại $y \in \Omega\backslash\{\bar{y}\}$ sao cho

$$\bar{y} - y \in \operatorname{vcl}_{q(y,\bar{y})}C(y,\bar{y})\backslash\operatorname{int}_{-q(y,\bar{y})}C(y,\bar{y}) = \operatorname{bd}_{q(y,\bar{y})}C(y,\bar{y}).$$

Hơn nữa, từ (3.36) và giả thiết $\bar{y} \in \operatorname{argmin}_\Omega \varphi^C_{\bar{y},q}$ ta suy ra $\varphi^C_{\bar{y},q}(\bar{y}) \leq \varphi^C_{\bar{y},q}(y) \leq 0$. Do đó, $\varphi^C_{\bar{y},q}(y) = 0$ vì $\varphi^C_{\bar{y},q}(\bar{y}) = 0$.

Ngược lại, nếu $\varphi^C_{\bar{y},q}(y) = 0$ thì từ (3.34) và (3.36) ta có $\bar{y} - y \in \operatorname{vcl}_{q(y,\bar{y})}C(y,\bar{y})$.

Hơn nữa, $\bar{y} - y \notin \text{int}_{-q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y})$ vì $\bar{y} \in \text{ND}(\Omega, \text{int}_{-q} C)$. Do đó, ta thu được $\bar{y} - y \in \text{bd}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y})$, đây là điều phải chứng minh. □

Nhận xét 3.32. Trong [24, Định lý 5.11], hàm vô hướng hóa ξ trong (3.37) được sử dụng để đặc trưng cho điểm $\leq^{C_1^{\mathcal{D}}}$-không trội và điểm $\leq^{C_1^{\mathcal{D}}}$-không trội yếu của tập Ω theo quan hệ sinh bởi ánh xạ đa trị $\mathcal{D}$, ở đó $\mathcal{D}(y)$ được giả thiết là nón lồi nhọn đóng không tầm thường với mọi $y \in Y$. Cụ thể, tác giả xét hàm vô hướng hóa $\chi_{z,k} : Y \to \mathbb{R}$, $\chi_{z,k}(y) = \xi(y, y - z)$ với mọi $y, z \in Y$. Theo phần (i) ở trên ta có $\chi_{z,k}(y) = \varphi^{C_1^{\mathcal{D}}}_{z,q^k}(y)$. Ngoài ra, từ các giả thiết của ánh xạ $\mathcal{D}$ ta suy ra $0 \in \text{bd}_k \mathcal{D}(y)$ với mọi $y \in Y$ nếu $k \in (\bigcap_{y \in Y} \mathcal{D}(y)) \backslash \{0\}$. Khi đó, phần (ii) và (iii) của Định lý 3.31 rút gọn lần lượt thành phần (b) và (a) của [24, Định lý 5.11].

Tương tự, áp dụng phần (ii) và (iii) của Định lý 3.31 với $\varphi^{C_2^{\mathcal{D}}}_{z,q^k}(y)$ ta lần lượt thu được phần (b) và (a) của [24, Hệ quả 5.14].

Các kết quả về vô hướng hóa phi tuyến trong các tài liệu đã biết khi nghiên cứu về đặc trưng hóa nghiệm của bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự thay đổi sinh bởi ánh xạ đa trị một biến $\mathcal{D}$ thường sử dụng giả thiết khác rỗng của tập $(\cap_{y \in \Omega} \mathcal{D}(y)) \backslash \{0\}$ (xem, chẳng hạn [9, Mệnh đề 3.1] và [24, Định lý 5.11(a)]) hoặc giả thiết khác rỗng của $\text{int}(\cap_{y \in \Omega} \mathcal{D}(y))$ (xem, chẳng hạn [15, Bổ đề 2.3] và [24, Định lý 5.11(b)]). Trong các kết quả của mục này chúng tôi đã loại bỏ các giả thiết đó, bằng cách sử dụng hướng thay đổi được $q : Y \times Y \to Y$ thay cho hướng cố định q. Cụ thể, thay vì áp đặt tính chất khác rỗng cho $(\cap_{y \in \Omega} \mathcal{D}(y)) \setminus \{0\}$ hay cho $\text{int}(\cap_{y \in \Omega} \mathcal{D}(y))$, chúng tôi chỉ đòi hỏi điều kiện dễ dàng thỏa mãn hơn, đó là $\mathcal{D}(y) \neq \{0\}$ hoặc $\text{int}\mathcal{D}(y) \neq \emptyset$ tại mọi $y \in \Omega$. Cải tiến này giúp mở rộng lớp các bài toán ứng dụng. Các ví dụ sau đây minh họa cho điều đó.

Ví dụ 3.33. Xét $Y := \mathbb{R}^2$, $\Omega := \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2_+ : y_1 y_2 = 0\}$ và ánh xạ thứ tự hai biến $C_1^{\mathcal{D}}$, trong đó $\mathcal{D} : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$\mathcal{D}(y) := \begin{cases} \mathbb{R}^2_+ & \text{nếu } y_1 > 0, y_2 > 0 \\ \text{cone}\{(0,1)\} & \text{nếu } y_1 \leq 0, y_2 \geq 0 \\ \text{cone}\{(1,0)\} & \text{nếu } y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, (y_1, y_2) \neq (0,0) \\ \text{cone}\{y\} & \text{nếu } y_1 < 0, y_2 < 0. \end{cases}$$

Ta định nghĩa $q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ như sau:

$$q(y,z) := \begin{cases} (1,1) & \text{nếu } y_1 > 0, y_2 > 0 \\ (0,1) & \text{nếu } y_1 \leq 0, y_2 \geq 0 \\ (1,0) & \text{nếu } y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, (y_1,y_2) \neq (0,0) \\ y & \text{nếu } y_1 < 0, y_2 < 0, \end{cases}$$

và hàm vô hướng hóa $\varphi^{C_1^{\mathcal{D}}}_{\bar{y},q}$, trong đó $\bar{y} := (0,0) \in \Omega$. Khi đó ta có

$$\varphi^{C_1^{\mathcal{D}}}_{\bar{y},q}(y) = \begin{cases} \max\{y_1, y_2\} & \text{nếu } y_1 > 0, y_2 > 0 \\ y_2 & \text{nếu } y_1 = 0, y_2 \geq 0 \\ y_1 & \text{nếu } y_1 > 0, y_2 = 0 \\ +\infty & \text{nếu } y_1 < 0, y_2 \geq 0 \text{ hoặc } y_1 \geq 0, y_2 < 0 \\ 1 & \text{nếu } y_1 < 0, y_2 < 0. \end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra các khẳng định sau đây là đúng: $C_1^{\mathcal{D}}(y,\bar{y}) = \mathcal{D}(y)$ là nón lồi nhọn đóng, $q(y,\bar{y}) \in \mathcal{D}(y) = 0^+C_1^{\mathcal{D}}(y,\bar{y})$, $\mathrm{bd}_{q(\bar{y},\bar{y})}C_1^{\mathcal{D}}(\bar{y},\bar{y}) = \{(0,0)\}$ với mọi $y \in Y$ và $\varphi^{C_1^{\mathcal{D}}}_{\bar{y},q}(y) > 0 = \varphi^{C_1^{\mathcal{D}}}_{\bar{y},q}(\bar{y})$ với mọi $y \in \Omega \setminus \{\bar{y}\}$. Do đó, ta có thể áp dụng Định lý 3.31(iv) vào ví dụ này và suy ra $\bar{y}$ là điểm không trội của Ω theo cấu trúc thứ tự $\leq^{C_1^{\mathcal{D}}} = \leq_1^{\mathcal{D}}$. Tuy nhiên, [9, Mệnh đề 3.1] và [24, Định lý 5.11(a)] đều không sử dụng được vì $(\cap_{y\in\Omega}\mathcal{D}(y))\backslash\{(0,0)\}$ là tập rỗng.

Ví dụ 3.34. Xét $Y := \mathbb{R}^2$, $\Omega := \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geq 0\}$, $\bar{y} := (0,0) \in \Omega$ và định nghĩa các ánh xạ $\mathcal{D} : Y \rightrightarrows Y$, $q : Y \times Y \rightrightarrows Y$ với mọi $y = (y_1,y_2), z \in \mathbb{R}^2$ như sau

$$\mathcal{D}(y) = \begin{cases} \mathbb{R}^2_+ & \text{nếu } y_2 \geq 0 \\ -\mathbb{R}^2_+ & \text{nếu } y_2 < 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad q(y,z) := \begin{cases} (1,1) & \text{nếu } y_2 \geq 0 \\ (-1,-1) & \text{nếu } y_2 < 0. \end{cases}$$

Khi đó

$$\varphi^{C_1^{\mathcal{D}}}_{\bar{y},q}(y) = \begin{cases} \max\{y_1, y_2\} & \text{nếu } y_2 \geq 0 \\ \max\{-y_1, -y_2\} & \text{nếu } y_2 < 0. \end{cases}$$

Rõ ràng, $\mathcal{D}(y)$ là nón lồi nhọn, $\mathrm{int}\,\mathcal{D}(y) \neq \emptyset$, $q(y,z) \in \mathrm{int}C_1^{\mathcal{D}}(y,z) = \mathrm{core}\,0^+C(y,z)$ với mọi $y,z \in Y$ và $(0,0) \in \mathbb{R}^2_+ \backslash \mathrm{int}\mathbb{R}^2_+ = \mathrm{bd}_{q(\bar{y},\bar{y})}C_1^{\mathcal{D}}(\bar{y},\bar{y})$. Do đó, ta có thể áp dụng

Định lý 3.31(ii) cho ví dụ này và suy ra $\bar{y}$ là điểm không trội yếu của Ω theo cấu trúc thứ tự $\leq_1^{C_1^{\mathcal{P}}} = \leq_1^{\mathcal{P}}$ vì $\varphi_{\bar{y},q}^{C_1^{\mathcal{P}}}(y) \geq 0 = \varphi_{\bar{y},q}^{C_1^{\mathcal{P}}}(\bar{y})$ với mọi $y \in \Omega$. Trong khi đó, [15, Bổ đề 2.3] và [24, Định lý 5.11(b)] không thể áp dụng được vì $\text{int}(\cap_{y\in\Omega}\mathcal{D}(y))$ là tập rỗng.

Phần tiếp theo trình bày kết quả về sự tồn tại của điểm không trội của tập Ω theo cấu trúc thứ tự hai biến sinh bởi ánh xạ đa trị $\text{int}_{-q}C$. Với mỗi $C : Y \times Y \rightrightarrows Y$, $q : Y \times Y \to Y$, $\bar{y} \in Y$ và $r \in \mathbb{R}$, ta ký hiệu ánh xạ đa trị $(\text{vcl}_q C + rq)_{\bar{y}} : Y \rightrightarrows Y$ xác định như sau:

$$(\text{vcl}_q C + rq)_{\bar{y}}(y) := \text{vcl}_{q(y,\bar{y})} C(y, \bar{y}) + rq(y, \bar{y}) \quad y \in Y. \tag{3.39}$$

Bổ đề 3.35. *Xét điểm $\bar{y} \in Y$. Giả sử $q(y, \bar{y}) \in 0^+C(y, \bar{y})$ và đồ thị của ánh xạ của $(\text{vcl}_q C + rq)_{\bar{y}}$ là tập đóng với mọi $y \in Y$ và $r \in \mathbb{R}$. Khi đó $\varphi_{\bar{y},q}^C$ là nửa liên tục dưới.*

Chứng minh. Để chứng minh $\varphi_{\bar{y},q}^C$ là nửa liên tục dưới, ta cần chỉ ra các tập mức dưới $\varphi_{\bar{y},q}^C$ là đóng. Thật vậy, lấy $r \in \mathbb{R}$ và lưới $(y_i) \subset Y$ sao cho $\varphi_{\bar{y},q}^C(y_i) \leq r$ với mọi i và $y_i \to y_0$. Theo Bổ đề 3.27(iii) ta có $y_i - \bar{y} \in (-\infty, r]q(y_i, \bar{y}) - \text{vcl}_{q(y_i,\bar{y})} C(y_i, \bar{y})$ với mọi i. Do đó, tồn tại $(t_i) \subset \mathbb{R}_+$ sao cho

$$y_i - \bar{y} \in rq(y_i, \bar{y}) - (t_i q(y_i, \bar{y}) + \text{vcl}_{q(y_i,\bar{y})} C(y_i, \bar{y})) \ \subset rq(y_i, \bar{y}) - \text{vcl}_{q(y_i,\bar{y})} C(y_i, \bar{y}),$$

vì $q(y_i, \bar{y}) \in 0^+C(y_i, \bar{y})$ với mọi i. Mặt khác, do $y_i \to y_0$ và đồ thị của ánh xạ đa trị (3.39) là đóng nên ta suy ra $y_0 - \bar{y} \in rq(y_0, \bar{y}) - \text{vcl}_{q(y_0,\bar{y})} C(y_0, \bar{y})$. Do đó, theo Bổ đề 3.27(iii) ta có $\varphi_{\bar{y},q}^C(y_0) \leq r$ và do đó tập mức dưới của $\varphi_{\bar{y},q}^C$ tại r là tập đóng. Vì r được chọn tùy ý nên ta suy ra điều phải chứng minh. □

Định lý 3.36. *Cho $\Omega \subset Y$ là tập compact khác rỗng. Giả sử $q(y_1, y_2) \in 0^+C(y_1, y_2)$, $0 \in \text{bd}_{q(y,y)} C(y, y)$ và đồ thị của $(\text{vcl}_q C + rq)_y$ là đóng với mọi $y_1, y_2, y \in Y$ và $r \in \mathbb{R}$. Hơn nữa giả sử rằng hàm $\varphi_{y,q}^C$ là chính thường với mọi $y \in Y$. Khi đó,* $\text{argmin}_\Omega \varphi_{y,q}^C \neq \emptyset$ *với mọi $y \in Y$ và*

$$\text{ND}(\Omega, \text{int}_{-q} C) = \bigcup_{y\in\Omega} [\text{argmin}_\Omega \varphi_{y,q}^C] \cap \{y\}. \tag{3.40}$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 3.35 ta suy ra rằng hàm $\varphi_{y,q}^C$ là nửa liên tục dưới với mọi $y \in \Omega$. Do đó, áp dụng Định lý Weierstrass (xem [53, Định lý 1.24]) ta có

$\operatorname{argmin}_\Omega \varphi^C_{y,q} \neq \emptyset$ với mọi $y \in Y$. Cuối cùng, đẳng thức (3.40) là hệ quả trực tiếp từ Định lý 3.31(i). Định lý được chứng minh xong. □

Ta kết thúc phần này với Hệ quả 3.37. Đây là kết quả thu được khi áp dụng Định lý 3.31 để đặc trưng nghiệm địa phương của bài toán (P). Ta ký hiệu *tập nghiệm địa phương* (tương ứng, *tập nghiệm địa phương chặt*) của bài toán tối ưu vô hướng với hàm mục tiêu $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ và tập ràng buộc $S \subset X$ bởi $\operatorname{arglmin}_S g$ (tương ứng $\operatorname{argslmin}_S g$), tức là

$$\bar{x} \in \operatorname{arglmin}_S g \Leftrightarrow \bar{x} \in \bigcup_{V \in \mathcal{N}(\bar{x})} \operatorname{argmin}_{S\cap V} g,$$

$$\text{(tương ứng,} \quad \bar{x} \in \operatorname{argslmin}_S g \Leftrightarrow \bar{x} \in \bigcup_{V \in \mathcal{N}(\bar{x})} \operatorname{argsmin}_{S\cap V} g).$$

Ngoài ra, liên quan đến bài toán (P), *tập mức* của f tại $y \in Y$ được ký hiệu là $\mathrm{L}(f, y)$, tức là

$$\mathrm{L}(f, y) := \{x \in X : f(x) = y\}.$$

Hệ quả 3.37. *Xét bài toán* (P) *và* $\bar{x} \in S$.

(i) Giả sử $q(y,f(\bar{x})) \in 0^+C(y,f(\bar{x}))$ *với mọi* $y \in Y$ *và* $0 \in \operatorname{bd}_{q(f(\bar{x}),f(\bar{x}))} C(f(\bar{x}),f(\bar{x}))$. *Khi đó*

$$\bar{x} \in \mathrm{LND}(f, S, \operatorname{int}_{-q} C) \Leftrightarrow \bar{x} \in \operatorname{arglmin}_S (\varphi^C_{f(\bar{x}),q} \circ f).$$

(ii) Giả sử $q(f(\bar{x}), f(\bar{x})) \in 0^+C(f(\bar{x}), f(\bar{x}))$, $q(y, f(\bar{x})) \in \operatorname{cor} 0^+C(y, f(\bar{x}))$ *với mọi* $y \in Y\backslash\{f(\bar{x})\}$ *và* $0 \in \operatorname{bd}_{q(f(\bar{x}),f(\bar{x}))} C(f(\bar{x}), f(\bar{x}))$. *Khi đó*

$$\bar{x} \in \mathrm{LWND}(f, S, C) \Leftrightarrow \bar{x} \in \operatorname{arglmin}_S(\varphi^C_{f(\bar{x}),q} \circ f).$$

(iii) Giả sử $q(y,f(\bar{x})) \in 0^+C(y,f(\bar{x}))$ *với mọi* $y \in Y$ *và* $0 \in \operatorname{bd}_{q(f(\bar{x}),f(\bar{x}))} C(f(\bar{x}),f(\bar{x}))$. *Khi đó*

$$\bar{x} \in \mathrm{LND}(f, S, \operatorname{vcl}_q C) \Leftrightarrow \bar{x} \in \operatorname{argslmin}_{(S\backslash \mathrm{L}(f,f(\bar{x})))\cup\{\bar{x}\}}(\varphi^C_{f(\bar{x}),q} \circ f).$$

(iv) Giả sử $q(y, f(\bar{x})) \in 0^+C(y, f(\bar{x}))$ *với mọi* $y \in Y$, $C(y, f(\bar{x}))$ *là đóng theo hướng* $q(y, f(\bar{x}))$ *với mọi* $y \in Y\backslash\{f(\bar{x})\}$ *và* $0 \in \operatorname{bd}_{q(f(\bar{x}),f(\bar{x}))} C(f(\bar{x}), f(\bar{x}))$. *Khi đó*

$$\bar{x} \in \mathrm{LND}(f, S, C) \Leftrightarrow \bar{x} \in \operatorname{argslmin}_{(S\backslash \mathrm{L}(f,f(\bar{x})))\cup\{\bar{x}\}}(\varphi^C_{f(\bar{x}),q} \circ f).$$

KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Trong chương này, chúng tôi đã định nghĩa và nghiên cứu về cấu trúc thứ tự hai biến. Dựa trên cấu trúc thứ tự hai biến, chúng tôi xây dựng khái niệm điểm cực tiểu và điểm không trội của một tập cũng như khái niệm nghiệm cực tiểu và nghiệm không trội của bài toán tối ưu véctơ; khảo sát các tính chất cũng như đặc trưng chúng bằng phương pháp vô hướng hóa phi tuyến. Các kết quả thu được đã cải thiện các kết quả đã biết liên quan đến bài toán tối ưu véctơ. Các nghiên cứu tiếp theo về cấu trúc thứ tự hai biến có thể được mở rộng theo nhiều hướng, bao gồm nghiên cứu bài toán đối ngẫu, phát triển các kỹ thuật vô hướng hóa tuyến tính và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu véctơ có tham số với cấu trúc thứ tự hai biến.

Kết luận

1. Những kết quả chính đã đạt được trong luận án

Luận án đã đạt được một số kết quả mới và có ý nghĩa trong lĩnh vực tối ưu minimax và tối ưu véctơ.

Trước hết, luận án đã thiết lập các điều kiện cần và đủ tối ưu cho bài toán tối ưu minimax rời rạc trong cả hai trường hợp lồi và không lồi. Các điều kiện tối ưu được phát biểu thông qua các khái niệm dưới vi phân và nón pháp tuyến tương ứng của giải tích lồi và giải tích biến phân, dưới điều kiện chính quy metric và điều kiện liên tục (hoặc liên tục Lipschitz). Đặc biệt, quy tắc dưới vi phân của hàm maximum dưới điều kiện chính quy metric được xây dựng và đóng vai trò then chốt trong việc suy ra các kết quả tối ưu, đây là một đóng góp mới chưa từng được thiết lập trước đây.

Bên cạnh đó, luận án đã thực hiện phân tích độ nhạy nghiệm cho các lớp bài toán tối ưu minimax có tham số trường hợp lồi và trường hợp không lồi. Các công thức đánh giá dưới vi phân của hàm giá trị tối ưu được thiết lập, qua đó làm rõ sự phụ thuộc của giá trị tối ưu vào tham số bài toán dưới các giả thiết chính quy phù hợp.

Cuối cùng, luận án đã nghiên cứu một cách hệ thống về cấu trúc thứ tự hai biến trong không gian véctơ, bao gồm định nghĩa và các tính chất cơ bản, cũng như mối liên hệ của nó với các cấu trúc thứ tự thay đổi thông thường. Trên cơ sở đó, các khái niệm nghiệm tối ưu cho bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến được xây dựng và so sánh với các khái niệm đã có. Luận án cũng đã thiết lập các điều kiện cần và đủ cho nghiệm tối ưu địa phương của bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến thông qua phương pháp vô hướng hóa, sau đó áp dụng vào trường hợp riêng là các cấu trúc thứ tự thay đổi thông thường. Các kết quả mới thu được không chỉ tổng quát hóa mà còn cải thiện các kết quả hiện có.

Những kết quả của luận án không chỉ góp phần hoàn thiện khung lý thuyết cho các bài toán đã xét mà còn mở ra nhiều hướng nghiên cứu tiếp theo trong tối ưu minimax và tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến.

2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Luận án gợi mở hướng nghiên cứu tiếp theo là phát triển các kết quả đã đạt được đối với bài toán minimax rời rạc có tham số sang trường hợp bài toán minimax liên tục có tham số. Việc nghiên cứu bài toán minimax liên tục đòi hỏi sử dụng thêm những công cụ mới so với trường hợp rời rạc, nhưng có ý nghĩa thực tiễn quan trọng vì mô hình này phản ánh sát hơn nhiều bài toán tối ưu trong kinh tế, kỹ thuật và khoa học máy tính.

Một hướng mở rộng khác là nghiên cứu bài toán minimax với các dữ liệu lồi suy rộng, chẳng hạn khi các hàm đầu vào chỉ thỏa mãn tính chất gần lồi. Hướng nghiên cứu này cho phép mở rộng khung lý thuyết của bài toán lồi sang các lớp bài toán không lồi nhưng vẫn giữ được những tính chất hình học thuận lợi.

Bên cạnh bài toán tối ưu minimax, luận án cũng gợi ý một hướng tiềm năng là nghiên cứu điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự hai biến thông qua kỹ thuật vô hướng hóa tuyến tính hoặc bài toán đối ngẫu. Các hướng tiếp cận này không chỉ giúp làm sáng tỏ bản chất của các nghiệm tối ưu với cấu trúc thứ tự hai biến, mà còn tạo cầu nối với các kết quả vô hướng hóa tuyến tính hoặc đối ngẫu đã biết trong tối ưu véctơ với cấu trúc thứ tự truyền thống.

Cuối cùng, phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu véctơ có tham số với cấu trúc thứ tự hai biến cũng là một hướng phát triển đáng chú ý. Mục tiêu là nghiên cứu đạo hàm suy rộng hoặc dưới vi phân của ánh xạ điểm hữu hiệu trong bối cảnh cấu trúc thứ tự hai biến. Việc sử dụng các công cụ dưới vi phân của ánh xạ đa trị cùng với các điều kiện thích hợp được kỳ vọng sẽ cho phép thiết lập các kết quả đánh giá định lượng sự biến thiên của ánh xạ điểm hữu hiệu theo tham số.

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án

(CT1) D.T.V. An, D.T. Ngoan, N.V. Tuyen, "Optimality conditions and sensitivity analysis in parametric convex minimax programming", *Applicable Analysis* 103, 2997–3016 (2024) (SCIE Q2)

(CT2) D.T.V. An, N.H. Hung, D.T. Ngoan, N.V. Tuyen, "Optimality conditions and sensitivity analysis in parametric nonconvex minimax programming", *Journal of Global Optimization* 90, 53–72 (2024) (SCIE Q1)

(CT3) D.T. Ngoan, C. Gutiérrez, D.T.V. An, "Two-variable domination structures and applications in vector optimization", *Journal of Optimization Theory and Applications* 208, 36 (2026) (SCIE Q1)

Tài liệu tham khảo

I. Tài liệu Tiếng Việt

[1] Nguyễn Đông Yên, *Giáo trình Giải tích đa trị*, NXB Khoa học tự nhiên và Công nghệ, Hà Nội (2007)

II. Tài liệu Tiếng Anh

[2] D.T.V. An, A. Jourani, "Subdifferentials of the marginal functions in parametric convex optimization via intersection formulas", *J. Optim. Theory Appl.* 192, 82–96 (2022)

[3] D.T.V. An, M.A. Köbis, N.V. Tuyen, "Differential stability of convex optimization problems under weaker conditions", *Optimization* 69, 385–399 (2020)

[4] D.T.V. An, N.D. Yen, "Differential stability of convex optimization problems under inclusion constraints", *Appl. Anal.* 94, 108–128 (2015)

[5] L.Q. Anh, T.N. Tam, "The use of a family of Gerstewitz scalarization functions in the context of vector optimization with variable domination structures to derive scalarization results", *Optim. Methods Softw.* 39(2), 368–383 (2024)

[6] A. Auslender, "Differential stability in nonconvex and nondifferentiable programming", *Math. Program. Stud.* 10, 29–41 (1979)

[7] T.Q. Bao, G. Eichfelder, B. Soleimani, C. Tammer, "Ekeland's variational principle for vector optimization with variable ordering structure", *J. Convex Anal.* 24(2), 393–415 (2017)

[8] T.Q. Bao, P. Gupta, P.Q. Khanh, "Necessary optimality conditions for minimax programming problems with mathematical constraints", *Optimization* 66, 1755–1776 (2017)

[9] T.Q. Bao, L. Huerga, B. Jiménez, V. Novo, "Necessary conditions for nondominated solutions in vector optimization", *J. Optim. Theory Appl.* 186, 826–842 (2020)

[10] T.Q. Bao, B.S. Mordukhovich, "Necessary nondomination conditions in set and vector optimization with variable ordering structures", *J. Optim. Theory Appl.* 162, 350–370 (2014)

[11] T.Q. Bao, B.S. Mordukhovich, A. Soubeyran, C. Tammer, "Vector optimization with domination structures: variational principles and applications", *Set-Valued Var. Anal.* 30, 695–729 (2022)

[12] J.F. Bonnans, A. Shapiro, *Perturbation Analysis of Optimization Problems*, Springer, New York (2000)

[13] J.M. Borwein, J.D. Vanderwerff, *Convex Functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples*, Cambridge University Press, Cambridge (2010)

[14] G.-Y. Chen, X. Huang, X. Yang, *Vector Optimization. Set-Valued and Variational Analysis*, Springer-Verlag, Berlin (2005)

[15] G.-Y. Chen, X. Yang, "Characterizations of variable domination structures via nonlinear scalarization", *J. Optim. Theory Appl.* 112, 97–110 (2002)

[16] G.-Y. Chen, X. Yang, H. Yu, "A nonlinear scalarization function and generalized quasi-vector equilibrium problems", *J. Global Optim.* 32, 451–466 (2005)

[17] E.W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York (1966)

[18] T.D. Chuong, D.S. Kim, "Nondifferentiable minimax programming problems with applications", *Ann. Oper. Res.* 251, 73–87 (2017)

[19] B.S. Darkhovskii, E.S. Levitin, "Differential properties of the value of a finite-dimensional parametric minimax problem. I", *Cybern. Syst. Anal.* 12, 553–566 (1976)

[20] V.F. Demyanov, V.N. Malozemov, *Introduction to Minimax* [Translated from the original Russian publication (Nauka, 1972)], Dover Publications, New York (1990)

[21] G. Eichfelder, "Optimal elements in vector optimization with a variable ordering structure", *J. Optim. Theory Appl.* 151, 217–240 (2011)

[22] G. Eichfelder, "Variable ordering structures in vector optimization", in: Q.H. Ansari, J.-C. Yao (Eds.), *Recent Developments in Vector Optimization*, Springer, Berlin, 95–126 (2012)

[23] G. Eichfelder, "Cone-valued maps in optimization", *Appl. Anal.* 91(10), 1831–1846 (2012)

[24] G. Eichfelder, *Variable Ordering Structures in Vector Optimization*, Springer, Berlin (2014)

[25] G. Eichfelder, T.X.D. Ha, "Optimality conditions for vector optimization problems with variable ordering structures", *Optimization* 62(5), 597–627 (2013)

[26] G. Eichfelder, R. Kasimbeyli, "Properly optimal elements in vector optimization with variable ordering structures", *J. Global Optim.* 60, 689–712 (2014)

[27] A.V. Fiacco, *Introduction to Sensitivity and Stability Analysis*, Academic Press, New York (1983)

[28] J. Gauvin, F. Dubeau, "Differential properties of the marginal function in mathematical programming", *Math. Program. Stud.* 19, 101–119 (1982)

[29] I.J. Goodfellow, J. Pouget-Abadie, M. Mirza, B. Xu, D. Warde-Farley, S. Ozair, A. Courville, Y. Bengio, "Generative Adversarial Nets", *International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS)* 27, 2672–2680 (2014)

[30] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, C. Zălinescu, *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*, Springer, Cham (2023)

[31] C. Gutiérrez, "Further results on quasi efficient solutions in multiobjective optimization", *J. Nonlinear Var. Anal.* 7, 687–714 (2023)

[32] C. Gutiérrez, L. Huerga, E. Köbis, C. Tammer, "A scalarization scheme for binary relations with applications to set-valued and robust optimization", *J. Global Optim.* 79, 233–256 (2021)

[33] C. Gutiérrez, V. Novo, J.L. Ródenas-Pedregosa, T. Tanaka, "Nonconvex separation functional in linear spaces with applications to vector equilibria", *SIAM J. Optim.* 26, 2677–2695 (2016)

[34] R.B. Holmes, *Geometric Functional Analysis and Its Applications*, Springer, New York (1975)

[35] Z. Hong, K.D. Bae, D.S. Kim, "Minimax programming as a tool for studying robust multi-objective optimization problems", *Ann. Oper. Res.* 319, 1589–1606 (2022)

[36] V.T. Huong, D.T.V. An, H.K. Xu, "Subdifferentials of optimal value functions under metric qualification conditions", *J. Global Optim.* 88, 253–283 (2024)

[37] A.D. Ioffe, "Approximate subdifferentials and applications III: The metric theory", *Mathematika* 36, 1–38 (1989)

[38] A.D. Ioffe, "Codirectional compactness, metric regularity and subdifferential calculus", In: Michel Théra (ed.), Experimental, Constructive and Nonlinear Analysis, *Canad. Math. Soc. Proc. Ser.* 27, 123–163 (2000)

[39] A.D. Ioffe, "Metric regularity and subdifferential calculus", *Russ. Math. Surv.* 55, 501–558 (2000)

[40] A.D. Ioffe, J.V. Outrata, "On metric and calmness qualification conditions in subdifferential calculus", *Set-Valued Anal.* 16, 199–227 (2008)

[41] A.D. Ioffe, J.-P. Penot, "Subdifferentials of performance functions and calculus of set-valued mappings", *Serdica Math. J.* 22, 359–384 (1996)

[42] J. Jahn, *Vector Optimization - Theory, Applications, and Extensions*, Springer-Verlag, Berlin (2011)

[43] A. Jourani, "Intersection formulae and the marginal function in Banach spaces", *J. Math. Anal. Appl.* 192, 867–891 (1995)

[44] A. Jourani, L. Thibault, "Metric regularity and subdifferential calculus in Banach spaces", *Set-Valued Var. Anal.* 3, 87–100 (1995)

[45] A. Jourani, L. Thibault, "Chain rules for coderivatives of multivalued mappings in Banach spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.* 126, 1479–1485 (1998)

[46] K. Malanowski, *Stability of Solutions to Convex Problems of Optimization*, Springer, Berlin (1987)

[47] B.S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation. Volume I: Basic Theory*, Springer, Berlin (2006)

[48] B.S. Mordukhovich, N.M. Nam, *Convex Analysis and Beyond. Volume I: Basic Theory*, Springer, Switzerland (2022)

[49] B.S. Mordukhovich, N.M. Nam, R.B. Rector, T. Tran, "Variational geometric approach to generalized differential and conjugate calculi in convex analysis", *Set-Valued Var. Anal.* 25, 731–755 (2017)

[50] B.S. Mordukhovich, N.M. Nam, N.D. Yen, "Subgradients of marginal functions in parametric mathematical programming", *Math. Program. Ser. B* 116, 369–396 (2009)

[51] H.V. Ngai, M. Théra, "Metric inequality, subdifferential calculus and applications", *Set-Valued Var. Anal.* 9, 187–216 (2001)

[52] J.-W. Peng, W.-B. Wei, R. Kasimbeyli, "Linear and nonlinear scalarization methods for vector optimization problems with variable ordering structures", *J. Optim. Theory Appl.* 206, Article ID 2 (2025)

[53] J.-P. Penot, *Calculus without Derivatives*, Springer, New York (2013)

[54] R.R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, 2nd Edition, Springer, Berlin (1993)

[55] J.H. Qiu, F. He, "A general vectorial Ekeland's variational principle with a P-distance", *Acta Math. Sin. Engl. Ser.* 29, 1655–1678 (2013)

[56] A. Ruszczyński, *Nonlinear Optimization*, Princeton University Press, New Jersey (2006)

[57] C. Tammer, P. Weidner, *Scalarization and Separation by Translation Invariant Functions with Applications in Optimization, Nonlinear Functional Analysis, and Mathematical Economics*, Springer, Cham (2020)

[58] N.T. Toan, J.-C. Yao, "Mordukhovich subgradients of the value function to a parametric discrete optimal control problem", *J. Global Optim.* 58, 595–612 (2014)

[59] J. Von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior. Sixtieth-Anniversary Edition*, Princeton University Press, Princeton (2004)

[60] P.L. Yu, "Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives", *J. Optim. Theory Appl.* 14, 319–377 (1974)

[61] C. Zălinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific, New Jersey (2002)

[62] L.N. Zhong, Y.F. Jin, "Optimality conditions for minimax optimization problems with an infinite number of constraints", *Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.* 37(2), 251–263 (2021)