ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHAN THỊ VÂN HUYỀN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI BÀI TOÁN NGHIỆM CHUNG TÁCH CHO LỚP PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU VỚI ĐA TẬP ĐẦU RA

LUẬN ÁN TIẾN SĨ NGÀNH TOÁN ỨNG DỤNG

Thái Nguyên – 2026

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHAN THỊ VÂN HUYỀN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI BÀI TOÁN NGHIỆM CHUNG TÁCH CHO LỚP PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU VỚI ĐA TẬP ĐẦU RA

Ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 9 46 01 12

LUẬN ÁN TIẾN SĨ

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Trương Minh Tuyên

Thái Nguyên – 2026

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Trương Minh Tuyên. Các kết quả nghiên cứu chung với các đồng tác giả đã được sự đồng ý của các đồng tác giả trước khi đưa vào luận án. Các kết quả trình bày trong luận án là kết quả nghiên cứu của tôi và các đồng tác giả trong các công trình liên quan đến luận án; ngoài các công trình này, các kết quả đó chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình nghiên cứu nào khác.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2026

Nghiên cứu sinh

Phan Thị Vân Huyền

Lời cảm ơn

Luận án này được thực hiện tại Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS. Trương Minh Tuyên.

Trước hết, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS. Trương Minh Tuyên, người đã trực tiếp hướng dẫn và định hướng nghiên cứu cho tôi trong suốt quá trình thực hiện luận án. Thầy đã tận tình chỉ bảo, giúp tôi lựa chọn hướng nghiên cứu, tiếp cận các phương pháp phù hợp, đồng thời luôn động viên và tạo điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành công trình này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn PGS.TS. Nguyễn Song Hà đã dành nhiều thời gian trao đổi chuyên môn, góp ý cho các nội dung của luận án và hỗ trợ tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên; các anh chị nghiên cứu sinh trong Khoa; cùng các thành viên trong nhóm nghiên cứu của PGS.TS. Trương Minh Tuyên đã quan tâm, trao đổi học thuật và có nhiều ý kiến đóng góp quý báu cho quá trình nghiên cứu của tôi.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Phòng Đào tạo, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã hỗ trợ và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu cũng như hoàn thiện các thủ tục liên quan đến chương trình đào tạo nghiên cứu sinh.

Tôi cũng xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, Ban Chủ nhiệm Khoa Khoa học Cơ bản và Ứng dụng, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp – Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi để tôi được học tập và nghiên cứu. Tôi xin cảm ơn các thầy

cô đồng nghiệp trong Khoa Khoa học Cơ bản và Ứng dụng, đặc biệt là các thầy cô trong Bộ môn Toán, đã luôn hỗ trợ và chia sẻ trong công việc giảng dạy cũng như động viên tôi trong thời gian học tập.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình: bố mẹ, anh chị em, chồng và hai con, những người luôn là nguồn động viên và chỗ dựa tinh thần giúp tôi vượt qua những khó khăn để hoàn thành luận án này.

Nghiên cứu sinh

Phan Thị Vân Huyền

Mục lục

Lời cam đoan **ii**

Lời cảm ơn **iii**

Mục lục **v**

Một số ký hiệu và viết tắt **vii**

Danh mục các bảng **ix**

Danh mục các hình vẽ **x**

Mở đầu **1**

Chương 1 Kiến thức chuẩn bị **14**

1.1 Một số nội dung cơ bản trong không gian Hilbert 14

1.1.1 Sự hội tụ mạnh và sự hội tụ yếu 14

1.1.2 Toán tử tuyến tính bị chặn và toán tử liên hợp 15

1.1.3 Hàm lồi và dưới vi phân của hàm lồi 16

1.2 Một số lớp ánh xạ đặc biệt 19

1.2.1 Ánh xạ liên tục Lipschitz 19

1.2.2 Ánh xạ h-liên tục 21

1.2.3 Phép chiếu mêtric 22

1.3 Toán tử đơn điệu 23

1.4 Bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert 27

1.5 Một số bổ đề bổ trợ 29

Chương 2 Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov giải bài toán (SCSP-MOE) 35

2.1 Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov ẩn 35

2.2 Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov hiện 41

2.3 Tính ổn định của phương pháp hiệu chỉnh 47

2.4 Ứng dụng và ví dụ số minh họa 51

2.4.1 Ứng dụng giải bài toán điểm bất động chung tách và bài toán không điểm chung tách với đa tập đầu ra 51

2.4.2 Ứng dụng giải bài toán điểm cực tiểu chung tách với đa tập đầu ra 56

2.4.3 Ứng dụng giải bài toán khôi phục tín hiệu 61

Chương 3 Thuật toán điểm gần kề quán tính giải bài toán (SCSP-MOE) 66

3.1 Thuật toán hội tụ yếu và tốc độ hội tụ 66

3.2 Thuật toán hội tụ mạnh 78

3.3 Ví dụ số minh họa 85

Chương 4 Hai thuật toán chiếu với đa thành phần quán tính giải bài toán (SCSP-MOE) 98

4.1 Thuật toán chiếu lai ghép 98

4.2 Thuật toán chiếu co hẹp 108

4.3 Ví dụ số minh họa 111

Kết luận 119

Danh mục các công trình liên quan đến luận án 121

Tài liệu tham khảo 122

Một số ký hiệu và viết tắt

$\mathcal{H}$	không gian Hilbert.
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	tích vô hướng trên $\mathcal{H}$.
$\| \cdot \|$	chuẩn trên $\mathcal{H}$.
$\cup$, $\bigcup$	phép hợp của các tập hợp.
$\cap$, $\bigcap$	phép giao của các tập hợp.
I	toán tử đồng nhất.
T^*	toán tử liên hợp của toán tử tuyến tính T.
$\emptyset$	tập hợp rỗng.
$\{x_n\}$	dãy các phần tử x_n.
$x_n \rightharpoonup x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến x.
$x_n \to x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x.
$\forall$	với mọi.
$x \in C$	x thuộc tập C.
$x \notin C$	x không thuộc tập C.
$\exists$	tồn tại.
ℓ^2	không gian các dãy số thực có bình phương khả tổng.
$L^2[0,1]$	không gian các hàm bình phương khả tích trên đoạn $[0,1]$.
$N_C(x_0)$	nón pháp tuyến của tập C tại điểm x_0.

$\liminf_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy $\{x_n\}$.
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy $\{x_n\}$.
$P_C(x)$	phép chiếu mêtric của x lên tập C.
$\sup M$	cận trên đúng của tập M.
$\inf M$	cận dưới đúng của tập M.
$\mathrm{Zer}(A)$	tập không điểm của toán tử A.
$\mathrm{Fix}(A)$	tập điểm bất động của toán tử A.
$\arg\min_{x\in C} F(x)$	tập các điểm cực tiểu của hàm F trên C.
$i_C(x)$	hàm chỉ của tập C.
$\mathrm{dom}\, f$	miền hữu hiệu của hàm f.
$\mathrm{epi}\, f$	trên đồ thị (epigraph) của hàm f.
$\partial f(x)$	dưới vi phân của hàm f tại x.
$\nabla f(x)$	gradient của hàm f tại x.
J_r^A	toán tử giải (resolvent) của toán tử A.
SFP	bài toán chấp nhận tách.
MSSFP	bài toán chấp nhận tách đa tập.
SFP-MOS	bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra.
SCFPP-MOS	bài toán điểm bất động chung tách với đa tập đầu ra.
SCNPP-MOS	bài toán không điểm chung tách với đa tập đầu ra.
VIP	bài toán bất đẳng thức biến phân.
SCSP-MOE	bài toán nghiệm chung tách cho lớp phương trình toán tử đơn điệu với đa tập đầu ra.
SMPP-MOS	bài toán điểm cực tiểu chung tách với đa tập đầu ra.

Danh mục các bảng

Bảng 2.1 Bảng kết quả số của phương pháp lặp hiện (2.31) và so sánh giữa các thuật toán 55
Bảng 2.2 Bảng kết quả số của phương pháp lặp ẩn (2.38) 59
Bảng 2.3 Bảng kết quả số của phương pháp lặp hiện (2.40) và Thuật toán 3.1 trong [54] 60
Bảng 2.4 Bảng kết quả số của phương pháp lặp ẩn (2.43) 63
Bảng 2.5 Bảng kết quả số của phương pháp lặp hiện (2.45) 64

Bảng 3.1 Bảng kết quả số của thuật toán (3.30) 86
Bảng 3.2 Bảng kết quả số của thuật toán hội tụ yếu (3.32) 91
Bảng 3.3 Bảng kết quả số của thuật toán hội tụ mạnh (3.33) 92
Bảng 3.4 Bảng kết quả số của thuật toán hội tụ yếu (3.34) 94
Bảng 3.5 Bảng giá trị của $\nabla g(x_n)$ và $\nabla g_i(T_i(x_n))$ trong Ví dụ 3.3.1 94
Bảng 3.6 Bảng kết quả số của thuật toán hội tụ mạnh (3.35) 95
Bảng 3.7 Bảng kết quả số của Thuật toán 3.1 và Thuật toán 3.4 trong [54]. 97

Bảng 4.1 Bảng kết quả số của Thuật toán 4.1.1 cho Ví dụ 4.3.1 113
Bảng 4.2 Bảng kết quả số của Thuật toán 4.2.1 cho Ví dụ 4.3.1 113
Bảng 4.3 Bảng kết quả số của hai thuật toán trong [35] 114
Bảng 4.4 Bảng kết quả số của Thuật toán 4.1.1 cho Ví dụ 4.3.2 116
Bảng 4.5 Bảng kết quả số của Thuật toán 4.2.1 cho Ví dụ 4.3.2 117
Bảng 4.6 Bảng kết quả số của một số thuật toán trong [26, 52, 77] 117

Danh mục các hình vẽ

Hình 2.1 Dáng điệu của ε_n trong Bảng 2.1 với điều kiện dừng TOL $= 10^{-6}$. 56
Hình 2.2 Dáng điệu của ε_n trong Bảng 2.2 59
Hình 2.3 Tín hiệu gốc và tín hiệu khôi phục bằng phương pháp lặp ẩn (2.43) với $\alpha_n = 1/200$ 64
Hình 2.4 Tín hiệu gốc và tín hiệu khôi phục bằng phương pháp lặp hiện (2.45) với TOL $= 10^{-5}$ 65

Hình 3.1 Tín hiệu gốc và tín hiệu khôi phục bằng thuật toán (3.30) với $N = 0$ 87
Hình 3.2 Tín hiệu gốc và tín hiệu khôi phục bằng thuật toán (3.30) với $N = 10$ 87
Hình 3.3 Tín hiệu gốc và tín hiệu khôi phục bằng thuật toán (3.30) với $N = 50$ 88
Hình 3.4 Dáng điệu của ε_n trong Bảng 3.2 với TOL $= 10^{-6}$ 91
Hình 3.5 Dáng điệu của ε_n trong Bảng 3.3 với TOL $= 10^{-5}$ 92
Hình 3.6 Dáng điệu của ε_n trong Bảng 3.4 với TOL $= 10^{-10}$ 94
Hình 3.7 Dáng điệu của ε_n trong Bảng 3.6 với TOL $= 10^{-3}$ 96

Mở đầu

1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Phương trình toán tử (Operator Equation Problem), viết tắt là (OEQ) là một trong những mô hình cơ bản và quan trọng của Toán học hiện đại. Nhiều bài toán trong giải tích và ứng dụng có thể quy về việc giải phương trình toán tử tổng quát dưới dạng

$$A(x) = f, \quad x \in U,\ f \in V, \tag{OEQ}$$

trong đó A là một toán tử từ không gian U vào không gian V.

Lý thuyết cơ bản về phương trình toán tử tuyến tính hay phi tuyến thường được xây dựng trong không gian Hilbert hoặc Banach, bắt nguồn từ lý thuyết cổ điển về phương trình vi phân và tích phân, đồng thời tạo nên nền tảng cho nhiều hướng nghiên cứu hiện đại trong toán học ứng dụng. Trong Toán học thuần túy, bài toán (OEQ) liên quan mật thiết đến nhiều lĩnh vực lý thuyết khác nhau như: bất đẳng thức biến phân; tối ưu hóa; lập trình toán học và lý thuyết điểm bất động (xem [8, 12, 31, 47, 58]). Trong Vật lý và Cơ học, các phương trình Navier–Stokes mô tả chuyển động của chất lỏng, phương trình Schrödinger trong cơ học lượng tử, hay các bài toán tiếp xúc và ma sát trong cơ học chất rắn đều có thể được diễn đạt dưới dạng phương trình toán tử (xem [41, 48, 67]). Trong những năm gần đây, nhiều nghiên cứu về khoa học dữ liệu và tính toán hiện đại, xử lý tín hiệu và tái tạo ảnh cũng được quy về các phương trình toán tử nghịch đảo (xem [23, 28]).

Trong Toán học cũng như trong thực tiễn, người ta thường gặp phải các bài toán mà trong đó lời giải cần thoả mãn đồng thời nhiều điều kiện ràng buộc đặt tại những không gian khác nhau. Một trong những mô hình toán học tiêu biểu cho loại bài toán

này là *bài toán chấp nhận tách (Split Feasibility Problem)* trong các không gian Hilbert hữu hạn chiều, viết tắt là (SFP), được giới thiệu lần đầu tiên bởi Y. Censor và T. Elfving (xem [17]) cho mô hình bài toán ngược. Bài toán (SFP) được phát biểu như sau: Cho C và Q lần lượt là các tập con lồi, đóng và khác rỗng trong các không gian Hilbert thực $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$, $T:\ \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn.

$$\text{Tìm phần tử } p \in C \text{ sao cho } T(p) \in Q. \tag{SFP}$$

Kể từ khi ra đời, bài toán chấp nhận tách (SFP) đã trở thành chủ đề nghiên cứu quan trọng và được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực thực tế như xử lý tín hiệu và khôi phục ảnh (xem [15]), liệu pháp xạ trị điều chỉnh cường độ, giúp tối ưu hóa phương pháp điều trị (xem [18, 19]), giải quyết các bài toán cân bằng trong kinh tế và lý thuyết trò chơi (xem [40]) và một số ứng dụng khác.

Một mở rộng của bài toán chấp nhận tách (SFP) là *bài toán chấp nhận tách đa tập hợp (Multiple-Sets Split Feasibility Problem)*, viết tắt là (MSSFP). Bài toán này được Y. Censor và các cộng sự đề xuất và nghiên cứu vào năm 2005 (xem [18]), được trình bày như sau: Cho C_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ là N tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathcal{H}_1$ và Q_j, $j = 1, 2, \ldots, M$ là M tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathcal{H}_2$, $T:\ \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn.

$$\text{Tìm} \quad p \in \bigcap_{i=1}^{N} C_i \quad \text{sao cho} \quad T(p) \in \bigcap_{j=1}^{M} Q_j\ . \tag{MSSFP}$$

Giả sử C là một tập con lồi và đóng của không gian Hilbert $\mathcal{H}_1$. Ta biết rằng tập điểm cực tiểu của hàm chỉ

$$i_C(x) = \begin{cases} 0, \text{ nếu } x \in C, \\ \infty, \text{ nếu } x \notin C \end{cases}$$

là $\arg\min_{\mathcal{H}_1} i_C(x) = C$. Do đó, ta nhận được $C = \mathrm{Zer}(\partial i_C)$, với ∂i_C là dưới vi phân của i_C (trong [58], R. T. Rockafellar đã chỉ ra rằng ∂i_C là một toán tử đơn điệu

cực đại). Ngoài ra, C cũng là tập không điểm của toán tử đơn điệu A xác định bởi $A = I - P_C$. Do đó, ta có thể xem bài toán chấp nhận tách (SFP) hay (MSSFP) là trường hợp riêng của bài toán không điểm chung tách.

Bài toán không điểm chung tách (Split Common Null Point Problem), viết tắt là (SCNPP) (xem [16, 27, 65, 66]) được cho như sau: Cho $A_i : \mathcal{H}_1 \to 2^{\mathcal{H}_1}$, $i = 1, 2, \ldots, N$ và $B_j : \mathcal{H}_2 \to 2^{\mathcal{H}_2}$, $j = 1, 2, \ldots, M$ tương ứng là các toán tử đơn điệu cực đại trong các không gian Hilbert thực $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$, $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn.

$$\text{Tìm phần tử} \quad p \in \bigcap_{i=1}^{N} \text{Zer}(A_i) \cap T^{-1} \left(\bigcap_{j=1}^{M} \text{Zer}(B_j) \right). \tag{SCNPP}$$

Nếu A_i là toán tử đơn điệu cực đại, thì toán tử giải $J_r^{A_i} = (I + rA_i)^{-1}$ là một ánh xạ không giãn và $\text{Zer}(A_i) = \text{Fix}(J_r^{A_i})$ với mọi $r > 0$. Như vậy, bài toán không điểm chung tách (SCNPP) có thể đưa về bài toán điểm bất động chung tách tương ứng.

Bài toán điểm bất động chung tách (Split Common Fixed Point Problem), viết tắt là (SCFPP) (xem [20, 61, 72, 78]) được phát biểu như sau: Cho $T_i : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$, $i = 1, 2, \ldots, N$ và $S_j : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$, $j = 1, 2, \ldots, M$ là các ánh xạ không giãn trên các không gian Hilbert thực $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$. $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn.

$$\text{Tìm phần tử} \quad p \in \bigcap_{i=1}^{N} \text{Fix}(T_i) \cap T^{-1} \left(\bigcap_{j=1}^{M} \text{Fix}(S_j) \right). \tag{SCFPP}$$

Bài toán chấp nhận tách cùng các bài toán liên quan ngày càng được mở rộng và tổng quát hơn. Năm 2020, S. Reich và cộng sự đã nghiên cứu và giới thiệu một mô hình tổng quát của bài toán chấp nhận tách, được gọi là *bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra (Split Feasibility Problem with Multiple Output Sets)*, viết tắt là (SFP-MOS) (xem [52, 53]). Bài toán được phát biểu như sau:

Cho $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các không gian Hilbert thực, $T_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các toán tử tuyến tính bị chặn. Cho C và Q_i là các tập con lồi, đóng, khác rỗng của $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, tương ứng. Bài toán yêu cầu:

$$\text{Tìm phần tử } p \in \mathcal{H} \text{ sao cho } p \in C \text{ và } T_i(p) \in Q_i, \tag{SFP-MOS}$$

với mọi $i = 1, 2, \ldots, N$. Trong trường hợp $N = 1$ thì bài toán (SFP-MOS) trở thành bài toán (SFP). Một số lớp bài toán liên quan như bài toán không điểm chung tách với đa tập đầu ra (xem [54]) hay bài toán điểm bất động tách với đa tập đầu ra cũng đã được nghiên cứu (xem [55, 56]).

Bài toán không điểm chung tách với đa tập đầu ra (Split Common Null Point Problem with Multiple Output Sets), viết tắt là (SCNPP-MOS), được phát biểu như sau: Cho $A: \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ và $A_i: \mathcal{H}_i \to 2^{\mathcal{H}_i}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các toán tử đơn điệu cực đại. Cho $T_i: \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các toán tử tuyến tính bị chặn.

$$\text{Tìm một phần tử } p \in \text{Zer}(A) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{N} T_i^{-1}(\text{Zer}(A_i)) \right). \qquad \text{(SCNPP-MOS)}$$

Bài toán điểm bất động chung tách với đa tập đầu ra (Split Common Fixed Point Problem with Multiple Output Sets), viết tắt là (SCFPP-MOS), được cho như sau: Cho $S: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ và $S_i: \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các ánh xạ không giãn. Cho $T_i: \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các toán tử tuyến tính bị chặn.

$$\text{Tìm một phần tử } p \in \text{Fix}(S) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{N} T_i^{-1}(\text{Fix}(S_i)) \right). \qquad \text{(SCFPP-MOS)}$$

Mặc dù chỉ mới được đề xuất trong thời gian gần đây, lớp bài toán chấp nhận tách với *đa tập đầu ra* đã thu hút sự quan tâm đáng kể của cộng đồng nghiên cứu. Minh chứng cho điều này là nhiều công trình khoa học đã được công bố theo hướng tiếp cận này. Điển hình như công trình [52], tính đến tháng 06/2026, đã nhận được 139 trích dẫn. Các công trình này tập trung theo hai hướng chính: một là, mở rộng và khái quát hóa mô hình bài toán sang các lớp ánh xạ hoặc không gian tổng quát hơn; hai là, đề xuất, phân tích cũng như cải tiến các thuật toán lặp nhằm nâng cao tốc độ hội tụ và tính ổn định của phương pháp. Ví dụ như, năm 2022 trong công trình [77], F. Wang đã chỉ ra rằng, trong thực tế, các tập hợp lồi đơn giản như nửa mặt phẳng hay hình cầu đóng thường được sử dụng trong các thuật toán giải bài toán chấp nhận tách do việc chiếu trực giao lên các tập này tương đối dễ dàng. Tuy nhiên, trong nhiều ứng

dụng, các tập hợp xuất hiện có thể là những tập phức tạp hơn, chẳng hạn như tập điểm bất động của các ánh xạ phi tuyến, khiến việc chiếu trực tiếp trở nên khó khăn. Do đó, để mở rộng khả năng áp dụng mô hình, F. Wang đã nghiên cứu một mô hình bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra dưới dạng sau.

$$\text{Tìm } x^\dagger \in \text{Fix}(A_0) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{N} T_i^{-1}(\text{Fix}(A_i)) \right),$$

trong đó $A_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$ là ánh xạ phi tuyến, $T_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$ là ánh xạ tuyến tính bị chặn, $i = 1, 2, \ldots, N$. Năm 2024, S. Gebregiorgis và các cộng sự (xem [30]) cũng đã kết hợp bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra với bài toán điểm bất động cho lớp ánh xạ nửa co thành một mô hình tổng quát hơn, với mục tiêu là xác định một phần tử $x^* \in \mathcal{H}_1$ thỏa mãn

$$x^* \in C \cap \left(\bigcap_{j=1}^{p} T_j^{-1} \left(\bigcap_{k=1}^{r_j} Q_{jk} \right) \right) \cap \text{Fix}(S),$$

trong đó C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của $\mathcal{H}_1$, $T_j : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, $j = 1, 2, \ldots, p$ là các toán tử tuyến tính bị chặn, $Q_{jk} \subset \mathcal{H}_2$, $k = 1, 2, \ldots, r_j$ là các tập lồi, đóng, khác rỗng và $S : C \to C$ là ánh xạ nửa co.

Ngoài ra, nhiều công trình nghiên cứu gần đây đã tiếp tục phát triển và mở rộng các kết quả liên quan đến bài toán (SFP-MOS). Có thể kể đến các đóng góp của Y. Zhang và Y. Guan (xem [81]), H. Cui và các cộng sự (xem [25, 26]), T. Taddele và cộng sự (xem [63]), S. Rashid và cộng sự (xem [57]), N. T. T. Thủy và các cộng sự (xem [43, 74, 75]), T. V. Thắng và các cộng sự (xem [68, 69]), cùng nhiều nghiên cứu khác. Qua đó cho thấy hướng nghiên cứu về các bài toán tách với đa tập đầu ra vẫn đang tiếp tục phát triển và mở ra nhiều triển vọng ứng dụng trong khoa học cũng như thực tiễn.

Xuất phát từ các mô hình bài toán (OEQ), (SFP) và (SFP-MOS), năm 2023 trong công trình (CT1), chúng tôi giới thiệu và nghiên cứu một mô hình bài toán mới, gọi là "***Bài toán nghiệm chung tách cho lớp phương trình toán tử đơn điệu với đa***

***tập đầu ra*"** (SCSP-MOE: *Split Common Solution Problem for Monotone Operator Equations*) trong không gian Hilbert, cùng với một số bài toán liên quan. Mô hình bài toán (SCSP-MOE) trong không gian Hilbert được phát biểu như sau: Cho $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các không gian Hilbert thực. Cho $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ và $A_i: \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các toán tử đơn điệu. Cho $T_i: \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các toán tử tuyến tính bị chặn. Cho f và f_i là các phần tử cho trước thuộc $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, tương ứng. Đặt

$$\Omega^A = \{x \in \mathcal{H} \mid A(x) = f\},$$
$$\Omega^{A_i} = \{x \in \mathcal{H} \mid A_i(T_i(x)) = f_i\}, \text{ với mọi } i = 1, 2, \ldots, N.$$

Bài toán yêu cầu:

$$\text{Tìm một phần tử } p \in \Omega = \Omega^A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{N} \Omega^{A_i}\right) \neq \emptyset. \qquad \text{(SCSP-MOE)}$$

Nếu $S: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là một ánh xạ không giãn, thì $I - S$ là $\frac{1}{2}$- đơn điệu mạnh ngược. Do đó, ta có một số trường hợp đặc biệt của bài toán (SCSP-MOE) như sau:

i) Cho $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ và $B_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$ là các ánh xạ không giãn, $f = 0$ và $f_i = 0, (i = 1, 2, \ldots, N)$. Đặt $A = I - B$ và $A_i = I_i - B_i$, trong đó I và I_i lần lượt là toán tử đồng nhất của $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, khi đó bài toán (SCSP-MOE) trở thành *bài toán điểm bất động chung tách với đa tập đầu ra* :

$$\text{Tìm } p \in \mathcal{H} \text{ sao cho } B(p) = p \text{ và } B_i(T_i(p)) = T_i(p).$$

Đặc biệt, nếu $B = P_C$ và $B_i = P_{Q_i}$, $i = 1, 2, \ldots, N$ thì bài toán (SCSP-MOE) trở thành *bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra.*

ii) Cho $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ và $F_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i, i = 1, 2, \ldots, N$ là các toán tử đơn điệu cực đại, $f = 0$ và $f_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Đặt $A = I - J_r^F$ và $A_i = I_i - J_{r_i}^{F_i}$, trong đó $J_r^F = (I + rF)^{-1}$ và $J_{r_i}^{F_i} = (I_i + r_i F_i)^{-1}$ là các toán tử giải của F và F_i tương ứng, khi đó bài toán (SCSP-MOE) trở thành *bài toán không điểm chung tách với*

đa tập đầu ra:

$$\text{Tìm } p \in \mathcal{H} \text{ sao cho } F(p) = 0 \text{ và } F_i(T_i(p)) = 0.$$

Như vậy, mô hình bài toán (SCSP-MOE) bao hàm nhiều lớp bài toán tách khác nhau, trong đó có bài toán chấp nhận tách và một số mô hình bài toán tách liên quan. Do các bài toán này có nhiều ứng dụng trong thực tiễn nên mô hình (SCSP-MOE) có khả năng kế thừa và mở rộng các hướng ứng dụng đó, đặc biệt đối với các bài toán đòi hỏi đồng thời thỏa mãn nhiều điều kiện hoặc khai thác thông tin từ nhiều nguồn. Vì vậy, việc nghiên cứu về mô hình bài toán này cùng với đó là các phương pháp tìm nghiệm của bài toán là một chủ đề có ý nghĩa khoa học. Trên cơ sở đó, chúng tôi lựa chọn bài toán này làm đối tượng nghiên cứu chính của luận án.

Bên cạnh hướng mở rộng và tổng quát hóa các mô hình của bài toán chấp nhận tách, việc phát triển các phương pháp giải cho lớp bài toán này đã thu hút sự quan tâm đáng kể trong những năm gần đây. Sau đây, chúng tôi trình bày khái quát một số phương pháp và thuật toán tiêu biểu. Các phương pháp này làm cơ sở cho việc xây dựng và phân tích các phương pháp được đề xuất trong luận án.

Năm 1932, J. Hadamard (xem [34]) đã chỉ ra rằng phần lớn các bài toán tách, đặc biệt là những bài toán có liên quan đến toán tử ngược, thường là *bài toán đặt không chỉnh (ill-posed problems)*. Nghiệm của chúng có thể không tồn tại, không duy nhất hoặc không ổn định trước những nhiễu nhỏ trong dữ liệu đầu vào. Điều này gây khó khăn đáng kể trong thực hành tính toán và trong các ứng dụng như xử lý tín hiệu, khôi phục ảnh, hay bài toán ngược trong vật lý toán. Để khắc phục vấn đề này, năm 1943, A. N. Tikhonov (xem [71]) đã đề xuất *phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov* (*Tikhonov regularization*) – một công cụ cổ điển nhưng vẫn có giá trị nền tảng cho đến ngày nay. Ý tưởng chính của phương pháp này là thay vì giải trực tiếp bài toán đặt không chỉnh

$$Ax = b,$$

ta xét một bài toán đặt chỉnh dạng

$$\min_{x\in\mathcal{H}} \|Ax-b\|^2+\lambda\|x\|^2, \tag{0.1}$$

trong đó A là toán tử tuyến tính, $\lambda>0$ là *tham số hiệu chỉnh (regularization parameter)*. Điều kiện tối ưu bậc nhất của (0.1) tương đương với phương trình

$$A^*(Ax-b)+\lambda x=0.$$

Khi $\lambda\to 0$, nghiệm hiệu chỉnh x_λ tiến dần tới nghiệm thực của bài toán gốc. Từ đó, phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov đã trở thành một công cụ quan trọng trong giải tích phi tuyến và được kết hợp với nhiều phương pháp lặp hiện đại để giải các bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, bài toán tách và nhiều bài toán khác. Những kết quả này có thể xem trong một số công trình của Y. I. Alber và I. V. Ryazantseva (xem [8]), M. T. Nair (xem [47]), P. K. Anh và các cộng sự (xem [4, 5, 36]), cùng nhiều tác giả khác. Điều này cho thấy phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov vẫn tiếp tục được phát triển và mở rộng.

Một trong những phương pháp phổ biến để giải lớp bài toán chấp nhận tách đó là phương pháp CQ, được giới thiệu lần đầu bởi C. Byrne (xem [15]). Thuật toán CQ cùng một số mở rộng của nó nhìn chung chỉ thu được sự hội tụ yếu trong không gian Hilbert thực vô hạn chiều với cỡ bước được chọn phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển (trong thực tế việc tính toán chuẩn của một toán tử thường không đơn giản). Để khắc phục được hạn chế liên quan đến việc tính chuẩn của toán tử chuyển của thuật toán CQ, *thuật toán tự thích nghi* đã được đề xuất, một số nghiên cứu về thuật toán này có thể xem trong các tài liệu [42, 51, 62, 70, 80] và các tài liệu liên quan khác. Ưu điểm của các thuật toán này là cỡ bước được xây dựng tự thích nghi, không phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển.

Thuật toán điểm gần kề (Proximal Point Algorithm) cũng là một trong những thuật toán quan trọng để giải lớp bài toán chấp nhận tách. Thuật toán này được nghiên cứu lần đầu bởi B. Martinet (xem [44]) cho bài toán cực tiểu của phiếm hàm lồi trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Tác giả đã xây dựng dãy lặp $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến nghiệm tối

ưu của phiếm hàm lồi f, với xấp xỉ đầu $x_1 \in \mathcal{H}$ và công thức lặp là

$$x_{n+1} = \arg\min_{y\in\mathcal{H}} \left\{ f(y) + \frac{1}{2}\|y - x_n\|^2 \right\}, \quad n \geq 1. \tag{0.2}$$

Dãy $\{x_n\}$ được xây dựng trong (0.2) có thể được viết lại dưới dạng

$$\partial f(x_{n+1}) + x_{n+1} \ni x_n, \quad n \geq 1.$$

Năm 1976, R. T. Rockafellar (xem [59]) đã áp dụng phương pháp điểm gần kề của B. Martinet để tìm *không điểm của toán tử đơn điệu cực đại* $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Ông đã đề xuất một dãy lặp $\{x_n\}$ với điểm xuất phát $x_0 \in \mathcal{H}$, được xác định theo quy tắc

$$r_n A(x_{n+1}) + x_{n+1} \ni x_n, \quad n \geq 0, \quad r_n > r_0 > 0. \tag{0.3}$$

Công thức lặp (0.3) tương đương với

$$x_{n+1} = J^A_{r_n}(x_n),$$

trong đó $J^A_{r_n} = (I + r_n A)^{-1}$ là toán tử giải của A với $r_n > r_0 > 0$.

Tuy nhiên, phương pháp điểm gần kề chỉ đạt được sự hội tụ yếu trong không gian Hilbert vô hạn chiều. Một số ví dụ để chỉ ra rằng dãy lặp tạo bởi (0.3) chỉ hội tụ yếu có thể xem trong [33] của O. Guler và [11] của H. H. Bauschke và các cộng sự. Để đạt được sự hội tụ mạnh, phương pháp điểm gần kề được các tác giả kết hợp với một số phương pháp như phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, phương pháp lặp Halpern, phương pháp xấp xỉ mềm, phương pháp chiếu co hẹp, phương pháp chiếu lai ghép và một số phương pháp khác (xem [14, 24, 33, 46]).

Một hướng mở rộng khác của phương pháp điểm gần kề đó là đưa thêm thành phần quán tính vào công thức lặp của thuật toán với mong muốn để tăng tốc độ hội tụ. Các *thuật toán quán tính* (*inertial algorithms*) có nguồn gốc từ cơ học cổ điển. Công trình đầu tiên đặt nền móng cho thuật toán quán tính là bài báo của B. T. Polyak vào năm 1964 (xem [49]). Trong công trình này, tác giả đã đề xuất các phương pháp lặp

k-bước để giải phương trình toán tử trong không gian Banach, cũng như các phương pháp giải cho bài toán tối ưu khả vi thông qua việc giải phương trình $\nabla f(x) = 0$. Năm 1987, ý tưởng quán tính được B. T. Polyak chuẩn hóa và phát triển đầy đủ hơn trong phương pháp *Heavy Ball* (xem [50]), với công thức lặp

$$x^{n+1} = x^n - \alpha \nabla f(x^n) + \beta(x^n - x^{n-1}),$$

trong đó $\alpha > 0$ và $\beta \in [0, 1)$. Nhờ vào thành phần "quán tính" thông qua sai phân $x^n - x^{n-1}$, phương pháp này đã được chỉ ra là có khả năng cải thiện đáng kể tốc độ hội tụ so với các phương pháp một bước cổ điển trong các bài toán tối ưu lồi trơn.

Năm 2001, F. Alvarez và H. Attouch đã đưa thêm thành phần quán tính vào phương pháp điểm gần kề, qua đó đề xuất *phương pháp điểm gần kề quán tính* để tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại trong không gian Hilbert (xem [6, 7]). Lấy ý tưởng từ việc đưa bài toán tiến hóa bậc hai

$$0 \in \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + A(x), \quad \beta > 0,$$

về dạng tương đương

$$0 \in \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{h^2} + \beta \frac{x_{n+1} - x_n}{h} + A(x_{n+1}).$$

Từ đó họ đã đưa ra thuật toán điểm gần kề quán tính như sau

$$x_{n+1} = J^A_{\lambda_n}(x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1})),$$

trong đó $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là toán tử đơn điệu cực đại thỏa mãn $\mathrm{Zer}(A) \neq \emptyset$. Khi đó nếu dãy tham số được chọn thỏa mãn một số điều kiện nhất định thì dãy lặp sinh bởi thuật toán trên sẽ hội tụ yếu tới không điểm của toán tử A. Khi $\theta_n = 0$ thì thuật toán này trở thành thuật toán điểm gần kề cổ điển. Điểm đặc trưng của những thuật toán có thành phần quán tính là mỗi bước lặp mới không chỉ phụ thuộc vào bước trước đó mà còn kết hợp thông tin từ hai bước lặp trước. Trong một số trường hợp cụ thể, điều này đã được chỉ ra là giúp cải thiện đáng kể hiệu suất của các thuật toán không có

thành phần quán tính. Bằng cách kết hợp với một số kỹ thuật khác, nhiều tác giả đã chỉ ra được kết quả hội tụ mạnh cho thuật toán điểm gần kề quán tính, chẳng hạn như W. Cholamjiak và H. Dutta (xem [22], năm 2022), B. Tan và S. Y. Cho (xem [64], năm 2022), D. V. Thong và cộng sự (xem [73], năm 2020). Gần đây, hướng nghiên cứu này tiếp tục được mở rộng theo hướng xây dựng các công thức lặp có nhiều thành phần quán tính nhằm tăng tốc độ hội tụ, có thể xem trong các công trình của O. S. Iyiola và Y. Shehu (xem [37], năm 2022), và C. Zhang và các cộng sự (xem [82], năm 2020). Hiện nay, các thuật toán quán tính và phương pháp điểm gần kề đã trở thành những công cụ hữu hiệu trong tối ưu, lý thuyết điểm bất động và các bài toán tách.

Từ những phân tích và kết quả đã trình bày ở trên, chúng tôi lựa chọn nghiên cứu đề tài **"Một số phương pháp lặp giải bài toán nghiệm chung tách cho lớp phương trình toán tử đơn điệu với đa tập đầu ra"** cho luận án của mình, nhằm góp phần phát triển lý thuyết và các thuật toán hiệu quả cho lớp bài toán này.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu của luận án là nghiên cứu, xây dựng các phương pháp lặp, thuật toán để tìm nghiệm cho bài toán (SCSP-MOE) và một số bài toán liên quan. Các thuật toán được phát triển theo hướng tự thích nghi. Cụ thể như sau:

- Nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov (lặp ẩn) cho bài toán (SCSP-MOE). Từ phương pháp hiệu chỉnh thu được, đề xuất phương pháp lặp hiện cho bài toán này.

- Nghiên cứu và đề xuất phương pháp điểm gần kề quán tính (hiệu chỉnh) cho bài toán (SCSP-MOE). Đồng thời đề xuất các mô hình kết hợp phương pháp này với một số kỹ thuật khác như phương pháp xấp xỉ mềm, phương pháp chiếu lai ghép, phương pháp chiếu co hẹp nhằm xây dựng các thuật toán hiệu quả hơn để giải bài toán (SCSP-MOE).

- Áp dụng các thuật toán đề xuất cho một số bài toán liên quan và xây dựng các ví dụ số minh họa cho các kết quả lý thuyết thu được bằng MATLAB.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là bài toán (SCSP-MOE) trong không gian Hilbert thực và một số bài toán liên quan như: bài toán không điểm chung tách với đa tập đầu ra; bài toán điểm bất động chung tách với đa tập đầu ra; bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra và bài toán điểm cực tiểu chung tách với đa tập đầu ra.

Phạm vi nghiên cứu: Luận án tập trung nghiên cứu và đề xuất một số thuật toán mới trên cơ sở phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, phương pháp điểm gần kề quán tính, cũng như sự kết hợp giữa phương pháp điểm gần kề quán tính với một số phương pháp khác như phương pháp chiếu lai ghép, phương pháp chiếu co hẹp và phương pháp xấp xỉ mềm để giải lớp bài toán nêu trên.

4. Cách tiếp cận, phương pháp nghiên cứu

Để nghiên cứu các nội dung nêu trên, luận án vận dụng các kiến thức và kỹ thuật của giải tích hàm, giải tích lồi, tối ưu hóa và lý thuyết điểm bất động. Cách tiếp cận được thực hiện thông qua việc sử dụng các phương pháp cổ điển, chẳng hạn như phương pháp chiếu và các phương pháp lặp, kết hợp với những kỹ thuật khác nhau như tìm kiếm độ dài bước thích nghi, kỹ thuật lai ghép, kỹ thuật thu hẹp và kỹ thuật xoay vòng.

5. Kết quả nghiên cứu và cấu trúc của luận án

Trong luận án này, chúng tôi đạt được một số kết quả mới như sau:

- Đề xuất và nghiên cứu bài toán (SCSP-MOE), là một mô hình bài toán mới có tính tổng quát, bao hàm và mở rộng của lớp bài toán chấp nhận tách.
- Đề xuất hai phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov bao gồm phương pháp lặp ẩn và phương pháp lặp hiện để giải bài toán (SCSP-MOE), đồng thời khảo sát tính ổn định của hai phương pháp này khi dữ liệu đầu vào bị nhiễu.
- Đề xuất bốn thuật toán lặp mới dựa trên phương pháp điểm gần kề quán tính để xấp xỉ nghiệm cho bài toán (SCSP-MOE). Bao gồm: một thuật toán hội tụ

yếu và ba thuật toán hội tụ mạnh. Thuật toán hội tụ mạnh đầu tiên đạt được bằng cách kết hợp thuật toán hội tụ yếu với phương pháp xấp xỉ mềm. Hai thuật toán hội tụ mạnh tiếp theo là hai thuật toán chiếu xoay vòng, được xây dựng bằng cách kết hợp phương pháp điểm gần kề với đa thành phần quán tính và kỹ thuật chiếu lai ghép hoặc chiếu co hẹp.

- Áp dụng các thuật toán đề xuất giải một số bài toán liên quan và thực hiện các tính toán số minh họa trong các không gian hữu hạn chiều, vô hạn chiều và bài toán khôi phục tín hiệu.

Nội dung của luận án được chia thành 04 chương, cùng với phần mở đầu, kết luận, danh mục các ký hiệu, danh mục các công trình khoa học của tác giả và tài liệu tham khảo.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.

Chương 2: Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov giải bài toán (SCSP-MOE).

Chương 3: Thuật toán điểm gần kề quán tính giải bài toán (SCSP-MOE).

Chương 4: Hai thuật toán chiếu với đa thành phần quán tính giải bài toán (SCSP-MOE).

Nội dung luận án được xây dựng dựa trên các kết quả nghiên cứu đã công bố trong ba bài báo (CT1), (CT2) và (CT3) trên các tạp chí SCIE Q1/Q2 trong Danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án. Các kết quả của luận án đã được trình bày tại:

- Seminar tại Bộ môn Toán ứng dụng và Tin học, Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, các năm 2022 – 2025.
- Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ X, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng, tháng 8 năm 2023.
- Hội thảo Tối ưu và Tính toán khoa học lần thứ 22, Ba Vì, tháng 4 năm 2024.
- Hội nghị Nghiên cứu sinh, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, tháng 11 năm 2024.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ bản của giải tích hàm được sử dụng trong các chương sau bao gồm: sự hội tụ mạnh, sự hội tụ yếu, tập lồi, hàm lồi, dưới vi phân của hàm lồi, một số toán tử trong không gian Hilbert, một số lớp ánh xạ liên tục, phép chiếu mêtric, toán tử loại đơn điệu, bất đẳng thức biến phân và một số bổ đề bổ trợ.

Trong toàn bộ nội dung của chương, ta luôn giả thiết $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert thực với tích vô hướng được ký hiệu là $\langle .,. \rangle$ và chuẩn được ký hiệu là $\|.\|$.

1.1 Một số nội dung cơ bản trong không gian Hilbert

1.1.1 Sự hội tụ mạnh và sự hội tụ yếu

Định nghĩa 1.1.1 (xem [12], trang 33)**.**

i) Dãy $\{x_n\}$ trong $\mathcal{H}$ được gọi là *hội tụ yếu* đến phần tử $x \in \mathcal{H}$, ký hiệu $x_n \rightharpoonup x$, nếu

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle, \text{ với mọi } \ y \in \mathcal{H}.$$

ii) Dãy $\{x_n\}$ trong $\mathcal{H}$ được gọi là *hội tụ mạnh* đến phần tử $x \in \mathcal{H}$, ký hiệu $x_n \to x$, nếu

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Chú ý 1.1.2. Hội tụ mạnh kéo theo hội tụ yếu nhưng điều ngược lại chưa chắc đúng.

Ví dụ, xét không gian các dãy số thực có bình phương khả tổng

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots) \mid x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \cdots \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

và dãy $\{e_n\} \subset \ell^2$ được cho bởi

$$e_n = (0,\, 0,\, 0, \ldots, 1,\, 0, \ldots),$$

trong đó tọa độ thứ n bằng 1 và các tọa độ còn lại thì bằng 0. Khi đó, $e_n \rightharpoonup 0$ khi $n \to \infty$. Tuy nhiên dãy $\{e_n\}$ không hội tụ mạnh về 0 khi $n \to \infty$, vì $\|e_n\| = 1$ với mọi $n \geq 1$.

Một số tính chất của dãy bị chặn được sử dụng trong các chứng minh của luận án được trình bày trong các mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 1.1.3 (xem [12], trang 36)**.** *Nếu dãy $\{x_n\}$ là dãy bị chặn trong $\mathcal{H}$ thì dãy $\{x_n\}$ có dãy con hội tụ yếu.*

Mệnh đề 1.1.4 (xem [12], trang 35, 36)**.** *Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong $\mathcal{H}$. Khi đó, nếu $x_n \rightharpoonup x \in \mathcal{H}$ thì dãy $\{x_n\}$ bị chặn và*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Mệnh đề 1.1.5 (Tính chất Kadec - Klee, xem [12], trang 37)**.** *Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong $\mathcal{H}$ và $x \in \mathcal{H}$. Khi đó $x_n \to x$ nếu và chỉ nếu $x_n \rightharpoonup x$ và $\|x_n\| \to \|x\|$.*

1.1.2 Toán tử tuyến tính bị chặn và toán tử liên hợp

Định nghĩa 1.1.6 (xem [3], trang 200)**.** Toán tử tuyến tính T từ không gian Hilbert $\mathcal{H}_1$ vào không gian Hilbert $\mathcal{H}_2$ được gọi là *bị chặn* nếu tồn tại một hằng số $M > 0$ sao cho với mọi $x \in \mathcal{H}_1$, ta có

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|.$$

Mệnh đề 1.1.7 (xem [3], trang 200)**.** *Toán tử tuyến tính $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ là liên tục nếu và chỉ nếu nó bị chặn.*

Định nghĩa 1.1.8 (xem [3], trang 201)**.** *Cho $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ là toán tử tuyến tính bị chặn. Khi đó, chuẩn của toán tử T ký hiệu là $\|T\|$, được xác định như sau*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|.$$

Định nghĩa 1.1.9 (xem [3], trang 331)**.** Cho $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ là toán tử tuyến tính bị chặn. Khi đó *toán tử liên hợp* $T^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ của toán tử T được xác định bởi

$$\langle T(x),\, y\rangle = \langle x,\, T^*(y)\rangle,$$

với mọi $x \in \mathcal{H}_1$ và mọi $y \in \mathcal{H}_2$.

Nhận xét 1.1.10. Toán tử liên hợp T^* của toán tử tuyến tính bị chặn T luôn tồn tại và xác định duy nhất. Hơn nữa, T^* cũng là toán tử tuyến tính bị chặn và $\|T^*\| = \|T\|$.

1.1.3 Hàm lồi và dưới vi phân của hàm lồi

Định nghĩa 1.1.11 (xem [1], trang 18)**.** Tập con khác rỗng C của $\mathcal{H}$ được gọi là *tập lồi* nếu với mọi $x, y \in C$, $\lambda \in [0, 1]$ thì $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ (tức là, mọi đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ trong C đều thuộc C).

Ví dụ 1.1.12. Trong không gian $\mathbb{R}^n$, các nửa không gian đóng

$$C = \{x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\mid \langle a, x\rangle \leq \alpha\},$$

với $a \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ là các tập lồi.

Định nghĩa 1.1.13 (xem [2], trang 13)**.** Cho C là một tập con lồi, khác rỗng trong $\mathcal{H}$ và $x_0 \in C$. *Nón pháp tuyến của C tại x_0*, được ký hiệu là $N_C(x_0)$, được xác định bởi

$$N_C(x_0) = \{v \in \mathcal{H} \,|\, \langle v,\, x - x_0\rangle \leq 0,\, \forall x \in C\}.$$

Định nghĩa 1.1.14 (xem [12], trang 10, 113, 114)**.** Hàm $f : \mathcal{H} \to (-\infty, \infty]$ được gọi là:

i) *lồi* trên $\mathcal{H}$ nếu với mọi số thực $\lambda \in [0,1]$, $\forall x,\, y \in \mathcal{H}$ ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

ii) *lồi chặt* trên $\mathcal{H}$ nếu với mọi số thực $\lambda \in (0,1)$, $\forall x,\, y \in \mathcal{H}$, $x \neq y$ ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

iii) *chính thường* nếu miền hữu hiệu của nó

$$\mathrm{dom} f = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) < \infty\} \neq \emptyset.$$

Ví dụ 1.1.15. Một số ví dụ về hàm lồi và hàm lồi chặt.

i) Cho C là tập con lồi của $\mathcal{H}$. Hàm chỉ của C xác định bởi

$$i_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in C \\ \infty & \text{nếu } x \notin C \end{cases}$$

là một hàm lồi.

ii) Hàm chuẩn $\|\cdot\|$ là hàm lồi nhưng không lồi chặt. Thật vậy, giả sử $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ và $\alpha \in (0,1)$. Khi đó

$$\|\alpha x + (1-\alpha)0\| = \|\alpha x\| = \alpha \|x\| = \alpha \|x\| + (1-\alpha)\|0\|.$$

Do đó, hàm $\|\cdot\|$ không phải là hàm lồi chặt.

iii) Hàm chuẩn bình phương $\|\cdot\|^2$ là hàm lồi chặt.

Định nghĩa 1.1.16 (xem [1], trang 24)**.** Cho hàm $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ và $x \in \mathcal{H}$.

i) Hàm f được gọi là *khả vi Gâteaux* tại điểm x nếu tồn tại một phần tử $u \in \mathcal{H}$ sao cho với mọi $y \in \mathcal{H}$ thì

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+ty) - f(x) - t\langle y, u\rangle}{t} = 0.$$

Phần tử u (nếu tồn tại) là duy nhất và được gọi là đạo hàm Gâteaux của f tại x, ký hiệu là $f'_G(x)$ hoặc $\nabla f(x)$.

ii) Hàm f được gọi là *khả vi Fréchet* tại điểm x nếu tồn tại một phần tử $u \in \mathcal{H}$ sao cho với mọi $y \in \mathcal{H}$ thì

$$\lim_{\|y\|\to 0} \frac{f(x+y) - f(x) - \langle y, u\rangle}{\|y\|} = 0.$$

Phần tử u (nếu tồn tại) là duy nhất và được gọi là đạo hàm Fréchet của f tại x, ký hiệu là $f'(x)$ hoặc $Df(x)$.

Nhận xét 1.1.17. Theo định nghĩa, nếu hàm f khả vi Fréchet tại x thì nó khả vi Gâteaux tại điểm này. Điều ngược lại đúng khi f là hàm lồi trong không gian Hilbert hữu hạn chiều.

Định nghĩa 1.1.18 (xem [12], trang 223)**.** Cho hàm $f : \mathcal{H} \to (-\infty, \infty]$ là một hàm lồi, chính thường. *Dưới vi phân* của f là một toán tử đa trị $\partial f : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$, được xác định bởi

$$\partial f(x) = \{v \in \mathcal{H} \mid \ f(y) - f(x) \geq \langle v, y - x\rangle, \ \forall y \in \mathcal{H}\}. \tag{1.1}$$

Hàm f được gọi là *khả dưới vi phân tại* $x \in \mathcal{H}$ nếu $\partial f(x) \neq \emptyset$; mỗi phần tử của $\partial f(x)$ được gọi là *dưới gradient của* f *tại* x.

Ví dụ 1.1.19. Hàm chỉ của tập lồi C có dưới vi phân tại mỗi điểm $x \in C$ là

$$\partial i_C(x) = \{v \in \mathcal{H} \mid \langle v, y - x\rangle \leq 0, \forall y \in C\} = N_C(x).$$

Một số tính chất của hàm lồi, khả vi Gâteaux và dưới vi phân của hàm lồi được trình bày trong các mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1.1.20 (xem [2], trang 120)**.** *Cho f là hàm lồi trên $\mathcal{H}$. Khi đó:*

i) Nếu f khả vi Gâteaux tại $x_0 \in \operatorname{dom} f$ với đạo hàm Gâteaux tại x_0 là $\nabla f(x_0)$ và khả dưới vi phân tại x_0, thì $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

ii) Nếu f là hàm chính thường, liên tục tại x_0 và $\partial f(x_0)$ gồm một phần tử duy nhất thì f khả vi Gâteaux tại x_0 và đạo hàm Gâteaux của f chính là phần tử duy nhất đó.

1.2 Một số lớp ánh xạ đặc biệt

Trong mục này, chúng tôi trình bày các khái niệm và tính chất cơ bản của một số lớp ánh xạ đặc biệt, được sử dụng cho việc thiết lập giả thiết của bài toán nghiên cứu cũng như chứng minh các định lý của luận án.

1.2.1 Ánh xạ liên tục Lipschitz

Định nghĩa 1.2.1 (xem [1], trang 58)**.** Cho C là tập con khác rỗng của $\mathcal{H}$. Ánh xạ $T : C \to \mathcal{H}$ được gọi là:

i) *ánh xạ L-liên tục Lipschitz* nếu tồn tại hằng số $L > 0$ sao cho với mọi $x, y \in C$, ta có
$$\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|;$$

ii) *ánh xạ co* nếu T là L-liên tục Lipschitz với hằng số $L < 1$;

iii) *ánh xạ không giãn* nếu T là L-liên tục Lipschitz với hằng số $L = 1$, tức là với mọi $x, y \in C$, ta có
$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Nhận xét 1.2.2. Mọi ánh xạ L-liên tục Lipschitz là ánh xạ liên tục đều. Tuy nhiên một ánh xạ liên tục có thể không liên tục Lipschitz.

Định nghĩa 1.2.3 (xem [12], trang 59)**.** Cho C là tập con khác rỗng của không gian Hilbert $\mathcal{H}$, I là ánh xạ đồng nhất trên $\mathcal{H}$. Ánh xạ $T : C \to \mathcal{H}$ được gọi là *không giãn vững* nếu

$$\|(I-T)(x)-(I-T)(y)\|^2 \geq \|x-y\|^2 - \|T(x)-T(y)\|^2, \quad \forall x, y \in C. \tag{1.2}$$

Nhận xét 1.2.4. i) Biểu thức (1.2) có thể được viết lại dưới dạng tương đương

$$\|T(x)-T(y)\|^2 \leq \langle x-y,\, T(x)-T(y)\rangle, \quad \forall x, y \in C.$$

ii) Ánh xạ không giãn vững là ánh xạ không giãn.

Khái niệm điểm bất động đóng vai trò trung tâm trong nhiều thuật toán lặp của lớp bài toán chấp nhận tách. Sau đây, chúng tôi trình bày định nghĩa và một số tính chất cơ bản của điểm bất động của ánh xạ không giãn.

Định nghĩa 1.2.5 (xem [1], trang 63)**.** Cho C là tập con khác rỗng của $\mathcal{H}$. Phần tử $x \in C$ được gọi là *điểm bất động của ánh xạ không giãn* $T : C \to C$ nếu $T(x) = x$. *Tập tất cả các điểm bất động* của T ký hiệu là $\mathrm{Fix}(T)$, tức là

$$\mathrm{Fix}(T) = \{x \in C \mid T(x) = x\}.$$

Mệnh đề 1.2.6 (xem [1], trang 65)**.** *Cho C là tập con đóng, khác rỗng của không gian Hilbert $\mathcal{H}$ và $T : C \to C$ là ánh xạ co thì T có duy nhất một điểm bất động trong C.*

Mệnh đề 1.2.7 (xem [12], trang 78)**.** *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng và bị chặn của $\mathcal{H}$. Khi đó mỗi ánh xạ không giãn $T : C \to C$ có ít nhất một điểm bất động trên C.*

Mệnh đề 1.2.8 (xem [12], trang 76)**.** *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của $\mathcal{H}$ và $T : C \to \mathcal{H}$ là một ánh xạ không giãn. Khi đó* $\mathrm{Fix}(T)$ *là tập lồi, đóng.*

1.2.2 Ánh xạ h-liên tục

Định nghĩa 1.2.9 (xem [1], trang 59)**.** Cho C là tập con khác rỗng của $\mathcal{H}$. Ánh xạ $T : C \to \mathcal{H}$ được gọi là h-liên tục tại $x \in C$ nếu dãy $\{x_n\} \subset C$ hội tụ mạnh tới x dọc theo một đường thẳng kéo theo dãy $\{T(x_n)\}$ hội tụ yếu tới $T(x)$, tức là

$$T(x_n) = T(x + t_n y) \rightharpoonup T(x) \text{ khi } t_n \to 0 \text{ với mọi } y \in C.$$

Ánh xạ T được gọi là h-liên tục trên C nếu nó h-liên tục tại mọi $x \in C$.

Nhận xét 1.2.10. Mọi ánh xạ liên tục là ánh xạ h-liên tục. Tuy nhiên một ánh xạ h-liên tục chưa chắc là ánh xạ liên tục. Chẳng hạn, xét ánh xạ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$T(u,v) = \begin{cases} \dfrac{uv^2}{2u^2 + v^4} & \text{nếu } (u,v) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (u,v) = (0,0) \end{cases}$$

là ánh xạ h-liên tục tại $(0,0)$ nhưng không liên tục tại điểm này. Thật vậy, với mọi $y = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ ta có

$$T(x_n) = T(t_n y) = \begin{cases} \dfrac{t_n a b^2}{2a^2 + t_n^2 b^4} & \text{nếu } (a,b) \neq (0,0), \\ 0 & \text{nếu } (a,b) = (0,0). \end{cases}$$

Do đó, $T(x_n) \to 0$ khi $t_n \to 0$. Do đó T là h-liên tục tại $(0,0)$. Tuy nhiên, nếu chọn dãy

$$\{x_n\} = \left\{ \left(\frac{1}{n^2}, \frac{2}{n} \right) \right\} \neq (0,0)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì ta có

$$x_n \to 0,$$

tuy nhiên

$$T(x_n) = \frac{(1/n^2)(2/n)^2}{2(1/n^2)^2 + (2/n)^4} = \frac{2}{9} \neq 0.$$

Suy ra, T không liên tục tại $(0,0)$.

1.2.3 Phép chiếu mêtric

Mệnh đề 1.2.11 (xem [1], trang 70)**.** *Cho C là một tập con lồi, đóng khác rỗng của $\mathcal{H}$. Khi đó, với mỗi $x \in \mathcal{H}$, tồn tại duy nhất phần tử $y \in C$ sao cho*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|. \tag{1.3}$$

Định nghĩa 1.2.12 (xem [1], trang 71)**.** Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathcal{H}$, ánh xạ $P_C : \mathcal{H} \to C$ sao cho với mỗi $x \in \mathcal{H}$ ta luôn có

$$\|x - P_C(x)\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$$

được gọi là *phép chiếu mêtric* từ $\mathcal{H}$ lên C. Phần tử $P_C(x)$ được gọi là hình chiếu của x trên C.

Ví dụ 1.2.13. Trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$, ta có một số ví dụ sau về phép chiếu mêtric từ $\mathcal{H}$ lên một tập con lồi, đóng, khác rỗng của nó.

(i) *Phép chiếu mêtric lên một siêu phẳng*: Giả sử C là một siêu phẳng, được xác định bởi

$$C = \{x \in \mathcal{H} \mid \langle x, y\rangle = a\},$$

trong đó $y \in \mathcal{H}$, $y \neq 0$ và $a \in \mathbb{R}$. Khi đó, phép chiếu mêtric của một điểm $x \in \mathcal{H}$ lên C được cho bởi công thức

$$P_C(x) = x - \frac{\langle x, y\rangle - a}{\|y\|^2}\, y.$$

(ii) *Phép chiếu mêtric lên nửa không gian đóng*: Giả sử Q là nửa không gian đóng, được xác định bởi

$$Q = \{x \in \mathcal{H} \mid \langle x, z\rangle \leq a\},$$

trong đó $z \in \mathcal{H}$, $z \neq 0$ và $a \in \mathbb{R}$. Khi đó, với mọi $x \in \mathcal{H}$, phép chiếu mêtric của x lên Q có dạng

$$P_Q(x) = x - \max\left\{\frac{\langle x, z\rangle - a}{\|z\|^2},\, 0\right\} z.$$

Các mệnh đề sau trình bày những đặc trưng cơ bản và tính chất hình học của phép chiếu mêtric.

Mệnh đề 1.2.14 (xem [1], trang 72)**.** *Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Điều kiện cần và đủ để ánh xạ $P_C : \mathcal{H} \to C$ là phép chiếu mêtric từ $\mathcal{H}$ lên C là*

$$\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0, \text{ với mọi } x \in \mathcal{H} \text{ và } y \in C.$$

Mệnh đề 1.2.15 (xem [1], trang 73, 74)**.** *Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert $\mathcal{H}$ và P_C là một phép chiếu mêtric từ $\mathcal{H}$ lên C. Khi đó các tính chất sau được thỏa mãn:*

i) $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$ *(tức phép chiếu mêtric là ánh xạ không giãn);*

ii) $\|P_C(x) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|P_C(x) - x\|^2$.

Nhận xét 1.2.16. Phép chiếu mêtric P_C và ánh xạ $I - P_C$ là các ánh xạ không giãn.

1.3 Toán tử đơn điệu

Tính đơn điệu và tính bức của toán tử đóng vai trò quan trọng trong việc giải lớp bài toán chấp nhận tách. Các mệnh đề và định nghĩa dưới đây trình bày về một số điều kiện đặc trưng cho tính đơn điệu, đơn điệu mạnh, đơn điệu mạnh ngược và đơn điệu cực đại cùng với toán tử giải tương ứng của toán tử đơn điệu.

Định nghĩa 1.3.1 (xem [12], trang 2)**.** Cho $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là toán tử đa trị có miền xác định và miền giá trị lần lượt là:

$$D(A) = \{x \in \mathcal{H} \mid A(x) \neq \emptyset\},$$
$$R(A) = \{A(x) \mid x \in D(A)\}.$$

Khi đó ta có các khái niệm sau.

i) *Đồ thị* của A là tập

$$G(A) = \{(x,\, u) \mid (x,\, u) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, u \in A(x)\}.$$

ii) *Toán tử nghịch đảo* $A^{-1} : 2^{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ xác định bởi

$$A^{-1}(u) = \{x \in \mathcal{H} \mid u \in A(x)\},$$

hay $(u,\, x) \in G(A^{-1})$ nếu và chỉ nếu $(x,\, u) \in G(A)$.

iii) *Tập không điểm* của A là

$$\mathrm{Zer}(A) = A^{-1}(0) = \{x \in D(A) \mid 0 \in A(x)\}.$$

Định nghĩa 1.3.2 (xem [12], trang 293, 297, 323)**.** Cho $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert thực, toán tử $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ được gọi là

i) *đơn điệu* trên $\mathcal{H}$ nếu

$$\langle x - y,\, u - v\rangle \geq 0, \quad \text{với mọi } x,\, y \in \mathcal{H};\, u \in A(x);\, v \in A(y).$$

ii) *đơn điệu chặt* trên $\mathcal{H}$ nếu

$$\langle x - y,\, u - v\rangle > 0, \quad \text{với mọi } x,\, y \in \mathcal{H};\, x \neq y;\, u \in A(x);\, v \in A(y).$$

iii) γ-*đơn điệu mạnh* trên $\mathcal{H}$ nếu tồn tại hằng số $\gamma > 0$ sao cho

$$\langle x - y,\, u - v\rangle \geq \gamma\|x - y\|^2, \quad \text{với mọi } x,\, y \in \mathcal{H};\, u \in A(x);\, v \in A(y).$$

iv) *đơn điệu cực đại* trên $\mathcal{H}$ nếu A là toán tử đơn điệu và $G(A)$ không là tập con thực sự của đồ thị của toán tử đơn điệu nào khác.

Nhận xét 1.3.3. A là toán tử γ-đơn điệu mạnh trên $\mathcal{H}$ thì A đơn điệu chặt trên $\mathcal{H}$.

Ví dụ 1.3.4. Một số ví dụ về toán tử loại đơn điệu.

i) Hàm $f : \mathcal{H} \to (-\infty, \infty]$ là hàm lồi, chính thường thì ∂f là đơn điệu. Thật vậy, với mọi $x,\ y \in \mathcal{H}$, $u \in \partial f(x)$, $v \in \partial f(y)$, từ (1.1) ta có

$$\langle y - x, u\rangle \leq f(y) - f(x);$$
$$\langle x - y, v\rangle \leq f(x) - f(y).$$

Cộng vế với vế ta được

$$\langle x - y, u - v\rangle \geq 0.$$

ii) Cho C là tập con khác rỗng của không gian Hilbert $\mathcal{H}$, $T : C \to \mathcal{H}$ là ánh xạ không giãn, $\alpha \in [-1, 1]$, I là ánh xạ đồng nhất, đặt $A = I + \alpha T$, khi đó A là đơn điệu. Thật vậy, với mọi $x, y \in C$ ta có

$$\begin{aligned}\langle x - y, A(x) - A(y)\rangle &= \|x - y\|^2 + \alpha\langle x - y,\ T(x) - T(y)\rangle \\ &\geq \|x - y\| \left(\|x - y\| - |\alpha|\|T(x) - T(y)\|\right) \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Định nghĩa 1.3.5 (xem [1], trang 55)**.** Cho C là tập con khác rỗng của không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Ánh xạ $T : C \to \mathcal{H}$ được gọi là *bức* trên C nếu tồn tại $x_0 \in C$ sao cho

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\langle x - x_0,\ T(x) - T(x_0)\rangle}{\|x - x_0\|} = \infty.$$

Nhận xét 1.3.6. Ánh xạ T là γ-đơn điệu mạnh trên C thì nó là bức trên C. Tuy nhiên, ngược lại nói chung không đúng.

Mệnh đề 1.3.7 (xem [12], trang 297)**.** *Toán tử $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là toán tử đơn điệu cực đại nếu và chỉ nếu với mọi $(x, u) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, từ điều kiện*

$$\langle x - y,\ u - v\rangle \geq 0, \quad \textit{với mọi } y \in D(A),\ v \in A(y),$$

suy ra $u \in A(x)$.

Mệnh đề 1.3.8 (xem [12], trang 298)**.** *Nếu $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là toán tử đơn điệu và liên tục thì T là đơn điệu cực đại.*

Mệnh đề 1.3.9 (định lý Minty; xem [12], trang 311)**.** *Cho $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là toán tử đơn điệu. Khi đó, A là toán tử đơn điệu cực đại nếu và chỉ nếu $R(I + A) = \mathcal{H}$.*

Định nghĩa 1.3.10 (xem [12], trang 333)**.** Cho $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là một toán tử đơn điệu và λ là một hằng số dương. Toán tử giải của A ký hiệu là J_λ^A được xác định bởi

$$J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-1}.$$

Nhận xét 1.3.11. i) Khi $\lambda = 1$, ta thường viết $J^A = J_1^A$.

ii) Theo Mệnh đề 1.3.9, nếu A là toán tử đơn điệu cực đại, thì $J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-1}$ là đơn trị và xác định trên toàn bộ $\mathcal{H}$.

Mệnh đề 1.3.12 (xem [12], trang 335)**.** *Cho $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là một ánh xạ. Khi đó T là không giãn vững nếu và chỉ nếu T là toán tử giải của một toán tử đơn điệu cực đại $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.*

Mệnh đề 1.3.13 (xem [12], trang 345)**.** *Cho $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là một toán tử đơn điệu, và λ là một số thực dương. Khi đó* $\mathrm{Fix}(J_\lambda^A) = \mathrm{Zer}(A)$.

Mệnh đề 1.3.14 (xem [12], trang 345)**.** *Cho $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là một toán tử đơn điệu cực đại. Khi đó* $\mathrm{Zer}(A)$ *là tập lồi và đóng.*

Nhận xét 1.3.15. i) Nếu $A = I - T$, với T là ánh xạ không giãn thì tập không điểm của A chính là tập điểm bất động của T.

ii) Nếu $A = \partial f$ với f là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới thì tập không điểm của A chính là tập điểm cực tiểu của f.

Một lớp ánh xạ quan trọng khác trong giải tích và tối ưu là ánh xạ đơn điệu mạnh ngược, được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 1.3.16 (xem [12], trang 60)**.** Cho C là tập con khác rỗng của $\mathcal{H}$ và β là một hằng số dương. Ánh xạ $T : C \to \mathcal{H}$ được gọi là *β-đơn điệu mạnh ngược* nếu βT là ánh xạ không giãn vững, tức là

$$\langle x - y,\, T(x) - T(y)\rangle \geq \beta\|T(x) - T(y)\|^2, \quad \text{với mọi } x,\, y \in C.$$

Nhận xét 1.3.17. i) Nếu T là ánh xạ β-đơn điệu mạnh ngược thì T là $\dfrac{1}{\beta}$-liên tục Lipschitz. Thật vậy, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$, ta có

$$\begin{aligned}\beta\|T(x) - T(y)\|^2 &\leq \langle x - y,\, T(x) - T(y)\rangle \\ &\leq \|x - y\|\|T(x) - T(y)\|.\end{aligned}$$

Do đó,

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \frac{1}{\beta}\|x - y\|.$$

ii) Giả sử $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là ánh xạ không giãn. Khi đó, ánh xạ $I - S$ là $\dfrac{1}{2}$-đơn điệu mạnh ngược. Thật vậy, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$, vì S là ánh xạ không giãn nên

$$\|S(x) - S(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned}\langle x - y,\, (I - S)(x) - (I - S)(y)\rangle &= \|x - y\|^2 - \langle x - y,\, S(x) - S(y)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\|x - y\|^2 - \frac{1}{2}\|S(x) - S(y)\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\|(I - S)(x) - (I - S)(y)\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\|(I - S)(x) - (I - S)(y)\|^2.\end{aligned}$$

1.4 Bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert

Bài toán bất đẳng thức biến phân là một mô hình toán học quan trọng với nhiều ứng dụng trong tối ưu hóa và các lĩnh vực liên quan.

Định nghĩa 1.4.1 (xem [1], trang 127)**.** Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$ và $F : C \to \mathcal{H}$ là một ánh xạ xác định trên C. *Bài toán bất đẳng thức biến phân* (*Variational Inequality Problem*), viết tắt là (VIP), có dạng:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*),\, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{với mọi } x \in C. \tag{VIP}$$

Tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP) được ký hiệu là $Sol(\text{VIP}(F, C))$. Ánh xạ F và tập C tương ứng được gọi là ánh xạ giá (ánh xạ mục tiêu) và miền ràng buộc (miền chấp nhận được) của bài toán.

Các mệnh đề sau đây trình bày về điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP).

Mệnh đề 1.4.2 (xem [1], trang 131)**.** *Cho C là tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert $\mathcal{H}$, $F : C \to \mathcal{H}$ là một ánh xạ đơn điệu và liên tục. Khi đó $x \in Sol(\,VIP(F, C))$ khi và chỉ khi*

$$x \in C : \quad \langle F(y),\ y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

Mệnh đề 1.4.3 (xem [39], trang 13)**.** *Cho C là tập con lồi, đóng, bị chặn và khác rỗng của không gian Hilbert $\mathcal{H}$, $F : C \to \mathcal{H}$ là một ánh xạ đơn điệu và liên tục. Khi đó, bài toán* (VIP) *có nghiệm.*

Mệnh đề 1.4.4 (xem [39], trang 14)**.** *Cho C là tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert $\mathcal{H}$, $F : C \to \mathcal{H}$ là một ánh xạ đơn điệu, bức và liên tục. Khi đó, bài toán* (VIP) *có nghiệm.*

Mối liên hệ giữa bài toán bất đẳng thức biến phân với bài toán điểm bất động được nêu trong mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1.4.5 (xem [1], trang 129)**.** *Giả sử C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$. Khi đó x^* là nghiệm của Bài toán* (VIP) *nếu và chỉ nếu với mỗi $\lambda > 0$, x^* là điểm bất động của toán tử $P_C(I - \lambda F) : C \to C$, tức là*

$$x^* = P_C(x^* - \lambda F(x^*)).$$

Ví dụ 1.4.6. Xét hàm mục tiêu

$$f(x) = \frac{1}{2}\|x - a\|^2, \quad \text{với } a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

và tập ràng buộc

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\right\}.$$

Bài toán bất đẳng thức biến phân tương ứng là:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle x^* - a, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{với mọi } x \in C.$$

Vì $f(x)$ là hàm lồi khả vi với gradient $\nabla f(x) = x - a$ nên bài toán trên chính là bài toán tối ưu lồi:

$$\min_{x \in C} f(x) = \min_{x \in C} \frac{1}{2}\|x - a\|^2.$$

Do đó, nghiệm x^* chính là phép chiếu mêtric của a lên tập C, tức là:

$$x^* = P_C(a).$$

Khi chiếu a lên C, ta thu được nghiệm $x^* = (1, 0)$.

1.5 Một số bổ đề bổ trợ

Trước hết, chúng tôi nhắc lại một số đẳng thức và bất đẳng thức cơ bản trong không gian Hilbert, được sử dụng trong chứng minh các kết quả của luận án.

Mệnh đề 1.5.1 (xem [12], trang 29)**.** *Trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$, cho $x, y \in \mathcal{H}$. Khi đó, ta có các khẳng định sau:*

i) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$ *(Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz);*

ii) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$;

iii) $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$.

Các bổ đề sau đây được dùng trong chứng minh các kết quả chính của luận án.

Bổ đề 1.5.2 (xem [8], trang 55)**.** *Nếu $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là một toán tử đơn điệu, h-liên tục và bức thì $R(A) = \mathcal{H}$.*

Bổ đề 1.5.3 (xem [8], trang 64)**.** *Nếu $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là toán tử đơn điệu cực đại và $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là toán tử liên tục Lipschitz trên $\mathcal{H}$, thì khi đó $F + T$ là toán tử đơn điệu cực đại. Nếu $F + T$ là bức thì $R(F + T) = \mathcal{H}$.*

Bổ đề 1.5.4. *Nếu $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là toán tử γ-đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}$, thì tập hợp*

$$S = \{x \in \mathcal{H} \mid A(x) = f\}$$

với mọi $f \in R(A)$ là tập lồi và đóng trong $\mathcal{H}$.

Chứng minh. Vì $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là toán tử γ-đơn điệu mạnh ngược nên theo Nhận xét 1.3.17 ta có A là $\dfrac{1}{\gamma}$-liên tục Lipschitz. Xét một dãy $\{x_n\} \subset S$, tức là

$$A(x_n) = f, \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N},$$

và giả sử $x_n \to x$. Khi đó, ta có $A(x_n) \to A(x)$ nhờ tính liên tục của A. Suy ra $A(x) = f$. Do đó $x \in S$. Như vậy, S là tập đóng trong $\mathcal{H}$.

Tiếp theo, ta chứng minh tính lồi của S. Thật vậy, với mọi $x \in S,\ y \in S$, tức là $A(x) = f,\ A(y) = f$ và $\lambda \in [0, 1]$, đặt $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, ta có

$$\|A(z) - f\| = \|A(z) - A(x)\| = \|A(z) - A(y)\|.$$

Từ tính đơn điệu mạnh ngược của A suy ra

$$\lambda\|A(z) - f\|^2 \le \frac{1}{\gamma}\langle A(z) - A(x), \lambda(z - x)\rangle,$$
$$(1 - \lambda)\|A(z) - f\|^2 \le \frac{1}{\gamma}\langle A(z) - A(y), (1 - \lambda)(z - y)\rangle.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên, ta được

$$\|A(z) - f\|^2 \leq \frac{1}{\gamma}\langle A(z) - f,\, z - (\lambda x + (1-\lambda)y)\rangle = 0,$$

suy ra $A(z) = f$. Do đó $z \in S$. Như vậy S là tập lồi trong $\mathcal{H}$.

Vậy, S là tập lồi và đóng trong $\mathcal{H}$. □

Bổ đề 1.5.5. *Cho $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}_i, i = 1, 2, \ldots, N$, là các không gian Hilbert thực. $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ và $A_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các toán tử đơn điệu mạnh ngược với hệ số γ và γ_i, tương ứng. $T_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các toán tử tuyến tính bị chặn. Đặt $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ được xác định bởi*

$$F(x) = A(x) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i(T_i(x))),$$

với mọi $x \in \mathcal{H}$ và $T_i^* : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}$ là toán tử liên hợp của toán tử T_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. Khi đó ta có các khẳng định sau:

i) F là một toán tử đơn điệu và liên tục Lipschitz;

ii) Toán tử $I + F$ là một song ánh.

Chứng minh. Ta cần chứng minh rằng với bất kỳ $u \in \mathcal{H}$, phương trình $(F + I)(x) = u$ có nghiệm duy nhất.

Trước tiên ta chứng minh rằng F là toán tử đơn điệu và liên tục Lipschitz. Thật vậy, với bất kỳ $x, y \in \mathcal{H}$, ta có

$$\begin{aligned}
&\langle x - y, F(x) - F(y)\rangle \\
&= \langle x - y, A(x) - A(y)\rangle + \sum_{i=1}^{N}\langle x - y, T_i^*(A_i(T_i(x))) - T_i^*(A_i(T_i(y)))\rangle \\
&= \langle x - y, A(x) - A(y)\rangle + \sum_{i=1}^{N}\langle T_i(x) - T_i(y), A_i(T_i(x)) - A_i(T_i(y))\rangle \\
&\geq \gamma\|A(x) - A(y)\|^2 + \sum_{i=1}^{N}\gamma_i\|A_i(T_i(x)) - A_i(T_i(y))\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Do đó, F là toán tử đơn điệu từ $\mathcal{H}$ vào $\mathcal{H}$. Theo Nhận xét 1.3.17, các toán tử A và A_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ lần lượt là $\dfrac{1}{\gamma}$- và $\dfrac{1}{\gamma_i}$-liên tục Lipschitz. Do đó, ta có

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^{N}(T_i^*(A_i(T_i(x))) - T_i^*(A_i(T_i(y))))\| &\leq \sum_{i=1}^{N}\|T_i^*(A_i(T_i(x))) - T_i^*(A_i(T_i(y)))\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N}\|T_i^*\|\|A_i(T_i(x)) - A_i(T_i(y))\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N}\frac{\|T_i\|^2}{\gamma_i}\|x - y\|. \qquad (1.4)\end{aligned}$$

Từ (1.4) ta được

$$\begin{aligned}\|F(x) - F(y)\| &\leq \|A(x) - A(y)\| + \sum_{i=1}^{N}\|T_i^*(A_i(T_i(x))) - T_i^*(A_i(T_i(y)))\| \\ &\leq \left(\frac{1}{\gamma} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\|T_i\|^2}{\gamma_i}\right)\|x - y\|.\end{aligned}$$

Do đó, F là L-liên tục Lipschitz với $L = \dfrac{1}{\gamma} + \sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{\|T_i\|^2}{\gamma_i}$.

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra $F + I$ là bức. Thật vậy, với mọi $x \in \mathcal{H}$ ta có

$$\begin{aligned}\langle (F+I)(x), x\rangle &= \langle A(x), x\rangle + \sum_{i=1}^{N}\langle T_i^*(A_i(T_i(x))), x\rangle + \|x\|^2 \\ &= \langle A(x), x\rangle + \sum_{i=1}^{N}\langle A_i(T_i(x)), T_i(x)\rangle + \|x\|^2 \\ &= \langle A(x) - A(0), x\rangle + \langle A(0), x\rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N}\langle A_i(T_i(x)) - A_i(0), T_i(x)\rangle + \sum_{i=1}^{N}\langle A_i(0), T_i(x)\rangle + \|x\|^2 \\ &\geq \langle A(0), x\rangle + \sum_{i=1}^{N}\langle A_i(0), T_i(x)\rangle + \|x\|^2 \\ &\geq \|x\|^2 - \|A(0)\|\|x\| - \sum_{i=1}^{N}\|A_i(0)\|\|T_i\|\|x\|.\end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$\frac{\langle (F+I)(x), x\rangle}{\|x\|} \geq \|x\| - \|A(0)\| - \sum_{i=1}^{N} \|A_i(0)\|\|T_i\|.$$

Điều này kéo theo

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\langle (F+I)(x), x\rangle}{\|x\|} = \infty,$$

tức là $F+I$ là bức. Do đó, theo Bổ đề 1.5.3 thì $R(F+I) = \mathcal{H}$, vì vậy phương trình $(F+I)(x) = u$ luôn có nghiệm.

Cuối cùng, chúng tôi chứng minh phương trình $(F+I)(x) = u$ có nghiệm duy nhất. Thật vậy, giả sử y cũng là nghiệm của phương trình $(F+I)(x) = u$. Khi đó, ta có

$$F(x) - F(y) + x - y = 0.$$

Do tính đơn điệu của F, nên

$$\begin{aligned} 0 &= \langle F(x) - F(y) + x - y, x - y\rangle \\ &= \langle F(x) - F(y), x - y\rangle + \|x - y\|^2 \\ &\geq \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Do đó, $x = y$. □

Bổ đề 1.5.6 (xem [60], trang 745)**.** *Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực dương, $\{b_n\}$ là một dãy số thực, và $\{\sigma_n\}$ là một dãy số thuộc $(0,1)$ thỏa mãn $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \infty$. Giả sử*

$$a_{n+1} \leq (1-\sigma_n)a_n + \sigma_n b_n \ \ \forall n \geq 1.$$

Nếu $\limsup_{k\to\infty} b_{n_k} \leq 0$ với mọi dãy con $\{a_{n_k}\}$ của $\{a_n\}$ thỏa mãn $\liminf_{k\to\infty}(a_{n_k+1} - a_{n_k}) \geq 0$, thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bổ đề 1.5.7 (xem [13] - Định lý Baillon-Haddad)**.** *Cho $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ là hàm lồi khả vi Fréchet và β là một số thực dương. Khi đó ∇f là β-liên tục Lipschitz nếu và chỉ nếu ∇f là $1/\beta$-đơn điệu mạnh ngược.*

KẾT LUẬN CHƯƠNG 1

Trong chương này, chúng tôi đã trình bày một số kiến thức nền tảng liên quan đến không gian Hilbert, bao gồm các khái niệm về hội tụ mạnh, hội tụ yếu, toán tử tuyến tính bị chặn, toán tử liên hợp, cùng với các yếu tố giải tích của hàm lồi và dưới vi phân của hàm lồi. Các lớp ánh xạ đặc biệt như ánh xạ liên tục Lipschitz, ánh xạ h-liên tục và phép chiếu mêtric cũng được giới thiệu, phục vụ cho việc phân tích các thuật toán lặp trong các chương sau.

Bên cạnh đó, chương này đã trình bày những khái niệm trọng tâm của lý thuyết toán tử đơn điệu và mô hình tổng quát của bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert. Cuối cùng, một số bổ đề kỹ thuật cần thiết đã được đưa ra để hỗ trợ cho việc thiết lập và chứng minh các kết quả chính trong các chương sau.

Các chương tiếp theo chúng tôi sẽ xây dựng các thuật toán, phương pháp lặp để giải bài toán (SCSP-MOE) và một số bài toán liên quan.

Chương 2

Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov giải bài toán (SCSP-MOE)

Trong chương này, dựa trên phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, chúng tôi đề xuất hai thuật toán xấp xỉ nghiệm cho bài toán (SCSP-MOE). Hai thuật toán này tương ứng với phương pháp lặp ẩn và phương pháp lặp hiện, đồng thời đều bảo đảm hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán. Ngoài ra, chúng tôi khảo sát tính ổn định của nghiệm xấp xỉ khi dữ liệu đầu vào bị nhiễu. Phần cuối chương trình bày một số ứng dụng và đưa ra các ví dụ số để minh họa tính hiệu quả của các phương pháp được đề xuất. Các kết quả của chương này được trình bày dựa trên nội dung của bài báo (CT2).

2.1 Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov ẩn

Xét bài toán (SCSP-MOE) với các giả thiết sau:

(H1) $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$ là các không gian Hilbert thực;
$f \in \mathcal{H}$ và $f_i \in \mathcal{H}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$ là các phần tử cho trước.

(H2) $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là một toán tử γ-đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}$;
$A_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$ là các toán tử γ_i-đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}_i$.

(H3) $T_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$ là các toán tử tuyến tính bị chặn, với toán tử liên hợp tương ứng là $T_i^* : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}$.

(H4) $\Omega = \Omega_A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{N} \Omega_{A_i} \right) \neq \emptyset$, trong đó

$$\Omega_A = \{x \in \mathcal{H} \mid A(x) = f\},$$
$$\Omega_{A_i} = \{x \in \mathcal{H} \mid A_i(T_i(x)) = f_i\}, \text{ với mọi } i = 1, 2, \ldots, N.$$

Bài toán yêu cầu tìm một phần tử $x \in \Omega$.

Trên cơ sở phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov cổ điển đã được trình bày trong phần mở đầu, chúng tôi đề xuất thuật toán với dãy lặp được xây dựng theo phương pháp lặp ẩn, trong đó sử dụng toán tử hiệu chỉnh $S(x)$ để giải bài toán (SCSP-MOE) dưới các giả thiết (H1) – (H4) và các điều kiện sau:

(P1) $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là toán tử β-đơn điệu mạnh và h-liên tục trên $\mathcal{H}$;

(P2) $\{\alpha_n\}$ là dãy số thực dương thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Thuật toán 2.1.1 Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov ẩn

Dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi phương trình

$$A(x_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^* \big(A_i(T_i(x_n))\big) + \alpha_n S(x_n) = f + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i). \tag{2.1}$$

Mệnh đề sau đây chỉ ra sự tồn tại của dãy lặp $\{x_n\}$ được xây dựng trong Thuật toán 2.1.1.

Mệnh đề 2.1.2. *Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, phương trình (2.1) có nghiệm duy nhất x_n.*

Chứng minh. Với mỗi $x \in \mathcal{H}$, đặt $U_{\alpha_n} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ bởi

$$U_{\alpha_n}(x) = A(x) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i(T_i(x))) + \alpha_n S(x).$$

Từ giả thiết (H2), (H3) và Bổ đề 1.5.5 ta có $V = A + \sum_{i=1}^{N} T_i^* A_i T_i$ là một toán tử đơn điệu và liên tục Lipschitz.

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra U_{α_n} là một toán tử $\alpha_n\beta$-đơn điệu mạnh và bức. Thật vậy, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$, ta có

$$\begin{aligned}\langle U_{\alpha_n}(x) - U_{\alpha_n}(y),\, x-y\rangle &= \langle V(x) - V(y) + \alpha_n(S(x)-S(y)),\, x-y\rangle \\ &= \langle V(x)-V(y),\, x-y\rangle + \alpha_n\langle S(x)-S(y),\, x-y\rangle \\ &\geq \alpha_n\beta\|x-y\|^2.\end{aligned}$$

Hơn nữa, chọn $y = 0$ ta được

$$\langle U_{\alpha_n}(x),\, x\rangle \geq \alpha_n\beta\|x\|^2 + \langle U_{\alpha_n}(0),\, x\rangle \geq \alpha_n\beta\|x\|^2 - \|U_{\alpha_n}(0)\|\,\|x\|.$$

Do đó, ta suy ra

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\langle U_{\alpha_n}(x),\, x\rangle}{\|x\|} \geq \lim_{\|x\|\to\infty} \big(\alpha_n\beta\|x\| - \|U_{\alpha_n}(0)\|\big) = \infty.$$

Vì V là toán tử liên tục Lipschitz và S là h-liên tục nên U_{α_n} là một toán tử h-liên tục. Theo Bổ đề 1.5.2, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $x_n \in \mathcal{H}$ thỏa mãn phương trình (2.1).

Giả sử rằng $\bar{x}_n$ cũng là một nghiệm của phương trình (2.1). Khi đó, từ tính đơn điệu mạnh của U_{α_n}, ta suy ra

$$0 = \langle U_{\alpha_n}(\bar{x}_n) - U_{\alpha_n}(x_n),\, \bar{x}_n - x_n\rangle \geq \alpha_n\beta\|\bar{x}_n - x_n\|^2.$$

Điều này kéo theo $\bar{x}_n = x_n$. Tức là, phương trình (2.1) có nghiệm duy nhất.

Mệnh đề được chứng minh. □

Sự hội tụ của dãy lặp được xây dựng trong Thuật toán 2.1.1 được chỉ ra trong định lý sau.

Định lý 2.1.3. *Dãy $\{x_n\}$ được tạo bởi Thuật toán 2.1.1 hội tụ mạnh đến $x^* \in \Omega$. Hơn nữa, x^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân*

$$\langle S(x^*),\, q - x^*\rangle \geq 0, \quad \forall q \in \Omega. \tag{2.2}$$

Chứng minh. Định lý 2.1.3 được chứng minh qua các bước sau đây.

Bước 1. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ tạo bởi Thuật toán 2.1.1 là bị chặn.

Thật vậy, với mọi $p \in \Omega$, ta có

$$\left\langle A(x_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i(T_i(x_n))) + \alpha_n S(x_n) - f - \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i),\ x_n - p \right\rangle = 0.$$

Điều này kéo theo

$$\langle A(x_n) - f,\ x_n - p\rangle + \sum_{i=1}^{N} \langle A_i(T_i(x_n)) - f_i,\ T_i(x_n) - T_i(p)\rangle + \langle \alpha_n S(x_n),\ x_n - p\rangle = 0.$$

Phương trình trên tương đương với

$$\begin{aligned} &\langle A(x_n) - A(p),\ x_n - p\rangle + \sum_{i=1}^{N} \langle A_i(T_i(x_n)) - A_i(T_i(p)),\ T_i(x_n) - T_i(p)\rangle \\ &+ \alpha_n \langle S(x_n) - S(p),\ x_n - p\rangle = -\alpha_n \langle S(p),\ x_n - p\rangle. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Từ (H2) và (P1), ta có

$$\beta\alpha_n \|x_n - p\|^2 \leq -\alpha_n \langle S(p),\ x_n - p\rangle.$$

Vì $\beta > 0$ và $\alpha_n > 0$, ta suy ra $\|x_n - p\| \leq \dfrac{1}{\beta}\|S(p)\|$. Điều này chứng tỏ rằng dãy $\{x_n\}$ bị chặn.

Bước 2. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ có dãy con hội tụ yếu tới một phần tử của Ω.

Thật vậy, với mọi $p \in \Omega$, từ (2.3) ta có

$$\begin{aligned} &\gamma\|A(x_n) - A(p)\|^2 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \|A_i(T_i(x_n)) - A_i(T_i(p))\|^2 + \alpha_n\beta\|x_n - p\|^2 \\ &\leq \langle A(x_n) - A(p),\ x_n - p\rangle + \sum_{i=1}^{N} \langle A_i(T_i(x_n)) - A_i(T_i(p)),\ T_i(x_n) - T_i(p)\rangle \\ &\quad + \alpha_n \langle S(x_n) - S(p),\ x_n - p\rangle \\ &= \alpha_n \langle S(p),\ p - x_n\rangle. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Vì dãy $\{x_n\}$ bị chặn và $\alpha_n \to 0$, ta suy ra rằng

$$\gamma\|A(x_n) - A(p)\|^2 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \|A_i(T_i(x_n)) - A_i(T_i(p))\|^2 \to 0.$$

Do đó, ta có

$$\|A(x_n) - A(p)\| = \|A(x_n) - f\| \to 0, \tag{2.5}$$

$$\|A_i(T_i(x_n)) - A_i(T_i(p))\| = \|A_i(T_i(x_n)) - f_i\| \to 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.6}$$

Mặt khác, vì dãy $\{x_n\}$ bị chặn nên tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ yếu. Giả sử $x_{n_k} \rightharpoonup \overline{x}$. Ta sẽ chỉ ra $\overline{x} \in \Omega$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma\|A(x_{n_k}) - A(\overline{x})\|^2 \leq \langle A(x_{n_k}) - A(\overline{x}),\, x_{n_k} - \overline{x}\rangle \\ &= \langle A(x_{n_k}) - f,\, x_{n_k} - \overline{x}\rangle + \langle f - A(\overline{x}),\, x_{n_k} - \overline{x}\rangle \\ &\leq \|A(x_{n_k}) - f\|\,\|x_{n_k} - \overline{x}\| + \langle f - A(\overline{x}),\, x_{n_k} - \overline{x}\rangle \\ &\leq K\|A(x_{n_k}) - f\| + \langle f - A(\overline{x}),\, x_{n_k} - \overline{x}\rangle. \end{aligned} \tag{2.7}$$

với $K = \sup_k \|x_{n_k} - \overline{x}\|$. Trong (2.7), cho $k \to \infty$, từ giả thiết $x_{n_k} \rightharpoonup \overline{x}$ ta thu được

$$\|A(x_{n_k}) - A(\overline{x})\| \to 0.$$

Kết hợp với (2.5), ta suy ra rằng $A(\overline{x}) = f$. Điều này có nghĩa là $\overline{x} \in \Omega_A$. Bằng cách lập luận tương tự như trên và sử dụng (2.6), ta cũng thu được $\overline{x} \in \Omega_{A_i}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, N$. Do đó, $\overline{x} \in \Omega$.

Bước 3. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới x^*, với x^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (2.2).

Giả sử $\{x_{n_l}\}$ là dãy con của $\{x_n\}$, hội tụ yếu tới một phần tử x^* nào đó. Theo chứng minh trong Bước 2 thì $x^* \in \Omega$. Sử dụng (2.4) và lưu ý rằng $\alpha_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$\langle S(q),\, q - x_{n_l}\rangle \geq 0, \quad \forall q \in \Omega. \tag{2.8}$$

Từ bất đẳng thức (2.8), cho $l \to \infty$, ta thu được

$$\langle S(q),\, q - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall q \in \Omega. \tag{2.9}$$

Theo Bổ đề 1.5.4 thì Ω là tập lồi nên $z_t = tq + (1-t)x^* \in \Omega$ với mọi $t \in (0,1)$. Do đó, từ (2.9) ta có

$$\langle S(tq + (1-t)x^*),\, tq + (1-t)x^* - x^* \rangle \geq 0,$$

với mọi $t \in (0,1)$. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\langle S(x^* + t(q - x^*),\, q - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall t \in (0,1).$$

Do S là h-liên tục nên khi cho $t \to 0^+$, ta thu được

$$\langle S(x^*),\, q - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall q \in \Omega,$$

tức là x^* là nghiệm của bất đẳng thức biến phân (2.2).

Tiếp theo, ta chứng minh tính duy nhất của x^*. Thật vậy, giả sử y^* cũng là một nghiệm của bất đẳng thức biến phân (2.2). Khi đó, ta có

$$\langle S(x^*),\, q - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall q \in \Omega, \tag{2.10}$$

$$\langle S(y^*),\, q - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall q \in \Omega. \tag{2.11}$$

Trong (2.10) và (2.11), thay q lần lượt bởi y^* và x^*, ta suy ra

$$\langle S(x^*) - S(y^*),\, x^* - y^* \rangle \leq 0.$$

Vì S là toán tử β-đơn điệu mạnh nên ta có

$$\beta \|x^* - y^*\|^2 \leq 0.$$

Do đó $x^* = y^*$. Vì vậy, bất đẳng thức biến phân (2.2) có nghiệm duy nhất. Tính duy nhất của x^* kéo theo $x_n \rightharpoonup x^*$ khi $n \to \infty$.

Mặt khác, trong (2.4), thay p bởi x^*, ta được

$$0 \leq \|x_n - x^*\|^2 \leq \frac{\langle S(x^*),\, x^* - x_n\rangle}{\beta}.$$

Từ đó, cho $n \to \infty$ và sử dụng $x_n \rightharpoonup x^*$, ta suy ra $x_n \to x^*$.
Định lý được chứng minh. □

2.2 Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov hiện

Trong phần này chúng tôi xây dựng một phương pháp lặp hiện dựa trên phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov để giải bài toán (SCSP-MOE) với các giả thiết từ (H1) đến (H4) và các điều kiện sau:

(P1*) $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là toán tử β-đơn điệu mạnh và L-liên tục Lipschitz trên $\mathcal{H}$.

(P2*) $\{\alpha_n\}$ và $\{\theta_n\}$ là các dãy số thực dương, thỏa mãn:

(i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n\alpha_n = \infty$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\theta_n}{\alpha_n} = 0$,

(iv) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{\theta_n\alpha_n^2} = 0.$

Thuật toán 2.2.1 Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov hiện

1: Chọn điểm đầu $y_1 \in \mathcal{H}$ tùy ý.

2: **for** $n = 1, 2, \ldots$ **do**

3: Tính

$$F_{\alpha_n}(y_n) = A(y_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*\big(A_i(T_i(y_n))\big) + \alpha_n S(y_n) - f - \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i).$$

4: Cập nhật

$$y_{n+1} = y_n - \theta_n F_{\alpha_n}(y_n). \tag{2.12}$$

5: **end for**

Trước khi phát biểu định lý hội tụ chính, chúng tôi đưa ra một chú ý về toán tử F_{α_n} được xây dựng trong công thức lặp (2.12), nhằm phục vụ cho việc phân tích sự hội tụ của dãy lặp được tạo bởi Thuật toán 2.2.1.

Chú ý 2.2.2. Với mỗi $x \in \mathcal{H}$, toán tử $F_{\alpha_n} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ được định nghĩa bởi

$$F_{\alpha_n}(x) = A(x) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i(T_i(x))) + \alpha_n S(x) - f - \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i),$$

là toán tử $\alpha_n\beta$-đơn điệu mạnh và L_F-liên tục Lipschitz, với

$$L_F = \frac{1}{\gamma} + \sum_{i=1}^{N} \|T_i\|^2 \frac{1}{\gamma_i} + \alpha_n L.$$

Thật vậy, sử dụng các kết quả trong Mệnh đề 2.1.2, ta có

$$\langle F_{\alpha_n}(x) - F_{\alpha_n}(y),\, x - y\rangle \geq \alpha_n\beta\|x - y\|^2$$

và

$$\begin{aligned}
\|F_{\alpha_n}(x) - F_{\alpha_n}(y)\| &\leq \frac{1}{\gamma}\|x - y\| + \sum_{i=1}^{N} \|T_i\|^2 \frac{1}{\gamma_i}\|x - y\| + \alpha_n L\|x - y\| \\
&= \left(\frac{1}{\gamma} + \sum_{i=1}^{N} \|T_i\|^2 \frac{1}{\gamma_i} + \alpha_n L\right) \|x - y\| \\
&= L_F\|x - y\|.
\end{aligned}$$

Tiếp theo, chúng tôi chứng minh mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.2.3. *Toán tử $G_n = I - \theta_n F_{\alpha_n}$ là một ánh xạ co với hệ số co*

$$\tau_n = \sqrt{1 - 2\theta_n\alpha_n\beta + \theta_n^2 L_F^2},$$

khi n đủ lớn.

Chứng minh. Từ điều kiện (P2*)(iii), ta có

$$\frac{\theta_n}{\alpha_n} < \frac{2\beta}{L_F^2},$$

khi n đủ lớn. Từ đó, ta suy ra $\theta_n \in (0, 2\alpha_n\beta/L_F^2)$.
Với mọi $x, y \in \mathcal{H}$, ta có

$$\begin{aligned}\|G_n(x) - G_n(y)\|^2 &= \|(I - \theta_n F_{\alpha_n})(x) - (I - \theta_n F_{\alpha_n})(y)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2\theta_n\langle F_{\alpha_n}(x) - F_{\alpha_n}(y),\, x - y\rangle \\ &\quad + \theta_n^2\|F_{\alpha_n}(x) - F_{\alpha_n}(y)\|^2. \qquad (2.13)\end{aligned}$$

Từ Chú ý 2.2.2 và (2.13), ta có

$$\|G_n(x) - G_n(y)\|^2 \le \left(1 - 2\theta_n\alpha_n\beta + \theta_n^2 L_F^2\right)\|x - y\|^2.$$

Do đó,

$$\|G_n(x) - G_n(y)\| \le \sqrt{1 - 2\theta_n\alpha_n\beta + \theta_n^2 L_F^2}\,\|x - y\| = \tau_n\|x - y\|.$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Sự hội tụ mạnh của dãy $\{y_n\}$ được xây dựng theo công thức lặp hiện (2.12) đến nghiệm của bài toán (SCSP-MOE) được trình bày trong định lý sau.

Định lý 2.2.4. *Dãy $\{y_n\}$ được xây dựng trong Thuật toán 2.2.1 hội tụ mạnh tới $x^* \in \Omega$. Hơn nữa, x^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân* (2.2).

Chứng minh. Định lý được chứng minh qua các bước sau đây.
Bước 1. Chứng minh dãy $\{y_n\}$ bị chặn.
Thật vậy, lấy bất kỳ $p \in \Omega$, khi đó $F_{\alpha_n}(p) = \alpha_n S(p)$. Ta có

$$\begin{aligned}\|y_{n+1} - p\| &= \|(y_n - \theta_n F_{\alpha_n}(y_n)) - p\| \\ &= \|(I - \theta_n F_{\alpha_n})(y_n) - (I - \theta_n F_{\alpha_n})(p) - \theta_n F_{\alpha_n}(p)\| \\ &\le \|(I - \theta_n F_{\alpha_n})(y_n) - (I - \theta_n F_{\alpha_n})(p)\| + \theta_n\|F_{\alpha_n}(p)\|.\end{aligned}$$

Từ Mệnh đề 2.2.3, ta có

$$\begin{aligned}\|y_{n+1}-p\| &\leq \tau_n\|y_n-p\|+\theta_n\alpha_n\|S(p)\| \\ &= \tau_n\|y_n-p\|+(1-\tau_n)\,\frac{\theta_n\alpha_n}{1-\tau_n}\,\|S(p)\|. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Mặt khác, ta có thể thấy rằng

$$\frac{\theta_n\alpha_n}{1-\tau_n}=\frac{\theta_n\alpha_n(1+\tau_n)}{1-\tau_n^2}=\frac{\theta_n\alpha_n(1+\tau_n)}{2\theta_n\alpha_n\beta-\theta_n^2L_F^2}=\frac{\alpha_n(1+\tau_n)}{2\alpha_n\beta-\theta_nL_F^2}=\frac{1+\tau_n}{2\beta-\dfrac{\theta_n}{\alpha_n}L_F^2}. \tag{2.15}$$

Từ (2.15), định nghĩa τ_n và điều kiện (P2*)(iii) cho ta giới hạn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n\alpha_n}{1-\tau_n}=\frac{1}{\beta}>0.$$

Từ đó, ta suy ra tồn tại $K_1=\sup_n\dfrac{\theta_n\alpha_n}{1-\tau_n}>0$. Từ (2.14), ta có

$$\begin{aligned}\|y_{n+1}-p\| &\leq \tau_n\|y_n-p\|+(1-\tau_n)K_1\|S(p)\| \\ &\leq \max\{\|y_n-p\|,\,K_1\|S(p)\|\} \\ &\;\;\vdots \\ &\leq \max\{\|y_1-p\|,\,K_1\|S(p)\|\}.\end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là dãy $\{y_n\}$ bị chặn.

Bước 2. Chứng minh dãy $\{y_n\}$ hội tụ mạnh tới $x^*\in\Omega$. Hơn nữa, x^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (2.2).

Giả sử x_n được xác định bởi (2.1). Rõ ràng $F_{\alpha_n}(x_n)=0$. Vì S cũng là một toán tử h-liên tục nên từ Định lý 2.1.3, ta có $x_n\to x^*\in\Omega$ và x^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (2.2). Do đó, ta chỉ cần chứng minh rằng $\|y_n-x_n\|\to 0$.
Áp dụng bất đẳng thức

$$\|a\|^2\leq\|b\|^2+2\langle a,\,a-b\rangle,\quad\forall a,b\in\mathcal{H},$$

ta có

$$\begin{aligned}\|y_{n+1}-x_{n+1}\|^2 &\le \|y_{n+1}-x_n\|^2 + 2\langle y_{n+1}-x_{n+1},\, x_n-x_{n+1}\rangle\\ &\le \|y_n-x_n\|^2 + 2\langle y_{n+1}-x_n,\, y_{n+1}-y_n\rangle\\ &\quad + 2\langle y_{n+1}-x_{n+1},\, x_n-x_{n+1}\rangle\\ &\le \|y_n-x_n\|^2 + 2\|y_{n+1}-x_{n+1}\|\|x_n-x_{n+1}\|\\ &\quad + 2\langle y_{n+1}-x_n,\, y_{n+1}-y_n\rangle. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ngoài ra, ta có đánh giá sau

$$\|y_{n+1}-x_{n+1}\| \le \|y_{n+1}\| + \|x_{n+1}\| \le K_2, \text{ với } K_2 = \sup_n\{\|y_{n+1}\| + \|x_{n+1}\|\}. \tag{2.17}$$

Hơn nữa, vì $F_{\alpha_n}(x_n) = 0$ và F_{α_n} là $\alpha_n\beta$-đơn điệu mạnh nên ta có

$$\begin{aligned}\langle y_{n+1}-x_n,\, y_{n+1}-y_n\rangle &= \langle y_n-\theta_n F_{\alpha_n}(y_n)-x_n,\, y_n-\theta_n F_{\alpha_n}(y_n)-y_n\rangle\\ &= -\theta_n\langle y_n-x_n-\theta_n F_{\alpha_n}(y_n),\, F_{\alpha_n}(y_n)\rangle\\ &= -\theta_n\langle y_n-x_n,\, F_{\alpha_n}(y_n)\rangle + \theta_n^2\|F_{\alpha_n}(y_n)\|^2\\ &= -\theta_n\langle y_n-x_n,\, F_{\alpha_n}(y_n)-F_{\alpha_n}(x_n)\rangle + \theta_n^2\|F_{\alpha_n}(y_n)\|^2\\ &\le -\theta_n\alpha_n\beta\|y_n-x_n\|^2 + \theta_n^2\|F_{\alpha_n}(y_n)\|^2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Mặt khác, vì $\{y_n\}$ bị chặn và F_{α_n} là một toán tử liên tục Lipschitz (Chú ý 2.2.2), nên dãy $\{F_{\alpha_n}(y_n)\}$ cũng bị chặn. Do đó, sử dụng (2.18), ta có

$$\langle y_{n+1}-x_n,\, y_{n+1}-y_n\rangle \le -\theta_n\alpha_n\beta\|y_n-x_n\|^2 + \theta_n^2K_3^2, \text{ với } K_3 = \sup_n\|F_{\alpha_n}(y_n)\|. \tag{2.19}$$

Ngoài ra, ta cũng có

$$\begin{aligned}0 &= \langle F_{\alpha_n}(x_n) - F_{\alpha_{n+1}}(x_{n+1}),\, x_n-x_{n+1}\rangle\\ &= \langle F_{\alpha_n}(x_n) - F_{\alpha_n}(x_{n+1}),\, x_n-x_{n+1}\rangle + \langle F_{\alpha_n}(x_{n+1}) - F_{\alpha_{n+1}}(x_{n+1}),\, x_n-x_{n+1}\rangle\\ &= \langle F_{\alpha_n}(x_n) - F_{\alpha_n}(x_{n+1}),\, x_n-x_{n+1}\rangle + (\alpha_n-\alpha_{n+1})\langle S(x_{n+1}),\, x_n-x_{n+1}\rangle\\ &\ge \alpha_n\beta\|x_n-x_{n+1}\|^2 + (\alpha_n-\alpha_{n+1})\langle S(x_{n+1}),\, x_n-x_{n+1}\rangle. \end{aligned}$$

Từ đó, ta suy ra

$$\begin{aligned}\alpha_n\beta\|x_n - x_{n+1}\|^2 &\leq (\alpha_{n+1} - \alpha_n)\langle S(x_{n+1}),\, x_n - x_{n+1}\rangle \\ &\leq |\alpha_{n+1} - \alpha_n|\, \|S(x_{n+1})\|\|x_n - x_{n+1}\|. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Hơn nữa, vì $\{y_n\}$ bị chặn và S là một toán tử liên tục Lipschitz, nên dãy $\{S(x_{n+1})\}$ cũng bị chặn. Do đó, từ (2.20) ta có

$$\|x_n - x_{n+1}\| \leq \frac{|\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{\alpha_n\beta}\, K_4, \tag{2.21}$$

trong đó $K_4 = \sup_n \|S(x_{n+1})\|$.
Từ (2.16), (2.17), (2.19) và (2.21), ta suy ra

$$\begin{aligned}\|y_{n+1} - x_{n+1}\|^2 &\leq (1 - 2\theta_n\alpha_n\beta)\|y_n - x_n\|^2 + 2K_2K_4\frac{|\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{\alpha_n\beta} + 2\theta_n^2K_3^2 \\ &= (1 - 2\theta_n\alpha_n\beta)\|y_n - x_n\|^2 + 2\theta_n\alpha_n\beta\left(K_2K_4\frac{|\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{\theta_n\alpha_n^2\beta^2} + \frac{\theta_nK_3^2}{\alpha_n\beta}\right) \\ &= (1 - \zeta_n)\|y_n - x_n\|^2 + \zeta_nc_n,\end{aligned}$$

trong đó

$$\zeta_n = 2\theta_n\alpha_n\beta, \qquad c_n = K_2K_4\frac{|\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{\theta_n\alpha_n^2\beta^2} + \frac{\theta_nK_3^2}{\alpha_n\beta}.$$

Áp dụng Bổ đề 1.5.6 với $a_n = \|y_n - x_n\|^2$, có thể thấy tất cả các điều kiện trong bổ đề này đều được thỏa mãn. Như vậy $\|y_n - x_n\| \to 0$ khi $n \to \infty$.
Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 2.2.5. Thuật toán 2.1.1 và Thuật toán 2.2.1 đều được xây dựng dựa trên phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov. Điểm khác biệt giữa hai thuật toán này là ở cách giải bài toán hiệu chỉnh. Thuật toán 2.1.1 sử dụng phương pháp ẩn, trong đó tại mỗi bước lặp cần xác định nghiệm của phương trình hiệu chỉnh (2.1) tương ứng với α_n, trong khi Thuật toán 2.2.1 sử dụng phương pháp hiện, trong đó nghiệm xấp xỉ được cập nhật trực tiếp thông qua toán tử F_{α_n}, bằng công thức lặp (2.12). Do đó, Thuật toán 2.1.1 có cấu trúc đơn giản trong phân tích lý thuyết, còn Thuật toán2.2.1 có ưu

điểm là công thức cập nhật được thực hiện trực tiếp và không yêu cầu giải phương trình hiệu chỉnh tại mỗi bước lặp.

2.3 Tính ổn định của phương pháp hiệu chỉnh

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu về tính ổn định của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov ẩn và hiệu chỉnh Tikhonov hiện khi dữ liệu đầu vào bị nhiễu bởi các điều kiện nhiễu như sau:

(L1) Các điểm $f \in \mathcal{H}$ và $f_i \in \mathcal{H}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ chỉ được cho gần đúng. Cụ thể, thay f và f_i bởi các dãy $\{f^{\delta_n}\} \subset \mathcal{H}$ và $\{f_i^{\delta_n^i}\} \subset \mathcal{H}_i$, thỏa mãn

$$\|f - f^{\delta_n}\| \leq \delta_n, \qquad \|f_i - f_i^{\delta_n^i}\| \leq \delta_n^i,$$

trong đó $\{\delta_n\}$ và $\{\delta_n^i\}$ là các dãy số thực dương.

(L2) Các toán tử A và A_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ lần lượt được thay thế bởi các toán tử $A^{h_n} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ và $A_i^{h_n^i} : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, sao cho A^{h_n} là γ-đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}$ và $A_i^{h_n^i}$ cũng là các toán tử γ_i-đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}_i$ tương ứng. Hơn nữa, độ xấp xỉ giữa các toán tử A và A^{h_n}, A_i và $A_i^{h_n^i}$ được xác định bởi các bất đẳng thức sau:

$$\|A^{h_n}(x) - A(x)\| \leq \varphi(\|x\|)h_n, \qquad \forall x \in \mathcal{H},$$

$$\|A_i^{h_n^i}(x) - A_i(x)\| \leq \varphi_i(\|x\|)h_n^i, \qquad \forall x \in \mathcal{H}_i,$$

trong đó $\varphi(t)$ và $\varphi_i(t)$ là các hàm số bị chặn với mọi $t \geq 0$, và $\{h_n\}, \{h_n^i\}$ là các dãy số thực dương.

Trước hết, chúng tôi xem xét tính ổn định của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov ẩn bằng cách xét dãy $\{z_n\}$ được xác định bởi phương trình:

$$A^{h_n}(z_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i^{h_n^i}(T_i(z_n))) + \alpha_n S(z_n) = f^{\delta_n} + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i^{\delta_n^i}). \tag{2.22}$$

Theo Mệnh đề 2.1.2, với các giả thiết trên, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, phương trình (2.22) có nghiệm duy nhất z_n.

Định lý 2.3.1. *Giả sử các điều kiện (P1), (P2), (L1), (L2) được thỏa mãn. Ngoài ra, nếu điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_n + h_n + \sum_{i=1}^{N}(\delta_n^i + h_n^i)}{\alpha_n} = 0, \tag{2.23}$$

thì dãy $\{z_n\}$ được tạo bởi phương trình (2.22) hội tụ mạnh đến $x^* \in \Omega$, trong đó x^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (2.2).

Chứng minh. Gọi x_n là nghiệm duy nhất của phương trình (2.1). Ta biết rằng $x_n \to x^*$ khi $n \to \infty$, trong đó x^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (2.2). Dễ dàng thấy rằng

$$\begin{aligned} 0 = {} & \langle A(x_n) - A^{h_n}(z_n),\, x_n - z_n\rangle + \alpha_n\langle S(x_n) - S(z_n),\, x_n - z_n\rangle \\ & + \left\langle \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i(T_i(x_n))) - \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i^{h_n^i}(T_i(z_n))),\, x_n - z_n \right\rangle \\ & - \langle f - f^{\delta_n},\, x_n - z_n\rangle - \sum_{i=1}^{N}\langle T_i^*(f_i - f_i^{\delta_n^i}),\, x_n - z_n\rangle. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} \langle A(x_n) - A^{h_n}(z_n),\, x_n - z_n\rangle &= \langle A(x_n) - A^{h_n}(x_n),\, x_n - z_n\rangle \\ &\quad + \langle A^{h_n}(x_n) - A^{h_n}(z_n),\, x_n - z_n\rangle \\ &\geq \langle A(x_n) - A^{h_n}(x_n),\, x_n - z_n\rangle \end{aligned} \tag{2.25}$$

và

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i(T_i(x_n))) - \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i^{h_n^i}(T_i(z_n))),\, x_n - z_n \right\rangle \\ & \qquad = \sum_{i=1}^{N}\langle A_i(T_i(x_n)) - A_i^{h_n^i}(T_i(z_n)),\, T_i(x_n) - T_i(z_n)\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N} \langle A_i(T_i(x_n)) - A_i^{h_n^i}(T_i(x_n)),\, T_i(x_n) - T_i(z_n)\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \langle A_i^{h_n^i}(T_i(x_n)) - A_i^{h_n^i}(T_i(z_n)),\, T_i(x_n) - T_i(z_n)\rangle \\
&\geq \sum_{i=1}^{N} \langle A_i(T_i(x_n)) - A_i^{h_n^i}(T_i(x_n)),\, T_i(x_n) - T_i(z_n)\rangle. \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

Từ (2.24), (2.25) và (2.26) ta suy ra

$$
\begin{aligned}
0 \geq\ & \langle A(x_n) - A^{h_n}(x_n),\, x_n - z_n\rangle - \langle f - f^{\delta_n},\, x_n - z_n\rangle - \sum_{i=1}^{N} \langle T_i^*(f_i - f_i^{\delta_n^i}),\, x_n - z_n\rangle \\
&+ \sum_{i=1}^{N} \langle A_i(T_i(x_n)) - A_i^{h_n^i}(T_i(x_n)),\, T_i(x_n) - T_i(z_n)\rangle + \alpha_n\beta\|x_n - z_n\|^2.
\end{aligned}
$$

Từ đó, ta được

$$
\begin{aligned}
\alpha_n\beta\|x_n - z_n\|^2 \leq\ & - \langle A(x_n) - A^{h_n}(x_n),\, x_n - z_n\rangle \\
& - \sum_{i=1}^{N} \langle A_i(T_i(x_n)) - A_i^{h_n^i}(T_i(x_n)),\, T_i(x_n) - T_i(z_n)\rangle \\
& + \langle f - f^{\delta_n},\, x_n - z_n\rangle + \sum_{i=1}^{N} \langle T_i^*(f_i - f_i^{\delta_n^i}),\, x_n - z_n\rangle.
\end{aligned}
$$

Dựa vào điều kiện (P1), (L1) và (L2), ta có

$$
\begin{aligned}
\alpha_n\beta\|x_n - z_n\|^2 &\leq \|A(x_n) - A^{h_n}(x_n)\|\,\|x_n - z_n\| + \sum_{i=1}^{N} \|T_i\|\,\delta_n^i\|x_n - z_n\| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \|A_i(T_i(x_n)) - A_i^{h_n^i}(T_i(x_n))\|\,\|T_i(x_n) - T_i(z_n)\| + \delta_n\|x_n - z_n\| \\
&\leq \varphi(\|x_n\|)h_n\|x_n - z_n\| + \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(\|T_i(x_n)\|)h_n^i\|T_i\|\,\|x_n - z_n\| \\
&\quad + \delta_n\|x_n - z_n\| + \sum_{i=1}^{N} \|T_i\|\,\delta_n^i\|x_n - z_n\|.
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$\beta\|x_n - z_n\| \leq \varphi(\|x_n\|)\frac{h_n}{\alpha_n} + \sum_{i=1}^{N}\varphi_i(\|T_i(x_n)\|)\|T_i\|\frac{h_n^i}{\alpha_n} + \frac{\delta_n}{\alpha_n} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_n^i}{\alpha_n}\|T_i\|.$$

Từ điều kiện (2.23), ta được $\|x_n - z_n\| \to 0$. Vì $x_n \to x^*$ nên suy ra $z_n \to x^*$.

Định lý được chứng minh. □

Tiếp theo, chúng tôi sẽ phân tích tính ổn định của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov hiện. Cụ thể, với mọi $u_1 \in \mathcal{H}$, ta xét dãy $\{u_n\}$ được xác định bởi

$$u_{n+1} = u_n - \theta_n \widehat{F}_{\alpha_n}(u_n), \quad n \geq 1, \tag{2.27}$$

trong đó

$$\widehat{F}_{\alpha_n}(u_n) = A^{h_n}(u_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i^{h_n^i}(T_i(u_n))) + \alpha_n S(u_n) - f^{\delta_n} - \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i^{\delta_n^i}).$$

Bằng cách sử dụng lập luận tương tự như trong chứng minh Định lý 2.3.1, ta có định lý sau đây.

Định lý 2.3.2. *Giả sử các điều kiện* $(P1^*)$, $(P2^*)$, $(L1)$, $(L2)$ *và* (2.23) *đều thỏa mãn. Khi đó, dãy* $\{u_n\}$ *được tạo bởi* (2.27) *hội tụ mạnh đến* $x^* \in \Omega$, *trong đó* x^* *là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân* (2.2).

Nhận xét 2.3.3. Định lý 2.3.1 và Định lý 2.3.2 cho thấy Thuật toán 2.1.1 và Thuật toán 2.2.1 là *ổn định trước nhiễu*. Tức là, ngay cả khi dữ liệu và toán tử chỉ được cho gần đúng theo các điều kiện $(L1)$, $(L2)$ thì các dãy lặp thu được vẫn hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất x^* của bài toán. Điều này cho thấy thuật toán đề xuất vừa có cơ sở lý thuyết vững chắc, vừa có tiềm năng ứng dụng trong các bài toán thực tiễn, nơi dữ liệu thường chứa sai số.

2.4 Ứng dụng và ví dụ số minh họa

Trong phần này, các ví dụ số được thực hiện bằng phần mềm MATLAB R2014a trên máy tính `DELL Precision 5560`, trang bị bộ xử lý Intel(R) Core(TM) i7-11850H thế hệ thứ 11 với xung nhịp 2.50 GHz (16 lõi xử lý) và bộ nhớ RAM 16 GB.

2.4.1 Ứng dụng giải bài toán điểm bất động chung tách và bài toán không điểm chung tách với đa tập đầu ra

Cho $T_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các toán tử tuyến tính bị chặn trên $\mathcal{H}$. Cho $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ và $B_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các ánh xạ không giãn trên $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}_i$ tương ứng. Xét *bài toán điểm bất động chung tách với đa tập đầu ra* (SCFPP-MOS):

$$\text{Tìm } x \in \widehat{\Omega} = \text{Fix}(B) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{N} T_i^{-1}\big(\text{Fix}(B_i)\big) \right) \neq \emptyset. \tag{2.28}$$

Theo Nhận xét 1.3.17, các toán tử $I - B$ và $I_i - B_i$ là $\dfrac{1}{2}$-đơn điệu mạnh ngược. Do đó, nếu ta thay các toán tử A và A_i trong Thuật toán 2.1.1 và Thuật toán 2.2.1 lần lượt bởi các toán tử $I - B$ và $I_i - B_i$, đồng thời chọn $f = 0$ và $f_i = 0, (i = 1, 2, \ldots, N)$ thì sẽ thu được các dãy lặp tương ứng hội tụ tới nghiệm của bài toán (2.28). Cụ thể như sau:

Định lý 2.4.1. *Giả sử các điều kiện* (P1) *và* (P2) *được thỏa mãn. Khi đó, dãy* $\{x_n\}$ *được xác định bởi*

$$(I - B)(x_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*((I_i - B_i)(T_i(x_n))) + \alpha_n S(x_n) = 0$$

hội tụ mạnh về $x \in \widehat{\Omega}$*, trong đó* x *là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân*

$$\langle S(x),\, p - x \rangle \geq 0, \quad \forall\, p \in \widehat{\Omega}. \tag{2.29}$$

Định lý 2.4.2. *Giả sử rằng các điều kiện* (P1*) *và* (P2*) *được thỏa mãn. Khi đó,*

dãy $\{y_n\}$ *được sinh bởi*

$$y_{n+1} = y_n - \theta_n \left((I - B)(y_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*((I_i - B_i)(T_i(y_n))) + \alpha_n S(y_n) \right)$$

hội tụ mạnh về $x \in \widehat{\Omega}$*, trong đó* x *là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân* (2.29).

Giả sử $B = P_C$ và $B_i = P_{Q_i}$, trong đó P_C là phép chiếu mêtric từ không gian Hilbert $\mathcal{H}$ lên tập C, còn P_{Q_i} là phép chiếu mêtric từ không gian $\mathcal{H}_i$ lên tập Q_i, với mọi $i = 1, 2, \ldots, N$. Vì phép chiếu mêtric là ánh xạ không giãn, nên $\mathrm{Fix}(P_C) = C$ và $\mathrm{Fix}(P_{Q_i}) = Q_i$. Do đó dựa trên Định lý 2.4.1 và Định lý 2.4.2, ta thu được các kết quả sau cho *bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra* (SFP-MOS).

Định lý 2.4.3. *Giả sử các điều kiện* (P1) *và* (P2) *được thỏa mãn. Khi đó, dãy* $\{x_n\}$ *được xác định bởi*

$$(I - P_C)(x_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^* \big((I_i - P_{Q_i})(T_i(x_n)) \big) + \alpha_n S(x_n) = 0$$

hội tụ mạnh đến $x \in \tilde{\Omega}$*, trong đó* x *chính là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân*

$$\langle S(x),\, p - x \rangle \geq 0, \quad \forall\, p \in \tilde{\Omega}, \tag{2.30}$$

trong đó

$$\tilde{\Omega} = C \cap \left(\bigcap_{i=1}^{N} T_i^{-1}(Q_i) \right) \neq \emptyset.$$

Định lý 2.4.4. *Giả sử các điều kiện* (P1*) *và* (P2*) *được thỏa mãn. Khi đó, dãy* $\{y_n\}$ *được xác định bởi*

$$y_{n+1} = y_n - \theta_n \Big((I - P_C)(y_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^* \big((I_i - P_{Q_i})(T_i(y_n)) \big) + \alpha_n S(y_n) \Big). \tag{2.31}$$

hội tụ mạnh đến $x \in \tilde{\Omega}$*, trong đó* x *là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân* (2.30).

Giả sử $F : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ và $F_i : \mathcal{H}_i \to 2^{\mathcal{H}_i}$ lần lượt là các toán tử đơn điệu cực đại trên $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}_i$, với $i = 1, 2, \ldots, N$. Xét *bài toán không điểm chung tách với đa tập đầu ra* (SCNPP-MOS):

$$\text{Tìm } x \in \bar{\Omega} = \text{Zer}(F) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{N} T_i^{-1}\big(\text{Zer}(F_i)\big) \right) \neq \emptyset. \tag{2.32}$$

Theo Mệnh đề 1.3.12 và Mệnh đề 1.3.13 thì các toán tử giải J_r^F của F và $J_{r_i}^{F_i}$ của F_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ là các ánh xạ không giãn, đồng thời

$$\text{Zer}(F) = \text{Fix}(J_r^F); \quad \text{Zer}(F_i) = \text{Fix}(J_{r_i}^{F_i}).$$

Do đó, ta có thể áp dụng Định lý 2.4.1 và Định lý 2.4.2 để bài toán (2.32) như sau:

Định lý 2.4.5. *Giả sử các điều kiện* (P1) *và* (P2) *được thỏa mãn. Khi đó, dãy* $\{x_n\}$ *được sinh bởi*

$$(I - J_r^F)(x_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*\big((I_i - J_{r_i}^{F_i})(T_i(x_n))\big) + \alpha_n S(x_n) = 0, \tag{2.33}$$

hội tụ mạnh đến $x \in \bar{\Omega}$. *Hơn nữa,* x *chính là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân*

$$\langle S(x),\, p - x\rangle \geq 0, \quad \forall\, p \in \bar{\Omega}. \tag{2.34}$$

Định lý 2.4.6. *Giả sử các điều kiện* (P1*) *và* (P2*) *được thỏa mãn. Khi đó, dãy* $\{y_n\}$ *được xác định bởi công thức lặp*

$$y_{n+1} = y_n - \theta_n\Big((I - J_r^F)(y_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*\big((I_i - J_{r_i}^{F_i})(T_i(y_n))\big) + \alpha_n S(y_n)\Big), \tag{2.35}$$

hội tụ mạnh đến $x \in \bar{\Omega}$. *Hơn nữa,* x *chính là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân* (2.34).

Ví dụ 2.4.7. Xét bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra (SFP-MOS) như sau:

$$\text{Tìm } x \in \widetilde{\Omega} = C \cap \left(\bigcap_{i=1}^{3} T_i^{-1}(Q_i) \right), \tag{2.36}$$

với các giả thiết sau đây.

(i) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_i = L^2[0,\pi]$ $(i = 1,2,3)$ với tích vô hướng được cho bởi

$$\langle x, y \rangle = \int_0^\pi x(t)\, y(t)\, dt, \qquad \forall\, x = x(t),\ y = y(t) \in L^2[0,\pi],$$

và chuẩn tương ứng được cho bởi

$$\|x\| = \left(\int_0^\pi x^2(t)\, dt \right)^{1/2}, \qquad \forall\, x = x(t) \in L^2[0,\pi].$$

Các tập C và Q_i $(i = 1,2,3)$ được xác định bởi

$$C = \{\, x \in L^2[0,\pi] : \|x\| \le 2 \,\},$$
$$Q_i = \{\, x \in L^2[0,\pi] : \langle a_i, x \rangle \le b_i \,\},$$

trong đó

$$a_i(t) = \sin\big((i+1)t\big),\ \forall\, t \in [0,\pi],$$
$$b_i = \frac{1 - \cos(i\pi)}{i(i+1)(i+2)}.$$

(ii) Với mỗi $i = 1,2,3$, toán tử $T_i : L^2[0,\pi] \to L^2[0,\pi]$ được định nghĩa bởi

$$T_i(x)(t) = \frac{x(t)}{i+1}, \qquad \forall\, x = x(t) \in L^2[0,\pi].$$

Khi đó tập $\widetilde{\Omega}$ là khác rỗng, vì $0 \in \widetilde{\Omega}$. Hơn nữa, $x_* = 0$ là nghiệm duy nhất của bài toán (2.36). Chúng tôi sử dụng công thức lặp hiện (2.31) với các dữ liệu được chọn như sau:

Toán tử hiệu chỉnh $S(x) = x$ với mọi $x = x(t) \in L^2[0,\pi]$;

Điểm đầu: $x_1 = e^t$, với mọi $t \in [0, \pi]$;

Các tham số: $\alpha_n = n^{-0.1}$, $\theta_n = 0.75\, n^{-0.3}$;

Sử dụng tiêu chuẩn dừng $\varepsilon_n = \|x_n\| \leq \text{TOL}$, với TOL là ngưỡng sai số cho trước. Đồng thời, chúng tôi cũng so sánh kết quả số của công thức lặp (2.31) với Thuật toán 3.5 trong [52] và Thuật toán trong Hệ quả 4.3 của [54]. Các dữ liệu cho mỗi thuật toán được lựa chọn như sau:

- Thuật toán 3.5 trong [52]:

$$f(x) = 0.85x, \qquad \alpha_n = n^{-0.1}, \qquad \gamma_n = \frac{2}{3}.$$

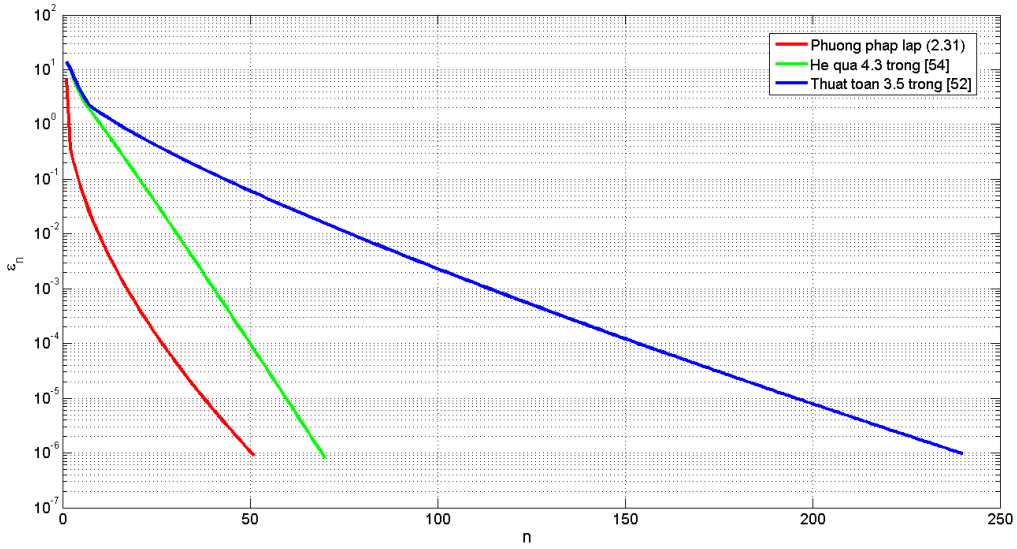
- Hệ quả 4.3 trong [54]:

$$f(x) = 0.85x, \qquad \alpha_n = n^{-0.1}, \qquad \beta_{i,n} = 0.75, \qquad \theta_{i,n} = 1, \qquad \rho_{i,n} = 1.$$

Các kết quả số được trình bày trong Bảng 2.1. Sự biến thiên của sai số ε_n được minh họa trong Hình 2.1.

Bảng 2.1: Bảng kết quả số của phương pháp lặp hiện (2.31) và so sánh giữa các thuật toán

TOL	**Thuật toán**	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{\varepsilon_n}$	**Thời gian (s)**
10^{-5}	Phương pháp lặp (2.31)	38	9.375×10^{-6}	0.001
	Thuật toán 3.5 trong [52]	196	9.676×10^{-6}	0.006
	Hệ quả 4.3 trong [54]	71	9.073×10^{-6}	0.029
10^{-6}	Phương pháp lặp (2.31)	51	9.144×10^{-7}	0.001
	Thuật toán 3.5 trong [52]	240	9.627×10^{-7}	0.007
	Hệ quả 4.3 trong [54]	82	9.531×10^{-7}	0.030
10^{-7}	Phương pháp lặp (2.31)	65	9.790×10^{-8}	0.001
	Thuật toán 3.5 trong [52]	285	9.929×10^{-8}	0.008
	Hệ quả 4.3 trong [54]	93	9.897×10^{-8}	0.032



Hình 2.1: Dáng điệu của ε_n trong Bảng 2.1 với điều kiện dừng $\mathrm{TOL} = 10^{-6}$

2.4.2 Ứng dụng giải bài toán điểm cực tiểu chung tách với đa tập đầu ra

Cho $g: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ và $g_i: \mathcal{H}_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các hàm lồi khả vi Fréchet. Giả sử rằng ∇g và ∇g_i là các toán tử liên tục Lipschitz với hệ số Lipschitz tương ứng là β và β_i. Gọi $T_i: \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các toán tử tuyến tính bị chặn. Giả sử rằng

$$\Omega^* = \arg\min_{x \in \mathcal{H}} g(x) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{N} T_i^{-1}(\arg\min_{y_i \in \mathcal{H}_i} g_i(y_i)) \right) \neq \emptyset.$$

Bài toán điểm cực tiểu tách với đa tập đầu ra yêu cầu tìm một phần tử $p \in \mathcal{H}$ sao cho $p \in \Omega^*$, tức là,

$$p \in \arg\min_{x \in \mathcal{H}} g(x), \quad T_i(p) \in \arg\min_{y_i \in \mathcal{H}_i} g_i(y_i), \tag{2.37}$$

với mọi $i = 1, 2, \ldots, N$.

Mô hình bài toán này yêu cầu tìm một nghiệm đồng thời tối ưu hóa hàm g và thỏa mãn các điều kiện cực tiểu của ba hàm g_i thông qua các toán tử tuyến tính T_i. Cấu trúc này thường gặp trong các bài toán phân tích tín hiệu và xử lý dữ liệu nhiều nguồn.

Theo định lý Baillon-Haddad (xem Bổ đề 1.5.7), ta có ∇g và ∇g_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các toán tử đơn điệu mạnh ngược với hệ số $1/\beta$ và $1/\beta_i$ tương ứng. Do đó, áp dụng Định lý 2.1.3 và Định lý 2.2.4 với $A = \nabla g$, $A_i = \nabla g_i$, $f = f_i = 0$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, N$, ta thu được các kết quả sau cho việc giải bài toán điểm cực tiểu chung tách với đa tập đầu ra.

Định lý 2.4.8. *Giả sử các điều kiện* (P1) *và* (P2) *được thỏa mãn. Khi đó, dãy* $\{x_n\}$ *được xác định bởi*

$$\nabla g(x_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(\nabla g_i(T_i(x_n))) + \alpha_n S(x_n) = 0 \tag{2.38}$$

hội tụ mạnh về $x \in \Omega^*$, *trong đó* x *là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân*

$$\langle S(x),\, p - x\rangle \geq 0, \quad \forall\, p \in \Omega^*. \tag{2.39}$$

Định lý 2.4.9. *Giả sử rằng các điều kiện* (P1*) *và* (P2*) *được thỏa mãn. Khi đó, dãy* $\{y_n\}$ *được sinh bởi*

$$y_{n+1} = y_n - \theta_n \left(\nabla g(y_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(\nabla g_i(T_i(y_n))) + \alpha_n S(y_n) \right) \tag{2.40}$$

hội tụ mạnh về $x \in \Omega^*$, *trong đó* x *là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân* (2.39).

Ví dụ 2.4.10. Xét bài toán điểm cực tiểu chung tách với đa tập đầu ra.

$$\text{Tìm } x \in \Omega^* = \operatorname{Argmin} g \,\cap\, \left(\bigcap_{i=1}^{4} T_i^{-1}(\operatorname{Argmin} g_i) \right), \tag{2.41}$$

với các dữ liệu như sau:

(i) Các hàm mục tiêu: Cho $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, và $g_4 : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ là các hàm lồi và khả vi Fréchet, được xác định bởi:

$$g(x) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + 2x_3^2 + \frac{x_4^2}{2} + 2x_5^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_1x_4 + 2x_1x_5 - 2x_2x_3$$

$$
\begin{aligned}
&+ x_2x_4 - 2x_2x_5 - 2x_3x_4 + 4x_3x_5 - 2x_4x_5 - x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5,\\
g_1(y) &= \frac{y_1^2}{2} + 2y_2^2 + 2y_1y_2 - 2y_1 - 4y_2,\\
g_2(z) &= \frac{z_1^2}{2} + 2z_2^2 + \frac{z_3^2}{2} - 2z_1z_2 + z_1z_3 - 2z_2z_3 + z_1 - 2z_2 + z_3,\\
g_3(u) &= \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) + u_1u_2 - u_1u_3 + u_1u_4 - u_2u_3 + u_2u_4 - u_3u_4\\
&\quad - 3(u_1 + u_2 - u_3 + u_4)\\
g_4(v) &= \frac{1}{2}(v_1^2 + v_3^2 + 4v_5^2 + v_6^2) - v_1v_3 + 2v_1v_5 - v_1v_6 - 2v_3v_5 + v_3v_6 - 2v_5v_6\\
&\quad - 4(v_1 - v_3 + 2v_5 - v_6),
\end{aligned}
$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) \in \mathbb{R}^6$.

(ii) Các toán tử chuyển: Ma trận của các toán tử chuyển $T_1 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$, $T_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, $T_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ và $T_4 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ lần lượt là:

$$
T_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -5 & 5 & -7 & 3 \end{bmatrix},
$$

$$
T_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad T_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}.
$$

Dễ thấy g và g_i, $i = 1, 2, 3, 4$, là các hàm lồi và tập nghiệm của bài toán là

$$
\Omega^* = \left\{ \left(2a + c - 2, c, \frac{3 - a - 2b}{2}, a, b \right) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.
$$

Chọn $S(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}^5$. Khi đó, $x_* = (-0.24,\ 0.24,\ 0.56,\ 0.76,\ 0.56)$ là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân

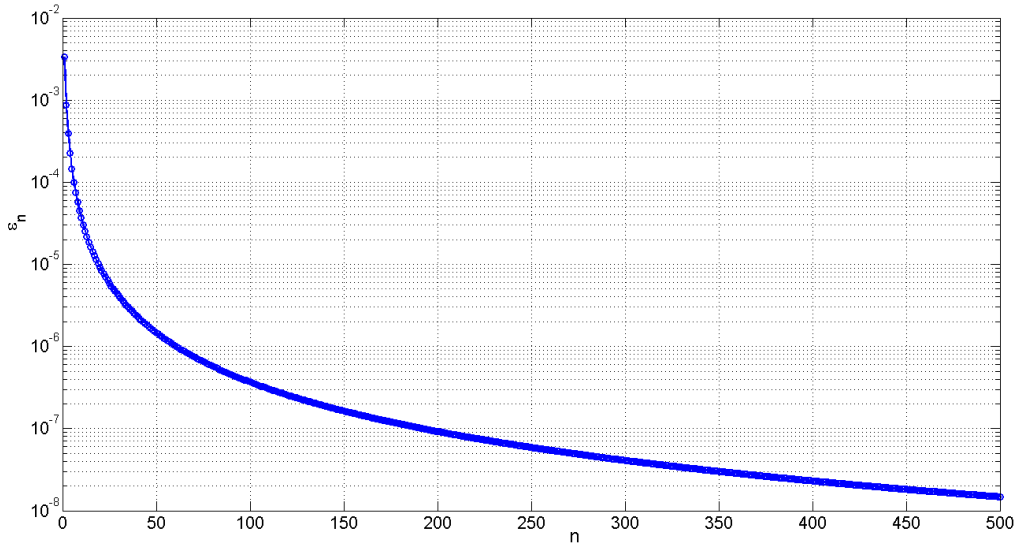
$$\langle S(x_*), x - x_* \rangle \geq 0, \qquad \forall x \in \Omega^*.$$

Trong trường hợp này, x_* là nghiệm với chuẩn nhỏ nhất.

Sử dụng công thức lặp (2.38) (phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov ẩn) với $\alpha_n = n^{-1}$, các kết quả được trình bày trong Bảng 2.2. Dáng điệu của ε_n được minh họa trong Hình 2.2.

Bảng 2.2: Bảng kết quả số của phương pháp lặp ẩn (2.38)

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{\varepsilon_n = \|x_n - x_*\|^2}$	$\boldsymbol{x_n}$
100	3.6890×10^{-7}	$(-0.2398,\ 0.2398,\ 0.5598,\ 0.7595,\ 0.5598)$
200	9.2275×10^{-8}	$(-0.2399,\ 0.2399,\ 0.5599,\ 0.7598,\ 0.5599)$
300	4.1019×10^{-8}	$(-0.2399,\ 0.2399,\ 0.5599,\ 0.7598,\ 0.5599)$
400	2.3075×10^{-8}	$(-0.2400,\ 0.2400,\ 0.5599,\ 0.7599,\ 0.5599)$
500	1.4769×10^{-8}	$(-0.2400,\ 0.2400,\ 0.5600,\ 0.7599,\ 0.5600)$



Hình 2.2: Dáng điệu của ε_n trong Bảng 2.2

Tiếp theo, chúng tôi khảo sát tính hội tụ của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov hiện (công thức lặp (2.40)), đồng thời so sánh phương pháp này với Thuật toán 3.1 trong [54]. Chọn điểm đầu $x_1 = (2, 3, 4, 5, 6)$ và các tham số sử dụng cho từng thuật toán được lựa chọn như sau.

- Phương pháp lặp (2.40):

$$S(x) = x, \qquad \alpha_n = n^{-0.2}, \qquad \theta_n = 0.06\, n^{-0.21}.$$

- Thuật toán 3.1 trong [54]:

$$B_0 = \nabla g, \qquad B_i = \nabla g_i, \qquad f(x) = x_1, \qquad \alpha_n = n^{-1},$$
$$\beta_{i,n} = 0.2, \qquad r_{i,n} = 1, \qquad \rho_{i,n} = 1.45, \qquad \theta_{i,n} = 0.5.$$

Để dừng quá trình lặp, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn $\varepsilon_n = \|x_n - x_*\|^2 < \text{TOL}$, trong đó TOL là ngưỡng sai số cho trước. Các kết quả số tương ứng được tổng hợp trong Bảng 2.3.

Bảng 2.3: Bảng kết quả số của phương pháp lặp hiện (2.40) và Thuật toán 3.1 trong [54]

TOL	**Phương pháp lặp** (2.40)			**Thuật toán 3.1 trong** [54]		
	ε_n	n	Thời gian (s)	ε_n	n	Thời gian (s)
10^{-2}	9.9000×10^{-3}	448	0.0031	1.0000×10^{-2}	1032	0.0184
10^{-3}	9.9537×10^{-4}	739	0.0045	9.9999×10^{-4}	33094	0.4507
10^{-4}	9.9997×10^{-5}	7922	0.0298	1.0000×10^{-4}	1057638	14.6100

Nhận xét 2.4.11. Ví dụ 2.4.7 và Ví dụ 2.4.10 cho thấy rằng các phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov lặp ẩn và lặp hiện mà chúng tôi đề xuất trong chương này cho kết quả vượt trội so với thuật toán của S. Reich và các cộng sự trong [52] và thuật toán của S. Reich và T. M. Tuyen trong [54], xét về số vòng lặp cũng như thời gian CPU. Đặc biệt, trong Ví dụ 2.4.10, phương pháp lặp (2.38) cho thấy khi α_n đủ nhỏ, ta có thể tính được nghiệm xấp xỉ x_n một cách nhanh chóng.

2.4.3 Ứng dụng giải bài toán khôi phục tín hiệu

Xét bài toán khôi phục tín hiệu thưa $x \in \mathbb{R}^n$ từ các phép đo tuyến tính bị nhiễu, bao gồm phép đo trực tiếp và các phép đo gián tiếp thông qua nhiều toán tử tuyến tính bị chặn. Cụ thể, bài toán đặt ra là tìm một tín hiệu $x \in \mathbb{R}^n$ dựa trên phép đo trực tiếp Ax và các phép đo đã qua biến đổi $A_iT_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, trong đó A_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ là các ma trận lấy mẫu và T_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ là các toán tử tuyến tính bị chặn (toán tử chuyển). Mô hình toán học của bài toán được mô tả như sau. Giả sử $x \in \mathbb{R}^n$ là tín hiệu cần khôi phục, ta có hai loại phép đo:

- *Phép đo trực tiếp*:

$$b = Ax + \eta,$$

  trong đó $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ là ma trận đo chính, $b \in \mathbb{R}^m$ là véc-tơ quan sát được, và η là nhiễu Gauss với phương sai σ^2.

- *Phép đo gián tiếp thông qua các toán tử tuyến tính*:

$$b_i = A_iT_i(x) + \nu_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

  trong đó $A_i \in \mathbb{R}^{p_i\times m_i}$ là các ma trận lấy mẫu, $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_i}$ là các toán tử tuyến tính bị chặn, $b_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ là véc-tơ quan sát thu được từ quá trình đo thứ i, và ν_i là nhiễu Gauss với phương sai σ_i^2.

Việc giải bài toán trên được quy về bài toán tối ưu tương đương

$$\text{Tìm } x \in \Omega_* = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} h(x) \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{N} T_i^{-1}(\arg\min_{y_i\in\mathbb{R}^{m_i}} h_i(y_i))\Big), \tag{2.42}$$

trong đó

$$h(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2,$$
$$h_i(y_i) = \frac{1}{2}\|A_iy_i - b_i\|^2, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Rõ ràng, các hàm $h(x)$ và $h_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ đều là các hàm lồi khả vi. Hơn nữa, các gradient của chúng có dạng

$$\begin{aligned}\nabla h(x) &= A^*(Ax - b),\\ \nabla h_i(y_i) &= A_i^*\big(A_i y_i - b_i\big), \quad i = 1, 2, \ldots, N,\end{aligned}$$

trong đó A^*, A_i^* lần lượt là các toán tử liên hợp của A, A_i (trong trường hợp A và A_i là các ma trận hữu hạn chiều thì A^* và A_i^* tương ứng trùng với ma trận chuyển vị A^T và A_i^T). Do các toán tử ∇h và ∇h_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ là các toán tử liên tục Lipschitz nên theo định lý Baillon-Haddad (xem Bổ đề 1.5.7) thì ∇h và ∇h_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ là các toán tử đơn điệu mạnh ngược. Do đó, áp dụng Định lý 2.1.3 và Định lý 2.2.4 với

$$A = \nabla h, \quad A_i = \nabla h_i, \quad f = f_i = 0, \qquad \text{với mọi } i = 1, 2, \ldots, N,$$

ta thu được các kết quả sau cho việc giải bài toán khôi phục tín hiệu.

Định lý 2.4.12. *Giả sử các điều kiện* (P1) *và* (P2) *được thỏa mãn. Khi đó, dãy* $\{x_n\}$ *được xác định bởi*

$$A^*(Ax_n - b) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i^*(A_i T_i(x_n) - b_i)) + \alpha_n S(x_n) = 0 \tag{2.43}$$

hội tụ mạnh về $x \in \Omega_*$*, trong đó* x *là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân*

$$\langle S(x),\, p - x\rangle \geq 0, \quad \forall\, p \in \Omega_*. \tag{2.44}$$

Định lý 2.4.13. *Giả sử rằng các điều kiện* (P1*) *và* (P2*) *được thỏa mãn. Khi đó, dãy* $\{y_n\}$ *được sinh bởi*

$$y_{n+1} = y_n - \theta_n\left(A^*(Ay_n - b) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i^*(A_i T_i(y_n) - b_i)) + \alpha_n S(y_n)\right) \tag{2.45}$$

hội tụ mạnh về $x \in \Omega_*$*, trong đó* x *là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân* (2.44).

Ví dụ 2.4.14. Xét bài toán khôi phục tín hiệu với các dữ liệu thử nghiệm được thiết lập như sau:

Xét không gian $\mathbb{R}^n$ với $n = 128$. Tín hiệu gốc $x \in \mathbb{R}^n$ là tín hiệu thưa 0–1 với 32 phần tử khác không, các phần tử khác không nhận giá trị bằng 1, vị trí được chọn ngẫu nhiên.

Ma trận đo chính A có kích thước $m \times n$ trong đó $m = \max_{1 \leq i \leq N} m_i$, $m \in [50, 100]$. Các phần tử của A được sinh ngẫu nhiên theo phân phối chuẩn. Các hàng của ma trận A được chuẩn hóa theo chuẩn Euclid.

Với N hệ đo bổ sung, mỗi hệ được thiết lập bao gồm một toán tử tuyến tính bị chặn $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_i}$ và một ma trận lấy mẫu $A_i \in \mathbb{R}^{p_i \times m_i}$, trong đó $m_i \in [50, 100]$ và $p_i \in [20, 50]$ được chọn ngẫu nhiên. Các hàng của ma trận A_i và T_i lần lượt được chuẩn hóa theo chuẩn Euclid và chuẩn Frobenius.

Nhiễu Gauss với phương sai $\sigma^2 = 0.0001$ được thêm vào dữ liệu quan sát.

Sai số được đánh giá theo công thức

$$\varepsilon_n = \frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\max\{1, \|x_n\|\}}.$$

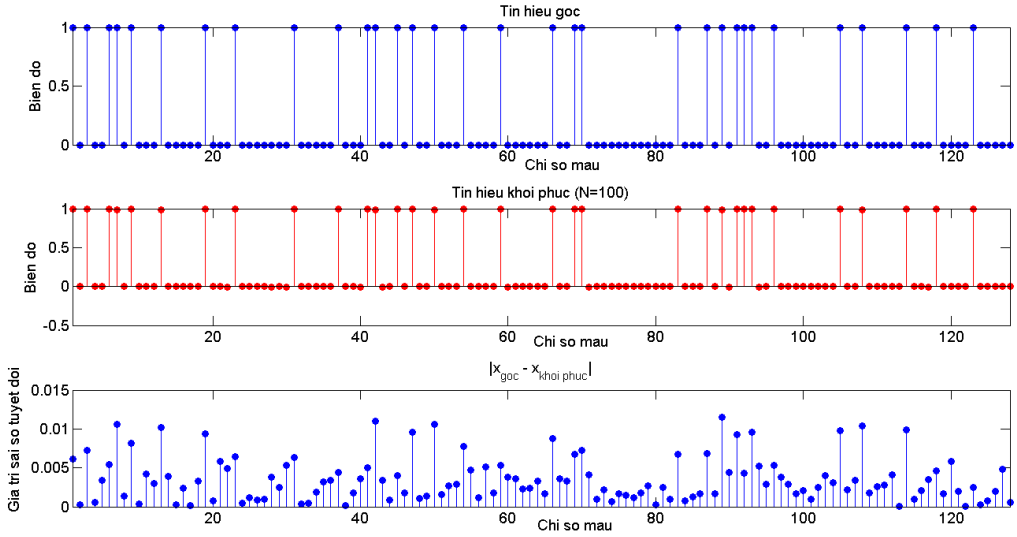
Sử dụng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov ẩn với công thức lặp (2.43), và các dữ liệu được chọn là

$$S(x) = x,\ \alpha_n = \frac{1}{n},\ N = 100.$$

Thuật toán được thực hiện với các lựa chọn khác nhau của tham số hiệu chỉnh α_n, kết quả số được trình bày trong Bảng 2.4. Hình ảnh khôi phục tín hiệu ứng với trường hợp $\alpha_n = \dfrac{1}{200}$ được thể hiện trong Hình 2.3

Bảng 2.4: Bảng kết quả số của phương pháp lặp ẩn (2.43)

$\boldsymbol{\alpha_n}$	$\boldsymbol{\varepsilon_n}$	**Thời gian (s)**
1/50	3.026×10^{-2}	0.1612
1/100	1.779×10^{-2}	0.0410
1/200	9.021×10^{-3}	0.0390
1/300	6.047×10^{-3}	0.0389



Hình 2.3: Tín hiệu gốc và tín hiệu khôi phục bằng phương pháp lặp ẩn (2.43) với $\alpha_n = 1/200$

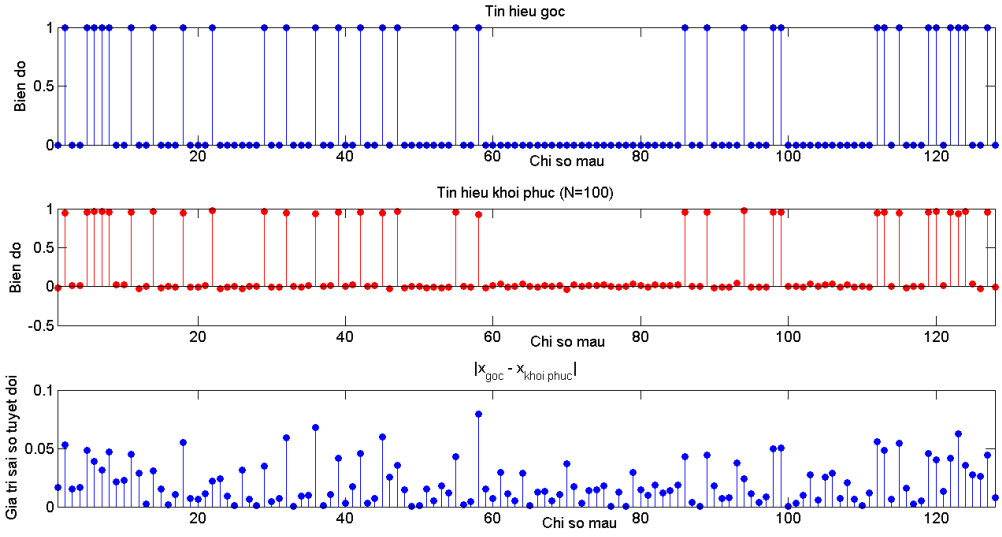
Tiếp theo, chúng tôi sử dụng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov hiện với công thức lặp (2.45), trong đó điểm xuất phát x_1 là gốc tọa độ và các dữ liệu được chọn như sau

$$S(x) = x, \quad \alpha_n = n^{-0.45}, \quad \theta_n = 0.35\, n^{-0.4525}.$$

Thuật toán dừng khi $\varepsilon_n \leq \text{TOL}$, với TOL cho trước hoặc khi số vòng lặp đạt 20000. Kết quả số được trình bày trong Bảng 2.5. Hình ảnh khôi phục tín hiệu với $\text{TOL} = 10^{-5}$ được thể hiện trong Hình 2.4.

Bảng 2.5: Bảng kết quả số của phương pháp lặp hiện (2.45)

TOL	**Số bước lặp**	$\boldsymbol{\varepsilon_n}$	**Thời gian (s)**
10^{-3}	100	$9.9579\times\ 10^{-4}$	0.0019
10^{-4}	499	$9.9916\times\ 10^{-5}$	0.0081
10^{-5}	2297	$9.9971\times\ 10^{-6}$	0.0361
10^{-6}	11714	$9.9999\times\ 10^{-7}$	0.1847



Hình 2.4: Tín hiệu gốc và tín hiệu khôi phục bằng phương pháp lặp hiện (2.45) với $\mathrm{TOL} = 10^{-5}$

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Trong chương này, chúng tôi đã xây dựng hai thuật toán xấp xỉ nghiệm cho bài toán (SCSP-MOE) dựa trên phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov. Điểm nhấn quan trọng của chương là việc chứng minh tính hội tụ mạnh và tính ổn định trước nhiễu cho các thuật toán đề xuất, thể hiện qua Định lý 2.1.3, Định lý 2.2.4, Định lý 2.3.1 và Định lý 2.3.2. Các kết quả này mở rộng đáng kể tính khả dụng của các phương pháp lặp trong bối cảnh dữ liệu thực tế thường chứa sai số.

Bên cạnh phần phân tích lý thuyết, chương này còn trình bày việc vận dụng các thuật toán đã xây dựng để giải một số bài toán liên quan. Các ví dụ số minh họa không chỉ xác nhận tính hội tụ của thuật toán mà còn cho thấy hiệu quả tính toán tốt hơn so với một số phương pháp khác trong một số trường hợp cụ thể.

Nhìn chung, chương này đóng góp một hướng tiếp cận hiệu quả và đáng tin cậy cho bài toán (SCSP-MOE), tạo nền tảng cho việc phát triển các thuật toán mạnh hơn sẽ được trình bày trong các chương tiếp theo.

Chương 3

Thuật toán điểm gần kề quán tính giải bài toán (SCSP-MOE)

Trong chương này, dựa trên phương pháp điểm gần kề quán tính (hiệu chỉnh), chúng tôi đề xuất hai thuật toán lặp giải bài toán (SCSP-MOE). Thuật toán thứ nhất được chứng minh hội tụ yếu đến nghiệm của bài toán và được đánh giá về tốc độ hội tụ. Thuật toán thứ hai được xây dựng trên cơ sở kết hợp thuật toán thứ nhất với phương pháp xấp xỉ mềm nhằm thu được sự hội tụ mạnh. Cuối chương, một số ví dụ số được đưa ra để minh họa cho các kết quả lý thuyết. Các nội dung của chương được trình bày dựa trên các kết quả chính của bài báo (CT1).

3.1 Thuật toán hội tụ yếu và tốc độ hội tụ

Như đã đề cập trong phần mở đầu, năm 2001, Alvarez và Attouch (xem [6]) đã giới thiệu thuật toán điểm gần kề quán tính để tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$, với $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert thực. Các tác giả đã chứng minh được rằng, với các tham số $\theta_n \in [0, 1)$, $\lambda_n > 0$ và điều kiện

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|^2 < \infty,$$

được thỏa mãn thì dãy $\{x_n\}$ sinh bởi quy tắc lặp

$$x_{n+1} = J^A_{\lambda_n}(x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1})),$$

với $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ được chọn bất kỳ, sẽ hội tụ yếu tới không điểm của toán tử đơn điệu cực đại A (với giả thiết tập nghiệm của bài toán khác rỗng).

Dựa trên thuật toán của Alvarez và Attouch, chúng tôi xây dựng một biến thể của thuật toán điểm gần kề quán tính để tìm nghiệm của bài toán (SCSP-MOE).

Trong toàn bộ chương này, bài toán (SCSP-MOE) được xét dưới các giả thiết (H1)–(H4) đã nêu trong Chương 2.

Thuật toán 3.1.1 Thuật toán hội tụ yếu

1: Chọn $\theta \in [0, 1)$ và dãy $\{t_n\}$ thỏa mãn

$$0 \leq t_n \leq \theta, \qquad \forall n \geq 0.$$

2: Chọn hai điểm đầu $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ tùy ý.

3: **for** $n = 1, 2, \ldots$ **do**

4: Tính

$$x_{n+1} = J^{A+\sum_{i=1}^{N} T_i^* A_i T_i} \left(x_n + t_n(x_n - x_{n-1}) + f + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i) \right). \tag{3.1}$$

5: **end for**

Sự hội tụ của dãy được tạo ra bởi Thuật toán 3.1.1 được chỉ ra trong định lý sau.

Định lý 3.1.2. *Giả sử rằng dãy $\{t_n\}$ được chọn sao cho điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \|x_n - x_{n-1}\|^2 < \infty. \tag{C}$$

Khi đó, dãy $\{x_n\}$ được tạo ra bởi Thuật toán 3.1.1 hội tụ yếu đến một nghiệm của bài toán (SCSP-MOE).

Chứng minh. Từ Bổ đề 1.5.5, ta có dãy $\{x_n\}$ là hoàn toàn xác định. Viết lại công thức lặp (3.1) dưới dạng tương đương

$$A(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i(T_i(x_{n+1}))) + x_{n+1} = x_n + t_n(x_n - x_{n-1}) + f + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i). \tag{3.2}$$

Với mọi $p \in \Omega$, tức là, $A(p) = f$ và $A_i(T_i(p)) = f_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Từ (3.2) ta có

$$
\begin{aligned}
&-\langle x_{n+1} - p, x_{n+1} - x_n - t_n(x_n - x_{n-1})\rangle \\
&\quad = \langle x_{n+1} - p, A(x_{n+1}) - f\rangle \ + \sum_{i=1}^{N} \langle x_{n+1} - p, T_i^*(A_i(T_i(x_{n+1}))) - T_i^*(f_i)\rangle \\
&\quad = \langle x_{n+1} - p, A(x_{n+1}) - A(p)\rangle + \sum_{i=1}^{N} \langle T_i(x_{n+1}) - T_i(p), A_i(T_i(x_{n+1})) - A_i(T_i(p))\rangle \\
&\quad \geq \gamma \|A(x_{n+1}) - f\|^2 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \|A_i(T_i(x_{n+1})) - f_i\|^2. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Mặt khác, đặt $\Delta_n = \dfrac{1}{2}\|x_n - p\|^2$, ta có

$$
\begin{aligned}
&\langle x_{n+1} - p, x_{n+1} - x_n - t_n(x_n - x_{n-1})\rangle \\
&\quad = \langle x_{n+1} - p, x_{n+1} - x_n\rangle - t_n\langle x_{n+1} - p, x_n - x_{n-1}\rangle \\
&\quad = \frac{1}{2}\|x_{n+1} - p\|^2 + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 - \frac{1}{2}\|x_n - p\|^2 - t_n\langle x_{n+1} - p, x_n - x_{n-1}\rangle \\
&\quad = \Delta_{n+1} - \Delta_n + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 - t_n(\langle x_{n+1} - x_n, x_n - x_{n-1}\rangle + \langle x_n - p, x_n - x_{n-1}\rangle) \\
&\quad = \Delta_{n+1} - \Delta_n + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \\
&\qquad - t_n(\langle x_{n+1} - x_n, x_n - x_{n-1}\rangle + \Delta_n - \Delta_{n-1} + \frac{1}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2) \\
&\quad = \Delta_{n+1} - \Delta_n - t_n(\Delta_n - \Delta_{n-1}) \qquad (3.4) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 - \frac{t_n}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2 - t_n\langle x_{n+1} - x_n, x_n - x_{n-1}\rangle \\
&\quad = \Delta_{n+1} - \Delta_n - t_n(\Delta_n - \Delta_{n-1}) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n - t_n(x_n - x_{n-1})\|^2 - \frac{t_n^2 + t_n}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2 \\
&\quad \geq \Delta_{n+1} - \Delta_n - t_n(\Delta_n - \Delta_{n-1}) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n - t_n(x_n - x_{n-1})\|^2 - t_n\|x_n - x_{n-1}\|^2. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Từ (3.3) và (3.5) ta có

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} - \Delta_n - t_n(\Delta_n - \Delta_{n-1}) \\ &\leq -\gamma\|A(x_{n+1}) - f\|^2 - \sum_{i=1}^{N}\gamma_i\|A_i(T_i(x_{n+1})) - f_i\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n - t_n(x_n - x_{n-1})\|^2 + t_n\|x_n - x_{n-1}\|^2. \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Từ (3.6), ta suy ra

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n \leq t_n(\Delta_n - \Delta_{n-1}) + t_n\|x_n - x_{n-1}\|^2.$$

Đặt $\Theta_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$ và $\delta_n = t_n\|x_n - x_{n-1}\|^2$, khi đó bất đẳng thức trên trở thành

$$\Theta_{n+1} \leq t_n\Theta_n + \delta_n \leq t_n[\Theta_n]_+ + \delta_n,$$

trong đó $[m]_+ = \max\{m, 0\}$. Vì $0 \leq t_n \leq \theta$ nên ta có

$$[\Theta_{n+1}]_+ \leq \theta[\Theta_n]_+ + \delta_n.$$

Do đó, bằng cách lặp lại bất đẳng thức trên, ta thu được

$$[\Theta_{n+1}]_+ \leq \theta^n[\Theta_1]_+ + \sum_{k=0}^{n-1}\theta^k\delta_{n-k}.$$

Từ điều kiện (C), ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\Theta_{n+1}]_+ \leq \frac{\theta}{1-\theta}\left([\Theta_1]_+ + \sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\right).$$

Đặt $\Psi_n = \Delta_n - \sum_{k=1}^{n}[\Theta_k]_+$. Vì $\Delta_n \geq 0$ và $\sum_{k=1}^{n}[\Theta_k]_+ < \infty$ nên dãy $\{\Psi_n\}$ bị chặn dưới. Hơn nữa, vì $\Theta_{n+1} = \Delta_{n+1} - \Delta_n$ nên từ định nghĩa của $[\Theta_{n+1}]_+$ ta có

$$\Psi_{n+1} = \Delta_{n+1} - [\Theta_{n+1}]_+ - \sum_{k=1}^{n}[\Theta_k]_+ \leq \Delta_{n+1} - \Delta_{n+1} + \Delta_n - \sum_{k=1}^{n}[\Theta_k]_+ = \Psi_n.$$

Do đó, dãy $\{\Psi_n\}$ là dãy giảm. Vì vậy, $\{\Psi_n\}$ và $\{\Delta_n\}$ là các dãy hội tụ. Từ (3.6), ta có

$$\gamma\|A(x_{n+1}) - f\|^2 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \|A_i(T_i(x_{n+1})) - f_i\|^2 + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n - t_n(x_n - x_{n-1})\|^2$$
$$\leq -[\Delta_{n+1} - \Delta_n - t_n(\Delta_n - \Delta_{n-1})] + t_n\|x_n - x_{n-1}\|^2. \tag{3.7}$$

Vì dãy $\{\Delta_n\}$ hội tụ và điều kiện (C) được thỏa mãn nên ta có

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n - t_n(\Delta_n - \Delta_{n-1}) + t_n\|x_n - x_{n-1}\|^2 \to 0.$$

Kết hợp điều này với (3.7), ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} &\|A(x_{n+1}) - f\| \to 0, \\ &\|A_i(T_i(x_{n+1})) - f_i\| \to 0, \\ &\|x_{n+1} - x_n - t_n(x_n - x_{n-1})\| \to 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Vì dãy $\{\Delta_n\}$ hội tụ, nên dãy $\{x_n\}$ bị chặn. Do đó, tồn tại một dãy con $\{x_{k_n}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $x_{k_n} \rightharpoonup q$ khi $n \to \infty$. Ta sẽ chứng minh rằng $q \in \Omega$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma\|A(x_{k_n}) - A(q)\|^2 \\ &\leq \langle x_{k_n} - q, A(x_{k_n}) - A(q)\rangle \\ &= \langle x_{k_n} - q, A(x_{k_n}) - f\rangle + \langle x_{k_n} - q, f - A(q)\rangle \\ &\leq M\|A(x_{k_n}) - f\| + \langle x_{k_n} - q, f - A(q)\rangle, \end{aligned} \tag{3.9}$$

với $M = \sup_n\{\|x_n - q\|\} < \infty$. Lấy giới hạn khi $n \to \infty$ trong (3.9) và sử dụng (3.8) cùng với giả thiết $x_{k_n} \rightharpoonup q$, ta thu được

$$\|A(x_{k_n}) - A(q)\| \to 0.$$

Kết hợp điều này với (3.8), ta suy ra

$$A(q) = f.$$

Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, N$, vì T_i là toán tử tuyến tính bị chặn và $x_{k_n} \rightharpoonup q$, nên ta có $T_i(x_{k_n}) \rightharpoonup T_i(q)$. Bằng cách lập luận tương tự như trên, ta có

$$A_i(T_i(q)) = f_i, \text{ với mọi } \ i = 1, 2, \ldots, N.$$

Tức là $q \in \Omega$, như đã khẳng định.

Cuối cùng, ta chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến q. Thật vậy, giả sử q' là một điểm tụ yếu khác của dãy $\{x_n\}$. Khi đó, tồn tại một dãy con $\{x_{l_n}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $x_{l_n} \rightharpoonup q'$. Tương tự như lập luận ở trên, ta có $q' \in \Omega$. Vì cả q và q' đều thuộc Ω nên tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - q\|^2 \quad \text{và} \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - q'\|^2.$$

Do đó, cũng tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n\to\infty} (\|x_n - q\|^2 - \|x_n - q'\|^2) = 2 \lim_{n\to\infty} \langle x_n, q' - q\rangle + \|q\|^2 - \|q'\|^2.$$

Điều này cho thấy tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, q' - q\rangle.$$

Vì $x_{k_n} \rightharpoonup q$ và $x_{l_n} \rightharpoonup q'$ nên ta được

$$\langle q, q' - q\rangle = \langle q', q' - q\rangle.$$

Do đó $\|q - q'\|^2 = 0$, suy ra $q = q'$. Như vậy, dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến q.
Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.1.3. i) Bằng cách sử dụng phương pháp điểm gần kề quán tính chúng tôi đã chỉ ra được rằng khi điều kiện (C) được thỏa mãn thì dãy $\{x_n\}$ được xây dựng trong Thuật toán 3.1.1 hội tụ yếu tới nghiệm của bài toán (SCSP-MOE) mà không cần dùng đến thông tin về chuẩn của toán tử chuyển.

ii) Điều kiện (C) có thể được đảm bảo bằng cách chọn dãy tham số phù hợp.

Chẳng hạn, có thể chọn dãy $\{t_n\}$ như sau

$$t_n = \frac{1}{(\alpha + n^s)(\|x_n - x_{n-1}\|^2 + \beta)},$$

trong đó $s > 1$ và α, β là các hằng số dương.

Hơn nữa, điều kiện (C) cũng có thể tự động được thỏa mãn trong một số trường hợp đặc biệt, chẳng hạn như trường hợp được trình bày trong hệ quả sau.

Hệ quả 3.1.4. *Giả sử rằng $\{x_n\}$ là dãy được tạo ra bởi Thuật toán 3.1.1. Nếu điều kiện* (C) *được thay thế bởi điều kiện*

$$\{t_n\} \subset [0, \theta) \quad \textit{với } \theta \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad \textit{và } \{t_n\} \textit{ là dãy tăng,} \tag{C'}$$

thì ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|^2 < \infty$, do đó dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến một phần tử $p \in \Omega$.

Chứng minh. Từ (3.3) và (3.4), ta có

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} - \Delta_n - t_n(\Delta_n - \Delta_{n-1}) \\ \leq -\frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 + t_n\langle x_n - x_{n-1}, x_{n+1} - x_n\rangle + \frac{t_n}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, ta thu được

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n - t_n(\Delta_n - \Delta_{n-1}) \leq \frac{t_n - 1}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 + t_n\|x_n - x_{n-1}\|^2.$$

Đặt $\Lambda_n = \Delta_n - t_n\Delta_{n-1} + t_n\|x_n - x_{n-1}\|^2$. Vì $t_{n+1} \geq t_n$ nên với mọi $n \geq 1$, ta có

$$\Lambda_{n+1} - \Lambda_n \leq -\frac{1 - 3\theta}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2. \tag{3.10}$$

Từ điều kiện (C'), ta suy ra dãy $\{\Lambda_n\}$ là dãy giảm. Từ định nghĩa của Λ_n, ta có

$$\Delta_n - t_n\Delta_{n-1} \leq \Lambda_n \leq \Lambda_1. \tag{3.11}$$

Điều này dẫn đến

$$\Delta_n \leq \theta^n \Delta_0 + \Lambda_1 \sum_{k=0}^{n-1} \theta^k \leq \theta^n \Delta_0 + \frac{\Lambda_1}{1-\theta}. \tag{3.12}$$

Từ (3.10), (3.11), (3.12) và định nghĩa của Λ_{n+1}, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1-3\theta}{2} \sum_{k=1}^{n} \|x_{k+1} - x_k\|^2 &\leq \Lambda_1 - \Lambda_{n+1} \\ &\leq \Lambda_1 + \theta \Delta_n \\ &\leq \Lambda_1 + \theta^{n+1} \Delta_0 + \frac{\theta \Lambda_1}{1-\theta} \\ &= \theta^{n+1} \Delta_0 + \frac{\Lambda_1}{1-\theta}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Từ bất đẳng thức (3.13) cho $n \to \infty$, ta được

$$\frac{1-3\theta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq \Lambda_1 + \frac{\theta \Lambda_1}{1-\theta} = \frac{\Lambda_1}{1-\theta}.$$

Do đó,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq \frac{2\Lambda_1}{(1-\theta)(1-3\theta)} < \infty.$$

Từ Định lý 3.1.2, ta suy ra điều cần chứng minh. □

Tiếp theo, dựa trên ý tưởng của Chen và cộng sự [21], Corman và cộng sự [24], chúng tôi nghiên cứu tốc độ hội tụ của Thuật toán 3.1.1. Trước hết, ta có kết quả đánh giá sau đối với dãy $\{x_n\}$.

Định lý 3.1.5. *Cho dãy $\{x_n\}$ được tạo bởi Thuật toán 3.1.1 với $x_0 = x_1$ và giả sử rằng dãy $\{t_n\}$ thỏa mãn điều kiện* (C'). *Khi đó với bất kỳ $p \in \Omega$ và bất kỳ $n \in \mathbb{N}$, ta có*

$$\min_{1 \leq k \leq n} \|x_{k+1} - z_k\|^2 \leq \frac{2(1+\theta^2)(1+\theta-\theta^2)}{(1-\theta)(1-3\theta)n} \|x_0 - p\|^2, \tag{3.14}$$

trong đó $z_k = x_k + t_k(x_k - x_{k-1})$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$.

Chứng minh. Từ (3.13) và $x_1 = x_0$ ta có

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\|x_{k+1}-x_k\|^2 &\le 2\frac{\theta^{n+1}\Delta_0+\dfrac{\Lambda_1}{1-\theta}}{1-3\theta}\\ &\le 2\frac{\theta\Delta_0+\dfrac{\Lambda_1}{1-\theta}}{1-3\theta}\\ &= \frac{\theta+\dfrac{1-t_1}{1-\theta}}{1-3\theta}\|x_0-p\|^2\\ &\le \frac{1+\theta-\theta^2}{(1-\theta)(1-3\theta)}\|x_0-p\|^2. \qquad (3.15)\end{aligned}$$

Từ đó, ta được

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\|x_{k+1}-z_k\|^2 &= \sum_{k=1}^{n}\|x_{k+1}-x_k-t_k(x_k-x_{k-1})\|^2\\ &\le (1+\theta^2)\sum_{k=1}^{n}(\|x_{k+1}-x_k\|^2+\|x_k-x_{k-1}\|^2)\\ &\le \frac{2(1+\theta^2)(1+\theta-\theta^2)}{(1-\theta)(1-3\theta)}\|x_0-p\|^2.\end{aligned}$$

Do đó,

$$\min_{1\le k\le n}\{\|x_{k+1}-z_k\|^2\} \le \frac{2(1+\theta^2)(1+\theta-\theta^2)}{(1-\theta)(1-3\theta)n}\|x_0-p\|^2.$$

Định lý được chứng minh. □

Chú ý 3.1.6. Trong Thuật toán 3.1.1, nếu $x_{n+1} = z_n$, thì $x_{n+1} \in \Omega$, tức là x_{n+1} là một nghiệm của bài toán (SCSP-MOE).

Thật vậy, giả sử $p \in \Omega$. Từ (3.2) ta có

$$\begin{aligned}0 &= \langle x_{n+1}-p, A(x_{n+1})-f\rangle + \sum_{i=1}^{N}\langle x_{n+1}-p, T_i^*(A_i(T_i(x_{n+1})))-T_i^*(f_i)\rangle\\ &= \langle x_{n+1}-p, A(x_{n+1})-f\rangle + \sum_{i=1}^{N}\langle T_i(x_{n+1})-T_i(p), A_i(T_i(x_{n+1}))-f_i\rangle\end{aligned}$$

$$= \langle x_{n+1} - p, A(x_{n+1}) - A(p)\rangle + \sum_{i=1}^{N} \langle T_i(x_{n+1}) - T_i(p), A_i(T_i(x_{n+1})) - A_i(T_i(p))\rangle$$

$$\geq \gamma \|A(x_{n+1}) - f\|^2 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \|A_i(T_i(x_{n+1})) - f_i\|^2.$$

Điều này dẫn đến $A(x_{n+1}) = f$ và $A_i(T_i(x_{n+1})) = f_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, N$, tức là $x_{n+1} \in \Omega$. Do đó, ta có thể sử dụng điều kiện dừng

$$\|x_{n+1} - z_n\|^2 < \text{TOL}$$

để kết thúc quá trình lặp, trong đó TOL là ngưỡng sai số cho trước.

Hơn nữa, xét dãy $\{x_n\}$ được tạo ra như trong Định lý 3.1.5, từ bất đẳng thức (3.14), để thu được một nghiệm xấp xỉ TOL-tối ưu theo nghĩa $\|x_{n+1} - z_n\|^2 < \text{TOL}$, số bước lặp tối đa cần thiết theo Định lý 3.1.5 là

$$n_{\max} = \frac{2(1+\theta^2)(1+\theta-\theta^2)}{(1-\theta)(1-3\theta)\text{TOL}} \|x_0 - p\|^2.$$

Trong phần tiếp theo, chúng tôi sẽ thiết lập một bất đẳng thức đánh giá sai số chặt hơn, qua đó xác nhận rằng tốc độ hội tụ của dãy thực sự đạt bậc $O(1/\sqrt{n})$. Kết quả chi tiết được trình bày trong Định lý 3.1.7 dưới đây.

Định lý 3.1.7. *Cho dãy $\{x_n\}$ được tạo bởi Thuật toán 3.1.1 với $t_n = \theta < 1/3$ với mọi $n \geq 1$ và $x_0 = x_1$. Khi đó, với bất kỳ $p \in \Omega$ và mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có*

$$\|x_{n+1} - z_n\|^2 \leq \frac{2(1+7\theta)(1+\theta-\theta^2)(1+\theta^2)}{(1-\theta)(1-2\theta)(1-3\theta)(n-1)} \|x_0 - p\|^2.$$

Chứng minh. Từ (3.2) ta có

$$A(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i(T_i(x_{n+1}))) + x_{n+1} = z_n + f + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i),$$

$$A(x_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i(T_i x_n)) + x_n = z_{n-1} + f + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i).$$

Từ đó, ta có

$$A(x_{n+1}) - A(x_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i(T_i(x_{n+1})) - A_i(T_i(x_n))) + x_{n+1} - x_n = z_n - z_{n-1}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
&\langle z_n - z_{n-1}, x_{n+1} - x_n\rangle \\
&\quad = \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \langle A(x_{n+1}) - A(x_n), x_{n+1} - x_n\rangle \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{N} \langle T_i^*(A_i(T_i(x_{n+1})) - A_i(T_i(x_n))), x_{n+1} - x_n\rangle \\
&\quad = \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \langle A(x_{n+1}) - A(x_n), x_{n+1} - x_n\rangle \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{N} \langle A_i(T_i(x_{n+1})) - A_i(T_i(x_n)), T_i(x_{n+1}) - T_i(x_n)\rangle \\
&\quad \geq \|x_{n+1} - x_n\|^2.
\end{aligned}$$

Từ đó, ta được

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\|^2 &\leq \langle z_n - z_{n-1}, x_{n+1} - x_n\rangle \\
&= \langle x_n - x_{n-1} + \theta(x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}), x_{n+1} - x_n\rangle \\
&= (1+\theta)\langle x_n - x_{n-1}, x_{n+1} - x_n\rangle - \theta\langle x_{n-1} - x_{n-2}, x_{n+1} - x_n\rangle \\
&= \frac{1+\theta}{2}(\|x_{n+1} - x_n\|^2 + \|x_n - x_{n-1}\|^2 - \|x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}\|^2) \\
&\quad - \frac{\theta}{2}(\|x_{n+1} - x_n\|^2 + \|x_{n-1} - x_{n-2}\|^2 - \|x_{n+1} - x_n - x_{n-1} + x_{n-2}\|^2) \\
&= \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2 + \frac{\theta}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2 - \frac{\theta}{2}\|x_{n-1} - x_{n-2}\|^2 \\
&\quad - \frac{1+\theta}{2}\|x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}\|^2 + \frac{\theta}{2}\|x_{n+1} - x_n - x_{n-1} + x_{n-2}\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2 + \frac{\theta}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2 - \frac{\theta}{2}\|x_{n-1} - x_{n-2}\|^2 \\
&\quad - \frac{1+\theta}{2}\|x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}\|^2 \\
&\quad + \theta(\|x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}\|^2 + \|x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}\|^2).
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\|x_{n+1}-x_n\|^2 \le \|x_n-x_{n-1}\|^2+\theta\|x_n-x_{n-1}\|^2-\theta\|x_{n-1}-x_{n-2}\|^2 \\ -(1-\theta)\|x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}\|^2+2\theta\|x_n-2x_{n-1}+x_{n-2}\|^2.$$

Vì $\theta < 1/3$, nên $1-\theta \ge 2\theta$. Kết hợp điều này với bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\|x_{n+1}-x_n\|^2+2\theta\|x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}\|^2-\theta\|x_n-x_{n-1}\|^2 \\ \le \|x_n-x_{n-1}\|^2+2\theta\|x_n-2x_{n-1}+x_{n-2}\|^2-\theta\|x_{n-1}-x_{n-2}\|^2.$$

Từ đó, ta suy ra

$$\begin{aligned} &n\big(\|x_{n+1}-x_n\|^2+2\theta\|x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}\|^2-\theta\|x_n-x_{n-1}\|^2\big) \\ &\le \sum_{k=2}^{n+1}\big[\|x_k-x_{k-1}\|^2+2\theta\|x_k-2x_{k-1}+x_{k-2}\|^2-\theta\|x_{k-1}-x_{k-2}\|^2\big] \\ &\le \sum_{k=2}^{n+1}\big[(1+4\theta)\|x_k-x_{k-1}\|^2+3\theta\|x_{k-1}-x_{k-2}\|^2\big] \\ &\le (1+7\theta)\sum_{k=2}^{n+2}\|x_{k-1}-x_{k-2}\|^2. \end{aligned}$$

Kết hợp với (3.15), ta thu được

$$\begin{aligned} &n\big(\|x_{n+1}-x_n\|^2+2\theta\|x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}\|^2-\theta\|x_n-x_{n-1}\|^2\big) \\ &\le \frac{(1+7\theta)(1+\theta-\theta^2)}{(1-\theta)(1-3\theta)}\|x_0-p\|^2, \end{aligned} \tag{3.16}$$

với mọi $p \in \Omega$ và $n \ge 2$. Mặt khác, ta có

$$\|x_n-x_{n-1}\|^2 \le 2\big(\|x_{n+1}-x_n\|^2+\|x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}\|^2\big). \tag{3.17}$$

Từ (3.16) và (3.17), suy ra

$$(1-2\theta)n\|x_{n+1}-x_n\|^2 \le \frac{(1+7\theta)(1+\theta-\theta^2)}{(1-\theta)(1-3\theta)}\|x_0-p\|^2.$$

Do đó

$$\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq \frac{(1+7\theta)(1+\theta-\theta^2)}{(1-\theta)(1-2\theta)(1-3\theta)n}\|x_0 - p\|^2.$$

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z_n\|^2 &= \|x_{n+1} - x_n - \theta(x_n - x_{n-1})\|^2 \\ &\leq (1+\theta^2)\big(\|x_{n+1} - x_n\|^2 + \|x_n - x_{n-1}\|^2\big) \\ &\leq \frac{2(1+7\theta)(1+\theta-\theta^2)(1+\theta^2)}{(1-\theta)(1-2\theta)(1-3\theta)(n-1)}\|x_0 - p\|^2.\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. □

3.2 Thuật toán hội tụ mạnh

Trong phần trước, chúng tôi đã xây dựng Thuật toán 3.1.1 và chứng minh được sự hội tụ yếu của dãy lặp tương ứng. Để đạt được sự hội tụ mạnh, trong phần này chúng tôi sử dụng *phương pháp xấp xỉ mềm* (*viscosity approximation method*) do A. Moudafi đề xuất. Ý tưởng cơ bản của phương pháp này là kết hợp thuật toán gốc với một ánh xạ co $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ thông qua một dãy tham số điều khiển $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$. Cụ thể, trong [45], A. Moudafi đã xét thuật toán

$$x_{n+1} = \alpha_n \varphi(x_n) + (1-\alpha_n)S(x_n),$$

trong đó $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là một ánh xạ không giãn và dãy $\{\alpha_n\}$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty.$$

Khi đó, dãy lặp không chỉ hội tụ tới một điểm bất động của S (với giả thiết $\mathrm{Fix}(S) \neq \emptyset$) mà còn hội tụ mạnh tới một nghiệm của bất đẳng thức biến phân thích hợp trên tập điểm bất động của S. Từ đó, phương pháp xấp xỉ mềm đã trở thành một công cụ hiệu quả để chuyển từ sự hội tụ yếu sang sự hội tụ mạnh trong không gian Hilbert.

Xuất phát từ ý tưởng trên, chúng tôi kết hợp Thuật toán 3.1.1 với phương pháp xấp xỉ mềm để xây dựng một thuật toán hội tụ mạnh cho bài toán (SCSP-MOE). Thuật toán đề xuất được trình bày như sau.

Thuật toán 3.2.1 Thuật toán hội tụ mạnh

1: Chọn $\theta \in [0,1)$ và dãy $\{t_n\}$ sao cho

$$0 \leq t_n \leq \theta, \qquad \forall n \geq 0.$$

2: Chọn ánh xạ co $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ với hệ số co $c \in [0,1)$.

3: Chọn dãy $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty.$$

4: Chọn hai điểm đầu $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ tùy ý.

5: **for** $n = 1, 2, \ldots$ **do**

6: Tính

$$y_n = x_n + t_n(x_n - x_{n-1}).$$

7: Tính

$$u_n = J^{A+\sum_{i=1}^{N} T_i^* A_i T_i} \left(y_n + f + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i) \right).$$

8: Cập nhật

$$x_{n+1} = \alpha_n \varphi(x_n) + (1-\alpha_n) u_n. \tag{3.18}$$

9: **end for**

Sự hội tụ mạnh của dãy được tạo bởi thuật toán trên đến nghiệm của bài toán (SCSP-MOE) được trình bày trong định lý sau.

Định lý 3.2.2. *Trong Thuật toán 3.2.1, nếu điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n \|x_n - x_{n-1}\|}{\alpha_n} = 0, \tag{C"}$$

thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới một phần tử $p \in \Omega$, thỏa mãn $p = P_\Omega(\varphi(p))$.

Chứng minh. Trước tiên, chúng tôi chứng minh dãy $\{x_n\}$ bị chặn.

Thật vậy, lấy một điểm bất kỳ $q \in \Omega$. Sử dụng lập luận tương tự như trong chứng minh của Định lý 3.1.2, chúng ta thu được bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned}\gamma\|A(u_n) - f\|^2 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \|A_i(T_i(u_n)) - f_i\|^2 \\ &\leq \langle u_n - q, y_n - u_n\rangle \\ &= \langle u_n - q, y_n - q\rangle - \|u_n - q\|^2 \\ &= \frac{1}{2}(\|u_n - q\|^2 + \|y_n - q\|^2 - \|u_n - y_n\|^2) - \|u_n - q\|^2 \\ &= \frac{1}{2}(\|y_n - q\|^2 - \|u_n - q\|^2 - \|u_n - y_n\|^2). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Từ điều kiện (C"), ta suy ra tồn tại một hằng số $M > 0$ sao cho

$$\frac{t_n\|x_n - x_{n-1}\|}{\alpha_n} \leq M, \text{ với mọi } n.$$

Từ (3.18) và (3.19) ta có

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - q\| &= \|\alpha_n\varphi(x_n) + (1-\alpha_n)u_n - q\| \\ &\leq \alpha_n\|\varphi(x_n) - q\| + (1-\alpha_n)\|u_n - q\| \\ &\leq \alpha_n(\|\varphi(x_n) - \varphi(q)\| + \|\varphi(q) - q\|) + (1-\alpha_n)\|y_n - q\| \\ &\leq \alpha_n(c\|x_n - q\| + \|\varphi(q) - q\|) + (1-\alpha_n)(\|x_n - q\| + t_n\|x_n - x_{n-1}\|) \\ &\leq [1-(1-c)\alpha_n]\|x_n - q\| + (1-c)\alpha_n\frac{\|\varphi(q) - q\| + t_n\|x_n - x_{n-1}\|/\alpha_n}{1-c} \\ &\leq [1-(1-c)\alpha_n]\|x_n - q\| + (1-c)\alpha_n\frac{\|\varphi(q) - q\| + M}{1-c} \\ &\leq \max\left\{\|x_n - q\|, \frac{\|\varphi(q) - q\| + M}{1-c}\right\} \\ &\;\;\vdots \\ &\leq \max\left\{\|x_0 - q\|, \frac{\|\varphi(q) - q\| + M}{1-c}\right\}. \end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là dãy $\{x_n\}$ là dãy bị chặn.

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra một số đánh giá sau.

$$\begin{aligned}\|y_n - q\|^2 &= \|x_n - q + t_n(x_n - x_{n-1})\|^2 \\ &= \|x_n - q\|^2 + 2t_n\langle x_n - q, x_n - x_{n-1}\rangle + t_n^2\|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &= \|x_n - q\|^2 + t_n(\|x_n - q\|^2 + \|x_n - x_{n-1}\|^2 - \|x_{n-1} - q\|^2) + t_n^2\|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &= (t_n + 1)\|x_n - q\|^2 + (t_n^2 + t_n)\|x_n - x_{n-1}\|^2 - t_n\|x_{n-1} - q\|^2.\end{aligned}$$

Vì $t_n \in [0, 1)$, $t_n^2 + t_n \leq 2t_n$ nên ta có

$$\|y_n - q\|^2 \leq (t_n + 1)\|x_n - q\|^2 + 2t_n\|x_n - x_{n-1}\|^2 - t_n\|x_{n-1} - q\|^2. \tag{3.20}$$

Từ (3.18) ta có

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - q\|^2 &= \|\alpha_n(\varphi(x_n) - q) + (1 - \alpha_n)(u_n - q)\|^2 \\ &\leq \alpha_n\|\varphi(x_n) - q\|^2 + (1 - \alpha_n)\|u_n - q\|^2 \\ &\leq \alpha_n(M_1 + \|q\|)^2 + \|u_n - q\|^2,\end{aligned} \tag{3.21}$$

trong đó $M_1 = \sup_n\{\|\varphi(x_n)\|\} < \infty$. Từ (3.19), (3.20) và (3.21), ta được

$$\begin{aligned}2V_n + \|u_n - y_n\|^2 &\leq (\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2) + t_n(\|x_n - q\|^2 - \|x_{n-1} - q\|^2) \\ &\quad + 2t_n\|x_n - x_{n-1}\|^2 + \alpha_n(M_1 + \|q\|)^2 \\ &= (\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2) \\ &\quad + t_n(\|x_n - q\| - \|q - x_{n-1}\|)(\|x_n - q\| + \|x_{n-1} - q\|) \\ &\quad + 2t_n\|x_n - x_{n-1}\|^2 + \alpha_n(M_1 + \|q\|)^2 \\ &\leq (\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2) + 2(M_2 + \|q\|)t_n\|x_n - x_{n-1}\| \\ &\quad + 2M_2t_n\|x_n - x_{n-1}\| + \alpha_n(M_1 + \|q\|)^2 \\ &= (\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2) + 2(2M_2 + \|q\|)t_n\|x_n - x_{n-1}\| \\ &\quad + \alpha_n(M_1 + \|q\|)^2,\end{aligned} \tag{3.22}$$

trong đó $M_2 = \sup_n\{\|x_n\|\} < \infty$ và $V_n = \gamma\|A(u_n) - f\|^2 + \sum_{i=1}^{N}\gamma_i\|A_i(T_i(u_n)) - f_i\|^2$.

Từ Mệnh đề 1.2.15 và giả thiết $\varphi:\ \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ là ánh xạ co với hệ số co c suy ra $P_\Omega\varphi$ là ánh xạ co trên $\mathcal{H}$ với hệ số co c. Vì vậy theo Mệnh đề 1.2.6 tồn tại duy nhất một phần tử p thỏa mãn $p=P_\Omega\varphi(p)\in\Omega$.

Từ (3.18), (3.19) và (3.20) (với $q=p$) ta có

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-p\|^2 &= \langle \alpha_n\varphi(x_n)+(1-\alpha_n)u_n-p, x_{n+1}-p\rangle\\
&= \alpha_n\langle\varphi(x_n)-p, x_{n+1}-p\rangle+(1-\alpha_n)\langle u_n-p, x_{n+1}-p\rangle\\
&= \alpha_n(\langle\varphi(x_n)-\varphi(p), x_{n+1}-p\rangle+\langle\varphi(p)-p, x_{n+1}-p\rangle)\\
&\quad+(1-\alpha_n)\langle u_n-p, x_{n+1}-p\rangle\\
&\le \alpha_n\frac{\|\varphi(x_n)-\varphi(p)\|^2+\|x_{n+1}-p\|^2}{2}+(1-\alpha_n)\frac{\|u_n-p\|^2+\|x_{n+1}-p\|^2}{2}\\
&\quad+\alpha_n\langle\varphi(p)-p, x_{n+1}-p\rangle\\
&\le \frac{\alpha_n c^2\|x_n-p\|^2+\|x_{n+1}-p\|^2}{2}+(1-\alpha_n)\frac{\|y_n-p\|^2}{2}\\
&\quad+\alpha_n\langle\varphi(p)-p, x_{n+1}-p\rangle\\
&\le \frac{\alpha_n c\|x_n-p\|^2+\|x_{n+1}-p\|^2}{2}\\
&\quad+(1-\alpha_n)\frac{(t_n+1)\|x_n-p\|^2+2t_n\|x_n-x_{n-1}\|^2-t_n\|x_{n-1}-p\|^2}{2}\\
&\quad+\alpha_n\langle\varphi(p)-p, x_{n+1}-p\rangle\\
&\le \frac{[1-(1-c)\alpha_n]\|x_n-p\|^2+\|x_{n+1}-p\|^2}{2}\\
&\quad+\frac{t_n(\|x_n-p\|^2-\|x_{n-1}-p\|^2)+2t_n\|x_n-x_{n-1}\|^2}{2}\\
&\quad+\alpha_n\langle\varphi(p)-p, x_{n+1}-p\rangle\\
&\le \frac{[1-(1-c)\alpha_n]\|x_n-p\|^2+\|x_{n+1}-p\|^2}{2}+(3M_2+\|p\|)t_n\|x_n-x_{n-1}\|\\
&\quad+\alpha_n\langle\varphi(p)-p, x_{n+1}-p\rangle.
\end{aligned}$$

Từ đó, ta suy ra

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-p\|^2 &\le [1-(1-c)\alpha_n]\|x_n-p\|^2\\
&\quad+2[(3M_2+\|p\|)t_n\|x_n-x_{n-1}\|+\alpha_n\langle\varphi(p)-p, x_{n+1}-p\rangle]. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Đặt:

$$a_n = \|x_n - p\|^2;$$
$$\sigma_n = (1-c)\alpha_n;$$
$$b_n = \frac{2}{1-c}\left((3M_2 + \|p\|)\frac{t_n\|x_n - x_{n-1}\|}{\alpha_n} + \langle \varphi(p) - p, x_{n+1} - p\rangle\right).$$

Khi đó (3.23) trở thành

$$a_{n+1} \leq (1-\sigma_n)a_n + \sigma_n b_n.$$

Để chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới p, chúng tôi sử dụng Bổ đề 1.5.6. Cụ thể, giả sử $\{a_{n_k}\}$ là một dãy con bất kỳ của dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn

$$\liminf_{k\to\infty}(a_{n_k+1} - a_{n_k}) \geq 0.$$

Từ (3.22) (với $q = p$), $\alpha_n \to 0$ và $t_n\|x_n - x_{n-1}\| \to 0$ ta có

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty}(V_{n_k} + \|u_{n_k} - y_{n_k}\|^2) \\
&\qquad \leq \limsup_{k\to\infty}(a_{n_k} - a_{n_k+1}) \\
&\qquad\quad + \limsup_{k\to\infty}[2(2M_2 + \|p\|)t_{n_k}\|x_{n_k} - x_{n_k-1}\| + (M_1 + \|p\|)^2\alpha_{n_k}] \\
&\qquad = -\liminf_{k\to\infty}(a_{n_k+1} - a_{n_k}) \\
&\qquad \leq 0.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\lim_{k\to\infty} V_{n_k} = 0, \tag{3.24}$$
$$\lim_{k\to\infty} \|u_{n_k} - y_{n_k}\| = 0 \tag{3.25}$$

Từ (3.24), ta suy ra

$$\|A(u_{n_k}) - f\| \to 0, \tag{3.26}$$

$$\|A_i(T_i(u_{n_k})) - f_i\| \to 0, i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.27}$$

Tiếp theo, chúng tôi chứng minh rằng $\limsup_{k\to\infty} b_{n_k} \leq 0$. Giả sử rằng $\{x_{n_{k_l}}\}$ là một dãy con của $\{x_{n_k}\}$ sao cho

$$\limsup_{k\to\infty} \langle \varphi(p) - p, x_{n_k} - p\rangle = \lim_{l\to\infty} \langle \varphi(p) - p, x_{n_{k_l}} - p\rangle. \tag{3.28}$$

Từ tính bị chặn của dãy $\{x_n\}$, ta suy ra tồn tại một dãy con của dãy $\{x_{n_{k_l}}\}$ hội tụ yếu về một phần tử w. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x_{n_{k_l}} \rightharpoonup w$.
Mặt khác, ta có

$$\|y_n - x_n\| = t_n\|x_n - x_{n-1}\| \to 0.$$

Kết hợp với (3.25), ta thu được $\|u_{n_k} - x_{n_k}\| \to 0$. Do đó, $u_{n_{k_l}} \rightharpoonup w$. Từ (3.26), (3.27) và lập luận tương tự như trong chứng minh Định lý 3.1.2, ta suy ra rằng $w \in \Omega$. Do đó, từ (3.28) và Mệnh đề 1.2.14, ta có

$$\limsup_{k\to\infty} \langle \varphi(p) - p, x_{n_k} - p\rangle = \langle \varphi(p) - p, w - p\rangle \leq 0. \tag{3.29}$$

Từ (3.18) và điều kiện $\alpha_n \to 0$, ta có $\|x_{n+1} - u_n\| \to 0$.
Kết hợp với $\|u_{n_k} - x_{n_k}\| \to 0$, ta suy ra rằng

$$\|x_{n_k+1} - x_{n_k}\| \to 0.$$

Do đó, từ (3.29) và điều kiện $t_{n_k}\|x_{n_k} - x_{n_k-1}\| \to 0$, ta được

$$\limsup_{k\to\infty} b_{n_k} \leq 0.$$

Như vậy, tất cả các giả thiết của Bổ đề 1.5.6 đều được thỏa mãn. Từ đó, suy ra $a_n \to 0$, tức là $x_n \to p$ như đã khẳng định.

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.2.3. i) Bằng cách kết hợp thuật toán hội tụ yếu (Thuật toán 3.1.1) với phương pháp xấp xỉ mềm chúng tôi đã chứng minh được sự hội tụ mạnh của dãy lặp sinh bởi Thuật toán 3.2.1 đến nghiệm của bài toán (SCSP-MOE) mà không cần dùng đến thông tin về chuẩn của toán tử chuyển.

ii) Bằng cách làm tương tự như trong mục Ứng dụng và ví dụ số minh họa của Chương 2 (Mục 2.4), chúng ta có thể áp dụng Thuật toán 3.1.1 và Thuật toán 3.2.1 để giải bài toán điểm bất động chung tách với đa tập đầu ra (SCFPP-MOS), bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra (SFP-MOS), bài toán không điểm chung tách với đa tập đầu ra (SCNPP-MOS), bài toán điểm cực tiểu chung tách với đa tập đầu ra (SMPP-MOS) và bài toán khôi phục tín hiệu.

3.3 Ví dụ số minh họa

Trong mục này, chúng tôi đưa ra ba ví dụ số minh họa cho các kết quả của Chương 3, bao gồm một ví dụ về bài toán khôi phục tín hiệu, một ví dụ về bài toán (SMPP-MOS) trong không gian Hilbert hữu hạn chiều và một ví dụ về bài toán (SFP-MOS) trong không gian Hilbert vô hạn chiều.

Ví dụ 3.3.1. Trong ví dụ số này, chúng tôi sử dụng phần mềm MATLAB R2014a chạy trên máy tính `DELL Precision 5560`, sử dụng bộ xử lý Intel(R) Core(TM) i7-11850H thế hệ thứ 11 với xung nhịp 2.50 GHz (16 lõi xử lý) và bộ nhớ RAM 16 GB.

Xét bài toán khôi phục tín hiệu được trình bày trong Mục 2.4.3 với các dữ liệu thử nghiệm được thiết lập như sau.

- Tín hiệu ban đầu có kích thước $n = 100$ với 32 phần tử khác không, được phân bố ngẫu nhiên và lấy mẫu theo phân phối chuẩn.

- Ma trận đo chính A có kích thước $m \times n$ với $m = 40$. Các hàng của ma trận A được chuẩn hóa theo chuẩn Euclid.

- N hệ đo bổ sung, mỗi hệ được thiết lập bao gồm một toán tử tuyến tính bị chặn $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_i}$ và một ma trận lấy mẫu $A_i \in \mathbb{R}^{p_i \times m_i}$, trong đó $m_i \in [50, 100]$ và

$p_i \in [20, 50]$ được chọn ngẫu nhiên. Các hàng của ma trận A_i và T_i lần lượt được chuẩn hóa theo chuẩn Euclid và chuẩn Frobenius.

- Để mô phỏng sai số đo, nhiễu Gauss với phương sai $\sigma^2 = 0.005$ được thêm vào dữ liệu quan sát.

Áp dụng Thuật toán 3.1.1, trong đó các toán tử

$$A = \nabla h, \qquad A_i = \nabla h_i, \qquad f = f_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

ta sẽ nhận được thuật toán tương ứng để giải bài toán (2.42). Cụ thể, với các giá trị khởi tạo x_0, x_1 và x_2 được sinh ngẫu nhiên theo phân phối chuẩn, dãy $\{x_n\}$ được tính bằng công thức lặp

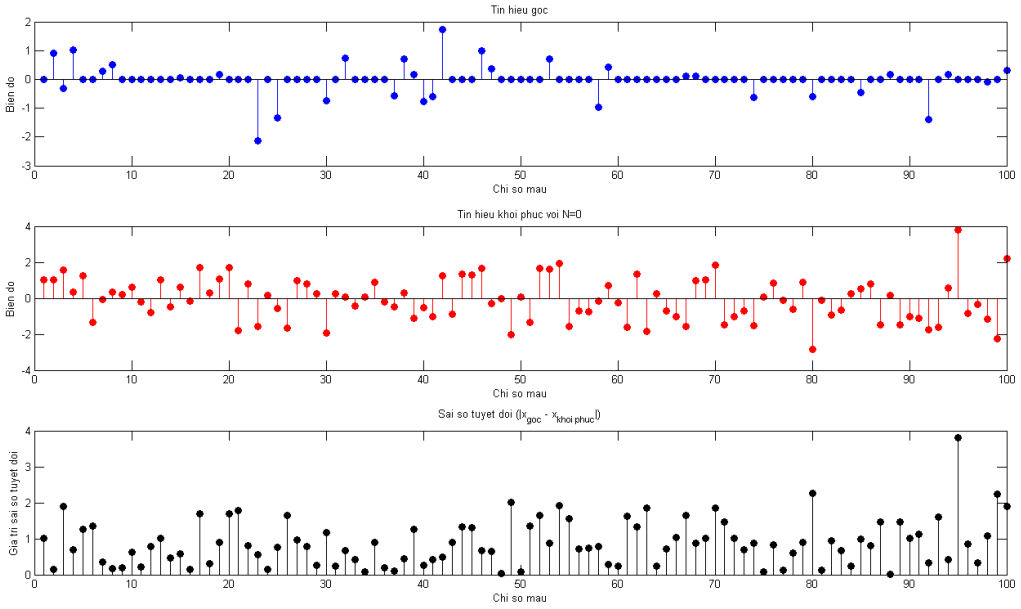
$$x_{n+1} = J^{\nabla h + \sum_{i=1}^{N} T_i^* \nabla h_i T_i}(x_n + t_n(x_n - x_{n-1})). \tag{3.30}$$

Thuật toán dừng khi $\|x_{n+1} - (x_n + t_n(x_n - x_{n-1}))\| < 10^{-5}$ hoặc khi số vòng lặp đạt 1000. Thuật toán được kiểm tra trên 50 lần chạy độc lập, trong đó các đại lượng được ghi nhận bao gồm thời gian tính toán trung bình, sai số trung bình và số bước lặp trung bình. Với việc lựa chọn tham số $t_n = 0.25$, chúng tôi thu được các kết quả số tương ứng với các giá trị khác nhau của N như được trình bày trong Bảng 3.1.

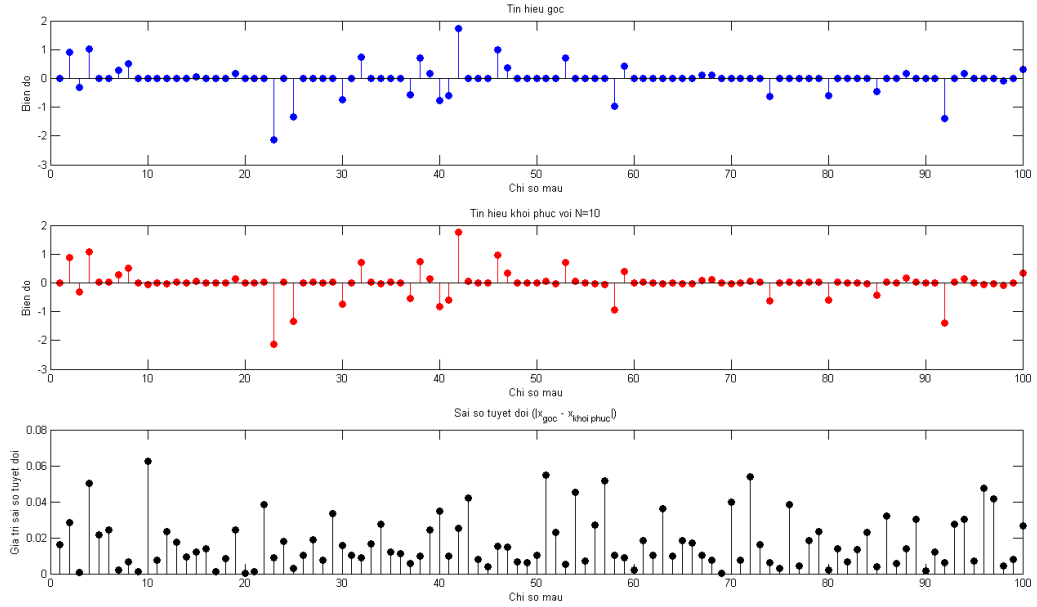
Bảng 3.1: Bảng kết quả số của thuật toán (3.30)

N	Số bước lặp trung bình	Thời gian trung bình (s)	Sai số trung bình
10	367.26	0.054062	0.059542
20	144.82	0.035797	0.023415
30	96.82	0.031199	0.016185
50	55.76	0.023691	0.009343

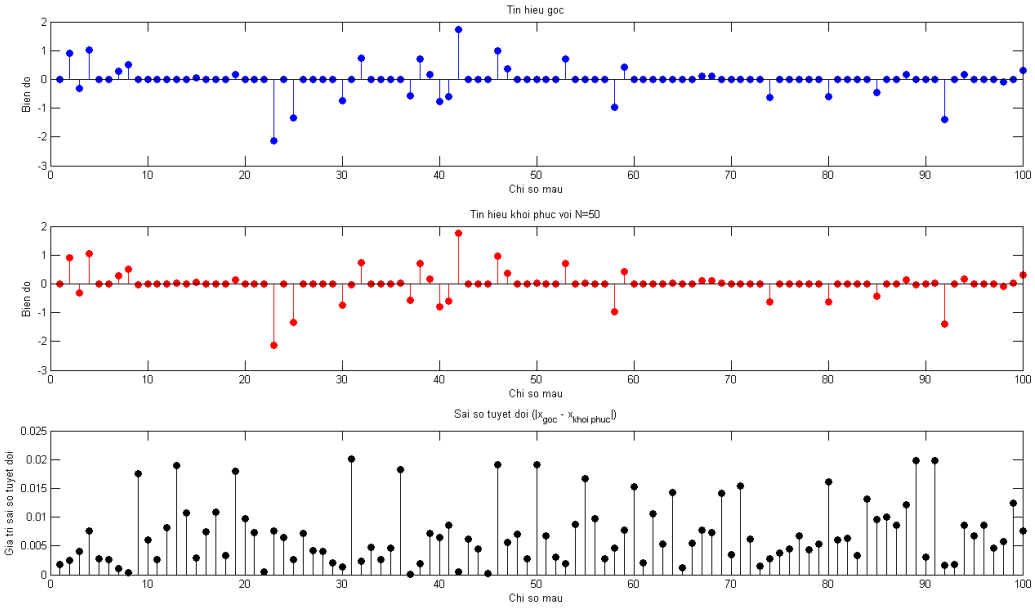
Hình 3.1 minh họa tín hiệu gốc và tín hiệu được khôi phục trong trường hợp bài toán chỉ có một phép đo duy nhất, được cho bởi $b = Ax + \eta$. Trong khi đó, Hình 3.2 và Hình 3.3 lần lượt biểu diễn tín hiệu gốc và tín hiệu được khôi phục trong các trường hợp có bổ sung thêm 10 và 50 phép đo, $b_i = A_i T_i(x) + \nu_i$.



Hình 3.1: Tín hiệu gốc và tín hiệu khôi phục bằng thuật toán (3.30) với $N = 0$



Hình 3.2: Tín hiệu gốc và tín hiệu khôi phục bằng thuật toán (3.30) với $N = 10$



Hình 3.3: Tín hiệu gốc và tín hiệu khôi phục bằng thuật toán (3.30) với $N = 50$

Nhận xét 3.3.2. Quan sát các Hình 3.1–3.3 cho thấy rằng, khi áp dụng Thuật toán (3.30) cho trường hợp bài toán cổ điển ($N = 0$), tín hiệu khôi phục thu được sai lệch nhiều so với tín hiệu gốc. Ngược lại, khi thuật toán được áp dụng cho bài toán với nhiều tập đầu ra ($N = 10$ và $N = 50$), độ chính xác của tín hiệu khôi phục được cải thiện một cách rõ ràng.

Ví dụ 3.3.3. Trong ví dụ số này, chúng tôi sử dụng phần mềm MATLAB R2014a chạy trên máy tính `DELL Precision 5560`, sử dụng bộ xử lý Intel(R) Core(TM) i7-11850H thế hệ thứ 11 với xung nhịp 2.50 GHz (16 lõi xử lý) và bộ nhớ RAM 16 GB.

Xét bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra

$$\text{Tìm } x \in \Omega^\star = C \cap \left(\bigcap_{i=1}^{100} T_i^{-1}(Q_i) \right), \tag{3.31}$$

với các giả thiết sau đây.

(i) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_i = L^2[0,1]$ $(i = 1, 2, \ldots, 100)$ với tích vô hướng được cho bởi

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt, \qquad \forall\, x = x(t),\ y = y(t) \in L^2[0,1],$$

và chuẩn tương ứng được cho bởi

$$\|x\| = \left(\int_0^1 x^2(t)\, dt\right)^{1/2}, \qquad \forall\, x = x(t) \in L^2[0,1].$$

Các tập C và Q_i $(i = 1, 2, \ldots, 100)$ được xác định bởi

$$C = \{\, x \in L^2[0,1] : \langle a, x\rangle = b\,\},$$

$$Q_i = \{\, x \in L^2[0,1] : \langle c_i, x\rangle = d_i\,\},$$

trong đó

$$a(t) = 3t + 2, \quad \forall\, t \in [0,1]; \quad b = 2,$$

$$c_i(t) = t^2 + i, \quad \forall\, t \in [0,1];$$

$$d_i = \frac{1 + 2i}{4i}.$$

(ii) Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, 100$, toán tử $T_i : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ được xác định bởi

$$T_i(x)(t) = \frac{x(t)}{i}, \qquad \forall\, x = x(t) \in L^2[0,1].$$

Khi đó tập $\Omega^\star$ là khác rỗng, vì $x(t) = t \in \Omega^\star$.

Áp dụng Thuật toán 3.1.1 và Thuật toán 3.2.1 ta có hai thuật toán sau để tìm nghiệm gần đúng cho bài toán (3.31).

Thuật toán hội tụ yếu. Với các điểm khởi tạo $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$, tính dãy $\{x_n\}$ theo công thức lặp

$$x_{n+1} = J^{(I-P_C)+\sum_{i=1}^{100} T_i^*(I_i - P_{Q_i})T_i}(x_n + t_n(x_n - x_{n-1})). \tag{3.32}$$

Thuật toán hội tụ mạnh. Với điểm khởi tạo $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$, tính dãy $\{x_n\}$ theo công thức lặp

$$x_{n+1} = \alpha_n \varphi(x_n) + (1 - \alpha_n) u_n, \tag{3.33}$$

trong đó

$$u_n = J^{(I-P_C)+\sum_{i=1}^{100} T_i^*(I_i - P_{Q_i})T_i}(x_n + t_n(x_n - x_{n-1})),$$

và $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là một ánh xạ co.

Trước tiên, chúng tôi chạy thử nghiệm Thuật toán (3.32) (thuật toán hội tụ yếu) với các xấp xỉ đầu là

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0, \quad \forall t \in [0,\, 1],$$

và dãy tham số $\{t_n\}$ được chọn là

$$t_n = \frac{1}{n^2(1 + \|x_n - x_{n-1}\|)}, \quad \forall n \geq 1.$$

Sử dụng điều kiện

$$\varepsilon_n = \|x_{n+1} - x_n - t_n(x_n - x_{n-1})\| < \text{TOL}$$

để dừng quá trình lặp, với TOL là ngưỡng sai số cho trước. Đồng thời, chúng tôi tính toán thêm giá trị

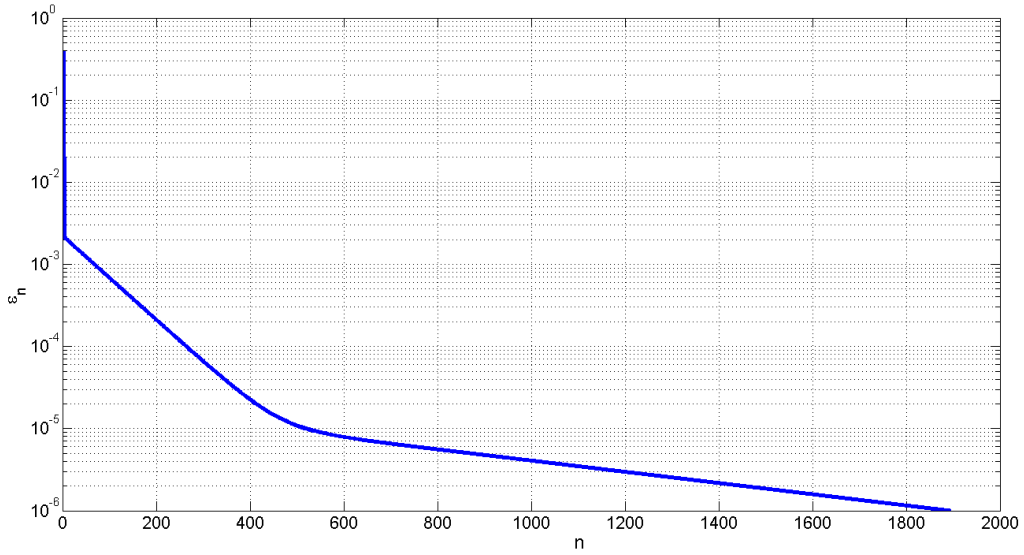
$$\delta_i = \max_i |\langle c_i, T_i(x_n)\rangle - d_i|$$

để kiểm tra sự hội tụ của thuật toán.

Kết quả số được minh họa trong Bảng 3.2. Dáng điệu của ε_n trong trường hợp $\text{TOL} = 10^{-6}$ được minh họa trong Hình 3.4.

Bảng 3.2: Bảng kết quả số của thuật toán hội tụ yếu (3.32)

TOL	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{\varepsilon_n}$	**Thời gian (s)**	$\boldsymbol{\delta_i}$
10^{-3}	68	9.914×10^{-4}	0.0167	1.553×10^{-2}
10^{-4}	264	9.953×10^{-5}	0.0597	1.358×10^{-3}
10^{-5}	519	9.989×10^{-6}	0.1201	2.073×10^{-4}
10^{-6}	1895	9.989×10^{-7}	0.4239	2.512×10^{-5}



Hình 3.4: Dáng điệu của ε_n trong Bảng 3.2 với TOL $= 10^{-6}$

Tiếp theo, chúng tôi kiểm tra sự hội tụ của thuật toán (3.33) (thuật toán hội tụ mạnh) với các xấp xỉ đầu là

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0, \quad \forall t \in [0,\ 1],$$

và các dữ liệu được chọn như sau:

$$\varphi(x) = 0.25x, \quad \alpha_n = \frac{1}{n+1}, \quad t_n = \min\left\{\frac{1}{n^2(1+\|x_n - x_{n-1}\|)}, 0.85\right\}.$$

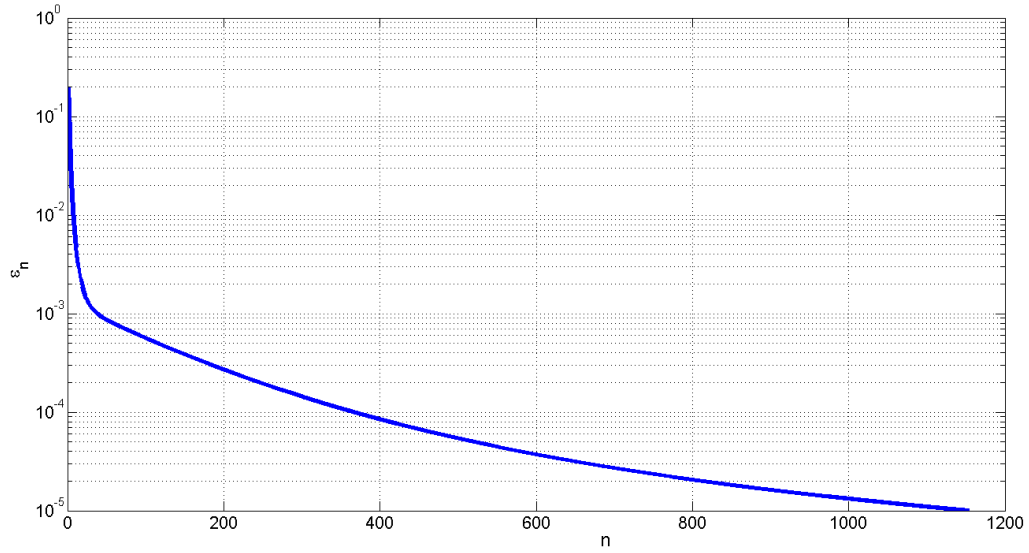
Sử dụng điều kiện

$$\varepsilon_n = \|x_{n+1} - x_n\| < \text{TOL},$$

để dừng quá trình lặp, với TOL là ngưỡng sai số cho trước. Kết quả số được minh họa trong Bảng 3.3 (trong đó $\delta_i = \max_i |\langle c_i, T_i(x_n)\rangle - d_i|$). Dáng điệu của ε_n trong trường hợp TOL $= 10^{-5}$ được minh họa trong Hình 3.5.

Bảng 3.3: Bảng kết quả số của thuật toán hội tụ mạnh (3.33)

TOL	n	ε_n	**Thời gian (s)**	δ_i
10^{-2}	8	8.833×10^{-3}	0.0024	9.430×10^{-2}
10^{-3}	38	9.982×10^{-4}	0.0098	2.357×10^{-2}
10^{-4}	367	9.968×10^{-5}	0.0829	4.871×10^{-3}
10^{-5}	1154	9.995×10^{-6}	0.2670	1.391×10^{-3}



Hình 3.5: Dáng điệu của ε_n trong Bảng 3.3 với TOL $= 10^{-5}$

Ví dụ 3.3.4. Trong ví dụ này, các thuật toán được chạy bằng phần mềm MATLAB 2014a trên máy tính `DESKTOP-9RLTPS0`, sử dụng bộ xử lý Intel(R) Core(TM) i5-10210U CPU @ 1.60 GHz với bộ nhớ RAM 8 GB.

Trong ví dụ này chúng tôi giải lại bài toán điểm cực tiểu tách với đa tập đầu ra (2.37) của Ví dụ 2.4.10 bằng hai thuật toán của Chương 3.

Áp dụng Thuật toán 3.1.1 và Thuật toán 3.2.1 ta có hai thuật toán sau để tìm nghiệm gần đúng cho bài toán (2.37).

Thuật toán hội tụ yếu. Với các điểm khởi tạo $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$, tính dãy $\{x_n\}$ theo công thức lặp

$$x_{n+1} = J^{\nabla g + \sum_{i=1}^{4} T_i^* \nabla g_i T_i}(x_n + t_n(x_n - x_{n-1})), \quad n \geq 1. \tag{3.34}$$

Thuật toán hội tụ mạnh. Với các điểm khởi tạo $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$, tính dãy $\{x_n\}$ theo công thức lặp

$$x_{n+1} = \alpha_n \varphi(x_n) + (1 - \alpha_n)u_n, \tag{3.35}$$

trong đó

$$u_n = J^{\nabla g + \sum_{i=1}^{4} T_i^* \nabla g_i T_i}(x_n + t_n(x_n - x_{n-1})), \quad n \geq 1,$$

và $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là một ánh xạ co.

Chúng tôi kiểm tra sự hội tụ của thuật toán hội tụ yếu (3.34) với các xấp xỉ đầu

$$x_0 = (1, 2, 3, 4, 5), \ x_1 = (2, 3, 4, 5, 6)$$

và dãy tham số $\{t_n\}$ được chọn là

$$t_n = \frac{1}{(3 + n^2)(1 + \|x_n - x_{n-1}\|^2)} \ \text{ hoặc } \ t_n = 0 \ \ \forall n \geq 1.$$

Sử dụng điều kiện

$$\varepsilon_n = \|x_{n+1} - x_n - t_n(x_n - x_{n-1})\| < \text{TOL}$$

để dừng quá trình lặp, với TOL là ngưỡng sai số cho trước. Kết quả số được minh họa trong Bảng 3.4. Giá trị của $\nabla g(x_n)$ và $\nabla g_i(T_i(x_n))$, $i = 1, 2, 3, 4$ trong trường hợp

$$\text{TOL} = 10^{-8} \text{ và } t_n = \frac{1}{(3 + n^2)(1 + \|x_n - x_{n-1}\|^2)},$$

được chỉ ra trong Bảng 3.5.

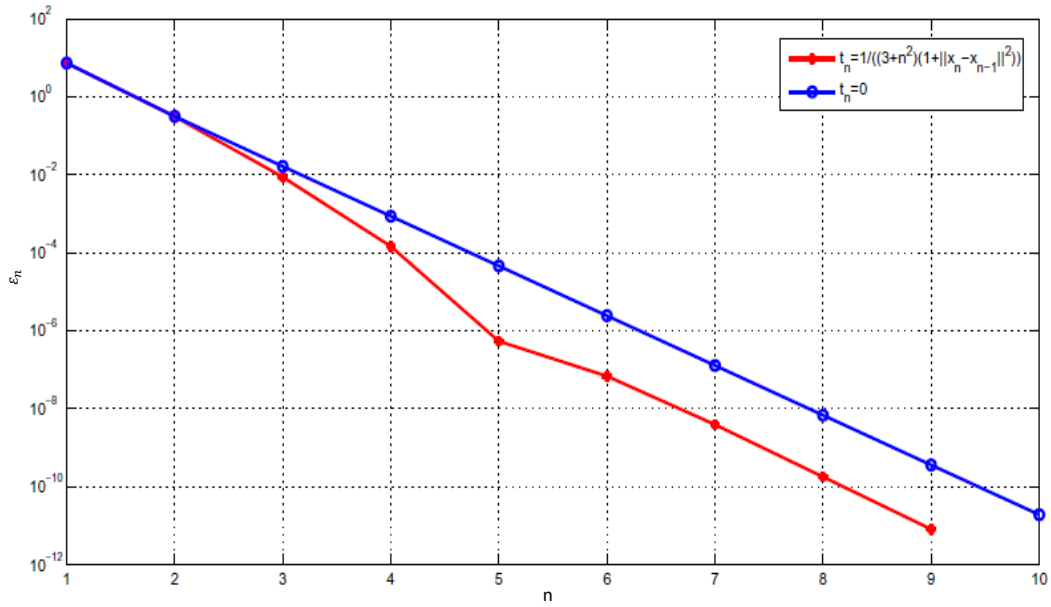
Dáng điệu của hàm ε_n trong Bảng 3.4 được trình bày trong Hình 3.6.

Bảng 3.4: Bảng kết quả số của thuật toán hội tụ yếu (3.34)

TOL	$\boldsymbol{t_n = \dfrac{1}{(3+n^2)(1+\|x_n - x_{n-1}\|^2)}}$			$\boldsymbol{t_n = 0}$		
	ε_n	n	Thời gian (s)	ε_n	n	Thời gian (s)
10^{-8}	3.8978×10^{-9}	7	23×10^{-5}	6.7732×10^{-9}	8	11×10^{-4}
10^{-9}	1.7828×10^{-10}	8	13×10^{-4}	3.5879×10^{-10}	9	15×10^{-4}
10^{-10}	8.0750×10^{-11}	9	15×10^{-4}	1.9005×10^{-12}	10	16×10^{-4}

Bảng 3.5: Bảng giá trị của $\nabla g(x_n)$ và $\nabla g_i(T_i(x_n))$ trong Ví dụ 3.3.1

	$x_n = (2.7521, 2.2688, -0.5604, 1.2417, 1.4396)^\top$
$\nabla g(x_n)$	$(0.0596, -0.0596, 0.1193, -0.0596, 0.1193)^\top \times 10^{-9}$
$\nabla g_1(T_1 x_n)$	$(-0.4849, -0.9698)^\top \times 10^{-9}$
$\nabla g_2(T_2 x_n)$	$(0.0545, -0.1089, 0.0545)^\top \times 10^{-8}$
$\nabla g_3(T_3 x_n)$	$(-0.4252, -0.4252, 0.4252, -0.4252)^\top \times 10^{-9}$
$\nabla g_4(T_4 x_n)$	$(-0.3656, 0, 0.3656, 0, -0.7312, 0.3656)^\top \times 10^{-9}$



Hình 3.6: Dáng điệu của ε_n trong Bảng 3.4 với TOL $= 10^{-10}$

Nhận xét 3.3.5. i) Từ Bảng 3.5, ta thấy có thể chọn $p = x_n$ làm nghiệm xấp xỉ cho bài toán.

ii) Ta thấy rằng quá trình lặp dừng tại lần lặp thứ $n^\star$ với

$$n^\star << n_{\max} = \frac{2(1+\theta^2)(1+\theta-\theta^2)}{(1-\theta)(1-3\theta)\mathrm{TOL}}\|x_0 - p\|^2.$$

Điều này dẫn đến câu hỏi: liệu chúng ta có thể đưa ra một đánh giá tốt hơn để thay thế giá trị

$$n_{\max} = \frac{2(1+\theta^2)(1+\theta-\theta^2)}{(1-\theta)(1-3\theta)\mathrm{TOL}}\|x_0 - p\|^2?$$

Tiếp theo, chúng tôi kiểm tra sự hội tụ của thuật toán hội tụ mạnh (3.35) với dữ liệu được chọn như sau:

$$\varphi(x) = \frac{x}{10} \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^5, \quad \alpha_n = \frac{1}{n}.$$

Trong trường hợp này, dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến

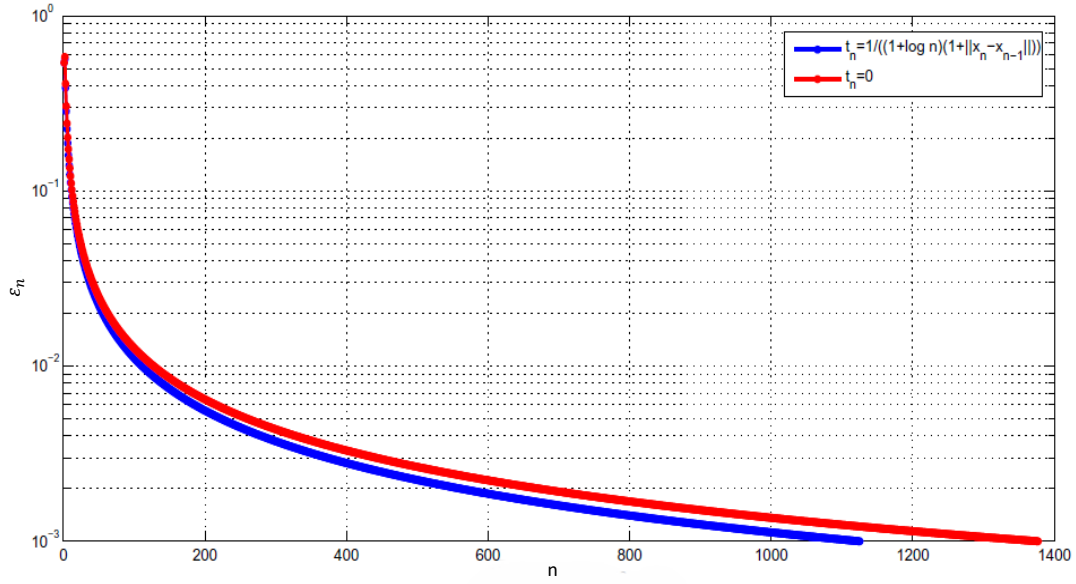
$$p = P_{\Omega^*}(0) = (-0.24, 0.24, 0.56, 0.76, 0.56)^\top.$$

Do đó, chúng tôi sử dụng điều kiện $\varepsilon_n = \|x_n - p\| < \mathrm{TOL}$ để dừng quá trình lặp. Với các điểm đầu được chọn là $x_0 = (1,2,3,4,5)$, $x_1 = (2,3,4,5,6)$, kết quả số được minh họa trong Bảng 3.6).

Bảng 3.6: Bảng kết quả số của thuật toán hội tụ mạnh (3.35)

TOL	$\boldsymbol{t_n = \frac{1}{(n\log n+1)(1+\|x_n - x_{n-1}\|)}}$			$\boldsymbol{t_n = 0}$		
	ε_n	n	Thời gian (s)	ε_n	n	Thời gian (s)
10^{-2}	9.9102×10^{-3}	112	0.0017	10.0100×10^{-3}	128	0.0021
10^{-3}	9.9948×10^{-4}	1125	0.0113	9.9987×10^{-4}	1377	0.0157
10^{-4}	9.9994×10^{-5}	11458	0.0930	9.9999×10^{-5}	15287	0.1215

Dáng điệu của ε_n trong Bảng 3.6 được minh họa trong Hình 3.7.



Hình 3.7: Dáng điệu của ε_n trong Bảng 3.6 với TOL $= 10^{-3}$

Tiếp theo, chúng tôi so sánh thuật toán của mình với hai thuật toán của Reich và các cộng sự trong [54]. Chúng tôi kiểm tra sự hội tụ của dãy $\{x_n\}$ được tạo ra bởi Thuật toán 3.1 hoặc Thuật toán 3.4 trong [54] với các dữ liệu sau:

$$x_0 = (1, 2, 3, 4, 5),\ \beta_{i,n} = 0.2,\ r_{i,n} = 1,\ \theta_{i,n} = 0.00001,\ \rho_{i,n} = 1.95$$

với mọi $i = 0, 1, 2, 3, 4,$ và

$$f(x) = \frac{x}{10} \quad \text{với mọi} \quad x \in \mathbb{R}^5, \quad \alpha_n = \frac{1}{n}.$$

Sử dụng điều kiện

$$\varepsilon_n = \|x_n - p\| < \text{TOL}$$

để dừng quá trình lặp, với TOL là ngưỡng sai số cho trước. Các kết quả được minh họa trong Bảng 3.7.

Bảng 3.7: Bảng kết quả số của Thuật toán 3.1 và Thuật toán 3.4 trong [54].

TOL	**Thuật toán 3.1**			**Thuật toán 3.4**		
	ε_n	n	Thời gian (s)	ε_n	n	Thời gian (s)
10^{-2}	9.9722×10^{-3}	208	0.0045	9.9039×10^{-3}	159	0.0124
10^{-3}	9.9997×10^{-4}	3715	0.0549	9.9935×10^{-4}	1887	0.0697
10^{-4}	9.9999×10^{-5}	1447528	20.8387	9.9999×10^{-5}	920046	30.2716

Nhận xét 3.3.6. Trong ví dụ này, với các tham số được chọn như trên, thuật toán của chúng tôi cho kết quả hội tụ tốt hơn so với Thuật toán 3.1 hoặc Thuật toán 3.4 trong [54] về số lần lặp và thời gian CPU.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Trong chương này, dựa trên phương pháp điểm gần kề quán tính, chúng tôi đã đề xuất hai thuật toán lặp để giải bài toán (SCSP-MOE) trong không gian Hilbert. Đặc biệt, các thuật toán của chúng tôi không phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển. Cụ thể, chúng tôi đã phân tích sự hội tụ yếu và tốc độ hội tụ bậc $O(1/\sqrt{n})$ của Thuật toán 3.1.1. Tiếp theo, bằng cách kết hợp thuật toán hội tụ yếu với phương pháp xấp xỉ mềm chúng tôi đã đưa ra được Thuật toán hội tụ mạnh 3.2.1 với chứng minh chi tiết trong Định lý 3.2.2.

Ngoài ra, chúng tôi cũng đã đưa ra các ví dụ số minh họa cho việc áp dụng Thuật toán 3.1.1 và Thuật toán 3.2.1 để giải bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra, bài toán điểm cực tiểu chung tách và bài toán khôi phục tín hiệu. Trong các ví dụ số này, thuật toán mới của chúng tôi hội tụ tốt hơn một số thuật toán đã có trước đó.

Những kết quả của Chương 3 đồng thời gợi mở hướng phát triển các thuật toán mới dựa trên phương pháp điểm gần kề kết hợp thành phần quán tính cho các chương tiếp theo.

Chương 4

Hai thuật toán chiếu với đa thành phần quán tính giải bài toán (SCSP-MOE)

Trong chương này, chúng tôi trình bày hai thuật toán chiếu xoay vòng cho bài toán (SCSP-MOE), được xây dựng dựa trên phương pháp điểm gần kề kết hợp với đa thành phần quán tính và kỹ thuật chiếu lai ghép hoặc chiếu co hẹp. Tính hội tụ mạnh của hai thuật toán sẽ lần lượt được chứng minh trong các định lý. Phần cuối của chương trình bày hai ví dụ số minh họa cho các kết quả lý thuyết, đồng thời so sánh với một số thuật toán đã có trước đó, qua đó minh họa tính hiệu quả của các thuật toán đề xuất. Các kết quả của chương này được trình bày dựa trên nội dung của bài báo (CT3).

4.1 Thuật toán chiếu lai ghép

Trong chương này, để thuận tiện cho việc trình bày thuật toán và chứng minh định lý, chúng tôi biểu diễn bài toán (SCSP-MOE) như sau.

Tìm phần tử $p \in \Omega$ với các giả thiết:

(O1) $i \in J = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, $\mathcal{H}_i$ là một không gian Hilbert thực và $f_i \in \mathcal{H}_i$ là một phần tử cho trước.

(O2) Với mỗi $i \in J$, $A_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$ là toán tử γ_i-đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}_i$.

(O3) $T_0 = I_0$ là ánh xạ đồng nhất trên $\mathcal{H}_0$, $T_j : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ là các toán tử tuyến tính bị chặn với toán tử liên hợp tương ứng là $T_j^* : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_0$.

(O4) $\Omega = \bigcap_{i\in J} \Omega_{A_i} \neq \emptyset$, trong đó $\Omega_{A_i} = \{p \in \mathcal{H}_0 : A_i(T_i(p)) = f_i\}$ với mỗi $i \in J$.

Trong Chương 3, các thuật toán được xây dựng theo phương pháp điểm gần kề quán tính, trong đó sử dụng một thành phần quán tính ở vế phải để tìm nghiệm gần đúng của bài toán (SCSP-MOE). Trong một số trường hợp cụ thể, điều này đã được chỉ ra là giúp cải thiện và tăng tốc độ hội tụ so với các thuật toán không có thành phần quán tính. Bên cạnh đó, một số kết quả gần đây cũng cho thấy việc sử dụng đa thành phần quán tính có thể mang lại hiệu quả hội tụ tốt hơn so với trường hợp chỉ dùng một thành phần quán tính (xem [29, 38] và các tài liệu tham khảo liên quan).

Trong nghiên cứu các bài toán chấp nhận tách, một trong những hướng tiếp cận tự nhiên để giải quyết bài toán này là dựa trên các phép chiếu, do đặc tính đơn giản và dễ triển khai. Ý tưởng này đã được khởi xướng từ công trình kinh điển của J. von Neumann vào năm 1933 (xem [76]) về chiếu luân phiên cho hai tập con lồi, sau đó đến năm 1967, L. Gubin và các cộng sự (xem [32]) mở rộng cho nhiều tập con lồi. Cách tiếp cận này đặt nền tảng cho *phương pháp chiếu xoay vòng (cyclic projection method)* được nghiên cứu rộng rãi trong các công trình sau này. Ý tưởng chính của phương pháp chiếu xoay vòng là thực hiện phép chiếu tuần tự qua các tập lồi theo một quy tắc vòng lặp cố định, thay vì xử lý đồng thời tất cả các điều kiện. Hướng nghiên cứu này không những giúp đơn giản hóa quá trình tính toán mà còn có thể đảm bảo tính hội tụ mạnh trong nhiều lớp bài toán, điển hình như bài toán điểm bất động chung (xem [9, 10]) và bài toán chấp nhận tách đa tập hợp (xem [79]).

Bằng cách kết hợp thuật toán chiếu xoay vòng với đa thành phần quán tính, chúng tôi xây dựng thuật toán sau để giải bài toán (SCSP-MOE). Đặc biệt, thuật toán của chúng tôi sử dụng *ánh xạ điều khiển chỉ số (index control mapping)* nhằm tăng tính linh hoạt trong việc xác định thứ tự cũng như cách thức lựa chọn các ánh xạ tại mỗi bước lặp.

Trước hết, chúng tôi nhắc lại khái niệm ánh xạ điều khiển chỉ số. Ánh xạ $c : \mathbb{N} \to J$, với $J = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ được gọi là ánh xạ điều khiển chỉ số nếu với mỗi $i \in J$, tồn tại

một số tự nhiên M_i sao cho

$$i \in \{c(n), c(n+1), \ldots, c(n+M_i-1)\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ví dụ như, ánh xạ $c : \mathbb{N} \to J$ được định nghĩa bởi

$$c(n) = n \mod (N+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

là một ánh xạ điều khiển chỉ số.

Thuật toán đầu tiên được xây dựng qua các bước sau.

Thuật toán 4.1.1 Thuật toán chiếu lai ghép

1: Chọn các dãy số thực bị chặn $\{\ell_{t,n}\}$, với $t = 1, 2, \ldots, k$.

2: Chọn tùy ý các điểm khởi tạo

$$x_{-k}, x_{-(k-1)}, \ldots, x_{-1}, x_0 \in \mathcal{H}_0.$$

3: **for** $n = 0, 1, 2, \ldots$ **do**

4: Tính

$$y_n = x_n + \sum_{t=1}^{k} \ell_{t,n}\big(x_{n+1-t} - x_{n-t}\big).$$

5: Tìm $z_n \in \mathcal{H}_0$ thỏa mãn

$$T^*_{c(n)}\big(A_{c(n)}(T_{c(n)}(z_n))\big) - T^*_{c(n)}(f_{c(n)}) + z_n = y_n. \tag{4.1}$$

6: Xác định

$$C_n = \{a \in \mathcal{H}_0 \,|\, \|z_n - a\| \le \|y_n - a\|\}, \tag{4.2}$$

$$Q_n = \{b \in \mathcal{H}_0 \,|\, \langle x_0 - x_n,\ b - x_n\rangle \le 0\}. \tag{4.3}$$

7: Cập nhật

$$x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0). \tag{4.4}$$

8: **end for**

Mệnh đề sau đây chỉ ra sự tồn tại duy nhất của z_n trong công thức (4.1).

Mệnh đề 4.1.2. *Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, phương trình* (4.1) *có nghiệm duy nhất z_n.*

Chứng minh. Với mỗi $x \in \mathcal{H}_0$, ta định nghĩa toán tử $\mathcal{G} : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ như sau

$$\mathcal{G}(x) = T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(x))) + I_0(x),$$

trong đó I_0 là ánh xạ đồng nhất trên $\mathcal{H}_0$.

Từ tính đơn điệu mạnh ngược của các toán tử (giả thiết O2), ta suy ra

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{G}(x) - \mathcal{G}(y),\, x - y\rangle \\
&\qquad = \langle T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(x))) - T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(y))),\ x - y\rangle + \|x - y\|^2 \\
&\qquad = \langle A_{c(n)}(T_{c(n)}(x)) - A_{c(n)}(T_{c(n)}(y)),\ T_{c(n)}(x) - T_{c(n)}(y)\rangle + \|x - y\|^2 \\
&\qquad \geq \gamma_{c(n)}\|A_{c(n)}(T_{c(n)}(x)) - A_{c(n)}(T_{c(n)}(y))\|^2 + \|x - y\|^2 \\
&\qquad \geq 0.
\end{aligned}$$

Vậy, $\mathcal{G}$ là một toán tử đơn điệu trên $\mathcal{H}_0$.

Từ tính liên tục Lipschitz của toán tử đơn điệu mạnh ngược, ta có

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}(x) - \mathcal{G}(y)\| &= \|T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(x))) - T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(y))) + x - y\| \\
&\leq \|T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(x))) - T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(y)))\| + \|x - y\| \\
&\leq \|T^*_{c(n)}\|\|A_{c(n)}(T_{c(n)}(x)) - A_{c(n)}(T_{c(n)}(y))\| + \|x - y\| \\
&\leq \frac{1}{\gamma_{c(n)}}\|T_{c(n)}\|\|T_{c(n)}(x) - T_{c(n)}(y)\| + \|x - y\| \\
&\leq \left(\frac{1}{\gamma_{c(n)}}\|T_{c(n)}\|^2 + 1\right)\|x - y\|.
\end{aligned}$$

Từ đó, ta suy ra $\mathcal{G}$ là một toán tử liên tục Lipschitz trên $\mathcal{H}_0$ với hệ số

$$L = \frac{1}{\gamma_{c(n)}}\|T_{c(n)}\|^2 + 1.$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{G}(x), x\rangle &= \langle \mathcal{G}(x) - \mathcal{G}(0), x - 0\rangle + \langle \mathcal{G}(0), x\rangle \\
&= \langle T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(x))) - T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(0))), x - 0\rangle + \|x\|^2 + \langle \mathcal{G}(0), x\rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle A_{c(n)}(T_{c(n)}(x)) - A_{c(n)}(T_{c(n)}(0)), T_{c(n)}(x) - T_{c(n)}(0)\rangle + \|x\|^2 + \langle \mathcal{G}(0), x\rangle$$
$$\geq \|x\|^2 - \|\mathcal{G}(0)\|\|x\|.$$

Từ đó, ta suy ra

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\langle \mathcal{G}(x), x\rangle}{\|x\|} \geq \lim_{\|x\|\to\infty} (\|x\| - \|\mathcal{G}(0)\|) = \infty.$$

Tức là, $\mathcal{G}$ là một toán tử bức trên $\mathcal{H}_0$. Từ các kết quả trên, ta có thể kết luận rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}$, phương trình (4.1) luôn có nghiệm z_n nhờ vào Bổ đề 1.5.3.

Tiếp theo, chúng tôi chứng minh tính duy nhất của z_n. Giả sử w_n cũng là một nghiệm của phương trình (4.1), tức là

$$T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(w_n))) - T^*_{c(n)}(f_{c(n)}) + w_n = y_n.$$

Kết hợp với (4.1), ta có

$$T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(z_n))) - T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(w_n))) + (z_n - w_n) = 0.$$

Điều này dẫn đến

$$0 = \langle z_n - w_n,\ T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(z_n))) - T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(w_n))) + (z_n - w_n)\rangle$$
$$= \|z_n - w_n\|^2 + \langle z_n - w_n,\ T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(z_n))) - T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(w_n)))\rangle$$
$$= \|z_n - w_n\|^2 + \langle T_{c(n)}(z_n) - T_{c(n)}(w_n),\ A_{c(n)}(T_{c(n)}(z_n)) - A_{c(n)}(T_{c(n)}(w_n))\rangle$$
$$\geq \|z_n - w_n\|^2 + \gamma_{c(n)}\|A_{c(n)}(T_{c(n)}(z_n)) - A_{c(n)}(T_{c(n)}(w_n))\|^2.$$

Do đó, ta suy ra $z_n = w_n$.

Mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề sau đây chỉ ra sự tồn tại của dãy $\{x_n\}$ được tạo bởi Thuật toán 4.1.1.

Mệnh đề 4.1.3. *Dãy $\{x_n\}$ trong Thuật toán 4.1.1 được xác định tốt.*

Chứng minh. Các biểu thức (4.2) và (4.3) có thể được viết lại dưới dạng sau

$$C_n = \left\{ a \in \mathcal{H}_0 : \langle y_n - z_n,\ a \rangle \leq \frac{\|y_n\|^2 - \|z_n\|^2}{2} \right\},$$
$$Q_n = \{ b \in \mathcal{H}_0 : \langle x_0 - x_n,\ b \rangle \leq \langle x_0 - x_n,\ x_n \rangle \}.$$

Do đó, cả hai tập C_n và Q_n đều là các nửa không gian đóng trong $\mathcal{H}_0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì vậy, chúng là các tập lồi và đóng trong $\mathcal{H}_0$.

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra $\Omega \subset C_n \cap Q_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Thật vậy, lấy tùy ý $p \in \Omega$, khi đó

$$A_i(T_i(p)) = f_i, \quad \forall i \in J. \tag{4.5}$$

Ta nhận thấy rằng

$$\langle z_n - p,\ y_n - p \rangle = \frac{1}{2} \left(\|z_n - p\|^2 + \|y_n - p\|^2 - \|z_n - y_n\|^2 \right). \tag{4.6}$$

Mặt khác, từ (4.1), (4.5) và (O2), ta có

$$\begin{aligned}
\langle z_n - p,\ y_n - p \rangle &= \langle z_n - p,\ T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(z_n))) - T^*_{c(n)}(f_{c(n)}) + z_n - p \rangle \\
&= \langle z_n - p,\ T^*_{c(n)}(A_{c(n)}(T_{c(n)}(z_n))) - T^*_{c(n)}(f_{c(n)}) \rangle + \|z_n - p\|^2 \\
&= \langle T_{c(n)}(z_n) - T_{c(n)}(p), A_{c(n)}(T_{c(n)}(z_n)) - A_{c(n)}(T_{c(n)}(p)) \rangle + \|z_n - p\|^2 \\
&\geq \gamma_{c(n)} \|A_{c(n)}(T_{c(n)}(z_n)) - A_{c(n)}(T_{c(n)}(p))\|^2 + \|z_n - p\|^2. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Từ (4.6) và (4.7), ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\|^2 &\leq \|y_n - p\|^2 - \|z_n - y_n\|^2 - 2\gamma_{c(n)} \|A_{c(n)}(T_{c(n)}(z_n)) - f_{c(n)}\|^2 \qquad (4.8) \\
&\leq \|y_n - p\|^2. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng $p \in C_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Tiếp theo, với $n = 0$, rõ ràng rằng $\Omega \subset Q_0 = \mathcal{H}_0$. Giả sử $\Omega \subset Q_n$ với $n \geq 0$. Từ (4.4) và Mệnh đề 1.2.14, ta có

$$\langle x_0 - x_{n+1},\ w - x_{n+1} \rangle \leq 0, \quad \forall w \in C_n \cap Q_n.$$

Do đó, từ $p \in C_n \cap Q_n$ ta được

$$\langle x_0 - x_{n+1},\ p - x_{n+1} \rangle \leq 0,$$

suy ra $p \in Q_{n+1}$. Áp dụng nguyên lý quy nạp toán học, ta suy ra rằng $p \in Q_n$ với mọi $n \geq 0$, tức là $\Omega \subset Q_n$ với mọi $n \geq 0$.

Do đó, ta kết luận rằng $\Omega \subset C_n \cap Q_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, như đã khẳng định. Tức là, $C_n \cap Q_n$ là khác rỗng. Do đó, phép chiếu $P_{C_n \cap Q_n}(x_0)$ tồn tại và x_{n+1} được xác định. Mệnh đề được chứng minh. □

Sự hội tụ mạnh của dãy $\{x_n\}$ sinh bởi Thuật toán 4.1.1 được thiết lập trong định lý sau.

Định lý 4.1.4. *Dãy $\{x_n\}$ sinh bởi Thuật toán 4.1.1 hội tụ mạnh đến một phần tử $x_* \in \Omega$ thỏa mãn $x_* = P_\Omega(x_0)$.*

Chứng minh. Chúng tôi chia quá trình chứng minh thành nhiều bước. Trước hết, chọn tùy ý $p \in \Omega$.

Bước 1. Chứng minh các dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$ bị chặn. Thật vậy, từ (4.3), ta có $x_n = P_{Q_n}(x_0)$. Do đó,

$$\|x_n - x_0\| \leq \|x_0 - p\|, \quad \forall n \geq 0. \tag{4.10}$$

Như vậy, dãy $\{x_n\}$ bị chặn. Từ đó, ta cũng có các dãy $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$ cũng bị chặn nhờ vào công thức (4.1) và (4.9).

Bước 2. Chỉ ra dãy $\{x_n\}$ là chính qui tiệm cận, nghĩa là

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0.$$

Vì $x_{n+1} \in Q_n$ và $x_n = P_{Q_n}(x_0)$ nên theo Mệnh đề 1.2.15 ta có

$$\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq \|x_{n+1} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2, \quad \forall n \geq 0. \tag{4.11}$$

Điều này cho thấy dãy $\{\|x_n - x_0\|\}$ là dãy tăng với mọi $n \geq 0$. Vì $\{x_n\}$ bị chặn, ta

suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = l.$$

Kết hợp với công thức (4.11), ta thu được điều cần chứng minh.

Bước 3. Chỉ ra các giới hạn sau tồn tại

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - y_n\| = 0, \tag{4.12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0, \tag{4.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - z_n\| = 0. \tag{4.14}$$

Từ định nghĩa của y_n, ta có

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - y_n\| &= \left\| x_{n+1} - x_n + \sum_{t=1}^{k} \ell_{t,n}(x_{n+1-t} - x_{n-t}) \right\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \sum_{t=1}^{k} |\ell_{t,n}| \|x_{n+1-t} - x_{n-t}\|.\end{aligned}$$

Sử dụng kết luận của Bước 2 và giả thiết dãy số thực $\{\ell_{t,n}\}$ bị chặn, ta suy ra sự tồn tại của giới hạn (4.12) như đã khẳng định.

Mặt khác, vì $x_{n+1} \in C_n$, ta có

$$\|z_n - x_{n+1}\| \leq \|y_n - x_{n+1}\|.$$

Do đó,

$$\|z_n - x_{n+1}\| \to 0. \tag{4.15}$$

Từ kết luận của Bước 2, (4.12) và (4.15), cùng với các bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned}\|x_n - z_n\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_{n+1} - z_n\|, \\ \|y_n - z_n\| &\leq \|x_{n+1} - y_n\| + \|x_{n+1} - z_n\|,\end{aligned}$$

ta cũng suy ra được các giới hạn (4.13) và (4.14), như đã khẳng định.

Bước 4. Chứng minh mọi điểm tụ yếu của dãy $\{x_n\}$ đều thuộc tập Ω.

Giả sử $\hat{p}$ là một điểm tụ yếu bất kỳ của dãy $\{x_n\}$. Khi đó tồn tại một dãy con $\{x_{m_n}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho

$$x_{m_n} \rightharpoonup \hat{p}.$$

Với mỗi $i \in J$, tồn tại một số tự nhiên M_i sao cho

$$i \in \{c(m_n),\ c(m_n+1),\ c(m_n+2),\ \ldots,\ c(m_n+M_i-1)\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Khi cần thiết, ta có thể loại bỏ một số phần tử khỏi dãy con $\{x_{m_n}\}$ để thu được một dãy con mới (cũng ký hiệu là $\{x_{m_n}\}$) sao cho

$$m_{n+1} \geq m_n + M_i.$$

Khi đó tồn tại một dãy con khác $\{x_{p_n}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho

$$m_n \leq p_n \leq m_n + M_i - 1 < m_{n+1} \leq p_{n+1}, \quad \text{với } i = c(p_n).$$

Hơn nữa, ta có thể thấy rằng

$$\|x_{p_n} - x_{m_n}\| \leq \sum_{j=m_n}^{m_n+M_i-2} \|x_{j+1} - x_j\| \leq (M_i - 1) \max_{m_n \leq j \leq m_n+M_i-2} \|x_{j+1} - x_j\|.$$

Từ Bước 2, ta có $\|x_{p_n} - x_{m_n}\| \to 0$. Từ đó, ta suy ra $x_{p_n} \rightharpoonup \hat{p}$ và do đó từ (4.13) ta thu được $z_{p_n} \rightharpoonup \hat{p}$. Vì T_i là toán tử tuyến tính bị chặn nên ta có

$$T_i(z_{p_n}) \rightharpoonup T_i(\hat{p}). \tag{4.16}$$

Tiếp theo, chú ý rằng $A_{c(p_n)} = A_i$, $T_{c(p_n)} = T_i$ với mọi $n \geq 1$, và

$$\begin{aligned}
0 &\leq \gamma_i \|A_i(T_i(z_{p_n})) - A_i(T_i(\hat{p}))\|^2 \\
&\leq \langle A_i(T_i(z_{p_n})) - A_i(T_i(\hat{p})),\ T_i(z_{p_n}) - T_i(\hat{p})\rangle \\
&= \langle A_i(T_i(z_{p_n})) - f_i,\ T_i(z_{p_n}) - T_i(\hat{p})\rangle + \langle f_i - A_i(T_i(\hat{p})),\ T_i(z_{p_n}) - T_i(\hat{p})\rangle
\end{aligned}$$

$$\leq \|A_i(T_i(z_{p_n})) - f_i\|\|T_i(z_{p_n}) - T_i(\hat{p})\| + \langle f_i - A_i(T_i(\hat{p})),\ T_i(z_{p_n}) - T_i(\hat{p})\rangle$$
$$\leq K_1\|T_i\|\|A_i(T_i(z_{p_n})) - f_i\| + \langle f_i - A_i(T_i(\hat{p})),\ T_i(z_{p_n}) - T_i(\hat{p})\rangle, \tag{4.17}$$

trong đó $K_1 = \sup_n \|z_{p_n} - \hat{p}\|$. Mặt khác, từ (4.8), ta có

$$\begin{aligned}\gamma_i\|A_i(T_i(z_{p_n})) - f_i\|^2 &\leq \frac{1}{2}(\|y_{p_n} - p\|^2 - \|z_{p_n} - p\|^2)\\ &= \frac{1}{2}(\|y_{p_n} - p\| - \|z_{p_n} - p\|)(\|y_{p_n} - p\| + \|z_{p_n} - p\|)\\ &\leq K_2\|y_{p_n} - z_{p_n}\|,\end{aligned}$$

với $K_2 = \frac{1}{2}\sup_n(\|y_{p_n} - p\| + \|z_{p_n} - p\|)$. Kết hợp với (4.14), ta suy ra

$$\|A_i(T_i(z_{p_n})) - f_i\| \to 0. \tag{4.18}$$

Do đó, từ (4.16), (4.17) và (4.18), ta suy ra rằng

$$\|A_i(T_i(z_{p_n})) - A_i(T_i(\hat{p}))\| \to 0.$$

Kết hợp điều này với (4.18), ta suy ra $A_i(T_i(\hat{p})) = f_i$. Vì $i \in J$ là phần tử tùy ý, nên ta có $\hat{p} \in \Omega$.

Bước 5. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $x_* = P_\Omega(x_0)$.

Giả sử rằng $\{x_{q_n}\}$ là một dãy con của $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến q. Từ Bước 4, ta suy ra $q \in \Omega$. Hơn nữa, vì $x_* = P_\Omega(x_0)$ và $q \in \Omega$, từ (4.10) và Mệnh đề 1.1.4, ta có

$$\begin{aligned}\|x_* - x_0\| &\leq \|q - x_0\|\\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\|x_{q_n} - x_0\|\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\|x_{q_n} - x_0\|\\ &\leq \|x_* - x_0\|.\end{aligned}$$

Sử dụng tính duy nhất của điểm gần nhất x_*, ta suy ra rằng $x_* = q$. Hơn nữa, ta có

$$\|x_{q_n} - x_0\| \to \|x_* - x_0\|.$$

Từ Mệnh đề 1.1.5, ta được $x_{q_n} \to x_*$. Tiếp tục sử dụng tính duy nhất của x_*, ta kết luận rằng $x_n \to x_*$ khi $n \to \infty$.

Định lý được chứng minh. □

4.2 Thuật toán chiếu co hẹp

Trong mục này, chúng tôi đề xuất một biến thể của Thuật toán 4.1.1 bằng cách sử dụng phương pháp chiếu co hẹp để giải bài toán (SCSP-MOE).

Thuật toán 4.2.1 Thuật toán chiếu co hẹp

1: Chọn các dãy số thực bị chặn $\{\ell_{t,n}\}$, với $t = 1, 2, \ldots, k$.

2: Chọn tùy ý các điểm khởi tạo

$$x_{-k}, x_{-(k-1)}, \ldots, x_{-1}, x_0 \in \mathcal{H}_0,$$

và đặt $\mathcal{W}_{-1} = \mathcal{H}_0$.

3: **for** $n = 0, 1, 2, \ldots$ **do**

4: Tính

$$y_n = x_n + \sum_{t=1}^{k} \ell_{t,n}\big(x_{n+1-t} - x_{n-t}\big).$$

5: Tìm $z_n \in \mathcal{H}_0$ thỏa mãn

$$T^*_{c(n)}\big(A_{c(n)}(T_{c(n)}(z_n))\big) - T^*_{c(n)}(f_{c(n)}) + z_n = y_n.$$

6: Xác định

$$\mathcal{W}_n = \{a \in \mathcal{W}_{n-1} \,|\, \|z_n - a\| \leq \|y_n - a\|\}.$$

7: Cập nhật

$$x_{n+1} = P_{\mathcal{W}_n}(x_0).$$

8: **end for**

Định lý sau đây trình bày về sự hội tụ mạnh của dãy lặp được xây dựng trong thuật toán trên đến nghiệm của bài toán (SCSP-MOE).

Định lý 4.2.2. *Dãy $\{x_n\}$ sinh bởi Thuật toán 4.2.1 hội tụ mạnh đến một phần tử $x_\star \in \Omega$ thỏa mãn $x_\star = P_\Omega(x_0)$.*

Chứng minh. Định lý được chứng minh qua các bước sau.

Bước 1. Chỉ ra $\Omega \subset \mathcal{W}_n$ với mọi $n \geq 0$.

Dễ thấy rằng $\mathcal{W}_n$ là một tập đóng và lồi của $\mathcal{H}_0$ với mọi $n \geq 0$. Sử dụng lập luận tương tự như trong chứng minh Mệnh đề 4.1.3, và bằng phương pháp quy nạp toán học, ta cũng suy ra rằng $\Omega \subset \mathcal{W}_n$ với mọi $n \geq 0$.

Do đó, dãy $\{x_n\}$ được xác định.

Bước 2. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến một phần tử $x^\dagger$ nào đó trong $\mathcal{H}_0$.

Với mỗi $p \in \Omega \subset \mathcal{W}_n$, từ $x_{n+1} = P_{\mathcal{W}_n}(x_0)$ ta có

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|p - x_0\|, \tag{4.19}$$

suy ra dãy $\{x_n\}$ bị chặn.

Với mọi $m \geq n \geq 1$, do $x_m \in \mathcal{W}_{m-1} \subset \mathcal{W}_{n-1}$ và $x_n = P_{\mathcal{W}_{n-1}}(x_0)$ nên theo Mệnh đề 1.2.15, ta có

$$\|x_m - x_n\|^2 \leq \|x_m - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2 \to 0 \tag{4.20}$$

khi $n, m \to \infty$. Điều này suy ra rằng dãy $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy. Do đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến một phần tử $x^\dagger$ nào đó, như đã khẳng định.

Bước 3. Chỉ ra các giới hạn sau đây tồn tại:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0, \tag{4.21}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - y_n\| = 0, \tag{4.22}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0, \tag{4.23}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - z_n\| = 0. \tag{4.24}$$

Từ (4.20), ta thu được giới hạn (4.21) như đã khẳng định. Hơn nữa, bằng cách sử dụng lập luận tương tự như trong Bước 3 trong chứng minh của Định lý 4.1.4, ta cũng thu được các giới hạn (4.22), (4.23) và (4.24) như trên.

Bước 4. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $x_\star = P_\Omega(x_0)$.

Vì $x_n \to x^\dagger$ nên từ (4.23) và (4.24) ta suy ra $y_n \to x^\dagger$ và $z_n \to x^\dagger$. Bằng cách sử dụng lập luận tương tự như trong Bước 4 trong chứng minh Định lý 4.1.4, ta cũng suy ra rằng $x^\dagger \in \Omega$.

Cuối cùng, áp dụng (4.19) và cho $n \to \infty$, ta được

$$\|x^\dagger - a_0\| \leq \|x_\star - a_0\|.$$

Từ định nghĩa của phép chiếu mêtric ta có

$$x^\dagger = x_\star.$$

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 4.2.3. (i) Trong một số công trình trước đây (chẳng hạn như bài báo [35]), các thuật toán giải bài toán (SCSP-MOE) yêu cầu sử dụng thông tin về hệ số đơn điệu mạnh ngược của các toán tử – một tham số thường khó xác định trong thực tế. Ngược lại, hai thuật toán được đề xuất trong chương 4 (Thuật toán 4.1.1 và Thuật toán 4.2.1) được xây dựng mà không phụ thuộc vào tham số này, nhờ đó có tính linh hoạt cao và phạm vi ứng dụng rộng rãi hơn.

(ii) Các thuật toán trước đây như trong [35], (CT1) cần giải một phương trình liên quan đến tổng tất cả các toán tử để tính x_{n+1} tại mỗi bước lặp. Hai thuật toán được đề xuất trong chương này chỉ yêu cầu tính toán với từng toán tử T_i và A_i tại mỗi bước lặp, qua đó làm giảm đáng kể độ phức tạp tính toán.

(iii) Áp dụng cách làm tương tự như trong mục Ứng dụng và ví dụ số minh họa của Chương 2 vào Thuật toán 4.1.1 và Thuật toán 4.2.1 chúng ta sẽ thu được các thuật toán tương ứng để giải bài toán điểm bất động chung tách với đa tập đầu ra, bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra và bài toán không điểm chung tách với đa tập đầu ra.

4.3 Ví dụ số minh họa

Trong mục này, tất cả các thuật toán được triển khai bằng phần mềm MATLAB R2014a và thực thi trên máy tính DESKTOP-8LDGIN0, sử dụng bộ vi xử lý Intel(R) Core(TM) i5-4210U tốc độ 1.70GHz (tối đa 2.40GHz) cùng bộ nhớ RAM 16GB.

Ví dụ 4.3.1. Xét bài toán điểm cực tiểu tách với đa tập đầu ra:

$$\text{Tìm } x \in \Omega^* = \bigcap_{i=0}^{3} T_i^{-1}(\operatorname{Argmin} g_i). \tag{4.25}$$

Với các dữ liệu sau:

(i) Các toán tử chi phí $g_0 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R},\ g_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ và $g_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là các hàm lồi và khả vi Fréchet, được xác định như sau:

$$\begin{aligned}
g_0(x) &= (x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 - 1)^2, \qquad \forall\, x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5,\\
g_1(y) &= (y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 - 1)^2, \qquad \forall\, y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4,\\
g_2(z) &= (2z_1 - z_2 + z_3 - 1)^2, \qquad \forall\, z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3,\\
g_3(t) &= (t_1 + t_2 - 1)^2, \qquad \forall\, t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

(ii) $T_0 = I_0$ là toán tử đồng nhất trên $\mathbb{R}^5$.

Các toán tử chuyển $T_1 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $T_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ và $T_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ được xác định tương ứng như sau:

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= (x_1 + x_2 - 4x_5,\ 2x_3 - x_4 + x_5,\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4,\ 2x_2 + 3x_5),\\
T_2(x) &= (x_1 - x_2 + x_4,\ -2x_3 + 2x_4 - x_5,\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4),\\
T_3(x) &= (x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5,\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5),
\end{aligned}$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$.

Khi đó, tập nghiệm của bài toán là

$$\Omega^* = \{\, x = (5 - 3t,\ -4,\ 2,\ 1 + t,\ t) \in \mathbb{R}^5 \mid t \in \mathbb{R} \,\}.$$

Sử dụng Thuật toán 4.1.1 và Thuật toán 4.2.1 với các toán tử A_i lần lượt được thay bằng $I_i - J^{\partial g_i}$, $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, trong đó

$$J^{\partial g_i} = (I_i + \partial g_i)^{-1}, \qquad i = 0, 1, 2, 3,$$

với I_1, I_2 và I_3 lần lượt là các toán tử đồng nhất trên $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$, chúng tôi thu được các thuật toán tương ứng để giải bài toán (4.25).

Trong ví dụ này, chúng tôi sử dụng ánh xạ điều khiển chỉ số

$$c(n) = n \mod 4,$$

và chọn các điểm đầu là:

$$\begin{aligned} x_{-3} &= (3, 0, 3, 0, 3), \\ x_{-2} &= (2, 1, 2, 1, 2), \\ x_{-1} &= (1, 2, 1, 2, 1), \\ x_0 &= (-4, 0, 4, 0, -4). \end{aligned}$$

Ngoài ra, dễ thấy rằng

$$x_* = P_{\Omega^*}(x_0) = (-1,\ -4,\ 2,\ 3,\ 2).$$

Chúng tôi cũng so sánh hai thuật toán trên với Thuật toán 2 và Thuật toán 3 trong [35](viết tắt là ALGO-H1 và ALGO-H2).

Quy tắc dừng cho tất cả các thuật toán là

$$\varepsilon_n = \|x_n - x_*\| < \text{TOL},$$

trong đó TOL là ngưỡng sai số cho trước.

Các kết quả tính toán được trình bày trong Bảng 4.1, Bảng 4.2 và Bảng 4.3.

Bảng 4.1: Bảng kết quả số của Thuật toán 4.1.1 cho Ví dụ 4.3.1

Bộ tham số	**TOL**	n	ε_n	**Thời gian** (s)
$\ell_{1,n} = 1,\ \ell_{2,n} = -3,\ \ell_{3,n} = 2$	10^{-4}	114	9.9000×10^{-5}	0.2854
	10^{-5}	130	9.9781×10^{-6}	0.3011
	10^{-6}	146	9.3456×10^{-7}	0.3232
$\ell_{1,n} = 50,\ \ell_{2,n} = -25,\ \ell_{3,n} = 100$	10^{-4}	134	9.0839×10^{-5}	0.2949
	10^{-5}	150	9.1640×10^{-6}	0.3569
	10^{-6}	166	8.8274×10^{-7}	0.3900
$\ell_{1,n} = 100,\ \ell_{2,n} = -30,\ \ell_{3,n} = -10$	10^{-4}	164	9.3564×10^{-5}	0.3636
	10^{-5}	188	8.0723×10^{-6}	0.4018
	10^{-6}	206	9.9109×10^{-7}	0.4511
$\ell_{1,n} = 1000/n,\ \ell_{2,n} = -50,\ \ell_{3,n} = 25$	10^{-4}	119	9.0477×10^{-5}	0.2712
	10^{-5}	135	9.1169×10^{-6}	0.3115
	10^{-6}	151	8.4995×10^{-7}	0.3393

Bảng 4.2: Bảng kết quả số của Thuật toán 4.2.1 cho Ví dụ 4.3.1

Bộ tham số	**TOL**	n	ε_n	**Thời gian** (s)
$\ell_{1,n} = 1,\ \ell_{2,n} = -3,\ \ell_{3,n} = 2$	10^{-4}	72	9.9920×10^{-5}	0.4212
	10^{-5}	83	7.7280×10^{-6}	0.5535
	10^{-6}	95	6.5143×10^{-7}	0.7336
$\ell_{1,n} = 50,\ \ell_{2,n} = -25,\ \ell_{3,n} = 100$	10^{-4}	123	8.4315×10^{-5}	0.6706
	10^{-5}	135	7.6039×10^{-6}	0.8289
	10^{-6}	147	7.1771×10^{-7}	0.9956
$\ell_{1,n} = 100,\ \ell_{2,n} = -30,\ \ell_{3,n} = -10$	10^{-4}	151	4.7631×10^{-5}	1.1650
	10^{-5}	161	9.8930×10^{-6}	1.3968
	10^{-6}	175	6.4232×10^{-7}	1.6950
$\ell_{1,n} = 1000/n,\ \ell_{2,n} = -50,\ \ell_{3,n} = 25$	10^{-4}	95	6.7640×10^{-5}	0.4592
	10^{-5}	106	8.0157×10^{-6}	0.5611
	10^{-6}	115	8.7889×10^{-7}	0.6583

Bảng 4.3: Bảng kết quả số của hai thuật toán trong [35]

TOL	$\boldsymbol{\theta_n}$	**Thuật toán**	**n**	$\boldsymbol{\varepsilon_n}$	**Thời gian (s)**
10^{-4}	50	ALGO-H1	1607	9.9735×10^{-5}	5.3989
		ALGO-H2	303	9.9301×10^{-5}	1.6858
	100	ALGO-H1	3202	9.9604×10^{-5}	11.3877
		ALGO-H2	325	8.8377×10^{-5}	2.1084
	$1000/n$	ALGO-H1	263	9.1738×10^{-5}	1.5724
		ALGO-H2	319	9.6868×10^{-5}	2.1917
10^{-5}	50	ALGO-H1	1826	9.9617×10^{-6}	5.9028
		ALGO-H2	362	9.9748×10^{-6}	2.4305
	100	ALGO-H1	3638	9.9611×10^{-6}	13.3407
		ALGO-H2	384	9.8051×10^{-6}	3.0366
	$1000/n$	ALGO-H1	281	9.1894×10^{-6}	1.6091
		ALGO-H2	373	9.0063×10^{-6}	2.9550
10^{-6}	50	ALGO-H1	2040	9.9300×10^{-7}	7.3342
		ALGO-H2	448	9.6430×10^{-7}	3.9373
	100	ALGO-H1	4065	9.9030×10^{-7}	14.9199
		ALGO-H2	474	9.4845×10^{-7}	5.0596
	$1000/n$	ALGO-H1	298	9.2445×10^{-7}	1.6584
		ALGO-H2	431	8.3679×10^{-7}	3.7227

Ví dụ 4.3.2. Trong ví dụ này, chúng tôi xét bài toán (SFP-MOS)

$$\text{Tìm } p \in \overline{\Omega} = U_0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{3} T_i^{-1}(U_i) \right), \tag{4.26}$$

với các giả thiết sau:

(i) Với mỗi $i = 0, 1, 2, 3$, không gian $\mathcal{H}_i$ được chọn là $\mathcal{H}_i = L^2[0, 1]$, được trang bị tích vô hướng và chuẩn tương ứng lần lượt là

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt, \qquad \|x\| = \left(\int_0^1 x^2(t)\, dt \right)^{1/2},$$

với mọi $x(t), y(t) \in L^2[0, 1]$.

(ii) Tập hợp U_i (với $i = 0, 1, 2, 3$) được định nghĩa bởi

$$U_i = \{\, x \in L^2[0,1] \mid \langle a_i, x\rangle = b_i \,\},$$

trong đó các hàm a_i và b_i được cho bởi

$$\begin{aligned} a_i &= \cos((i+1)t), \\ b_i &= \frac{(i+1)\sin(i+1) + \cos((i+1)) - 1}{(i+1)^3}, \qquad \forall t \in [0,1]. \end{aligned}$$

(iii) Toán tử T_0 là ánh xạ đồng nhất trên $L^2[0,1]$, tức $T_0 = I_0$.

Với mỗi $i = 1, 2, 3$, toán tử tuyến tính bị chặn $T_i : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ được định nghĩa bởi

$$T_i(x)(t) = \frac{x(t)}{i+1}, \qquad \forall x(t) \in L^2[0,1].$$

Ta dễ dàng thấy rằng $\overline{\Omega}$ khác rỗng vì $x(t) = t \in \Omega$.

Từ Nhận xét 4.2.3 (iii), chúng tôi áp dụng Thuật toán 4.1.1 và Thuật toán 4.2.1 trong đó các toán tử A_i tương ứng được thay bởi $I - P_{U_i}$, $i = 0, 1, 2, 3$ để tìm nghiệm gần đúng cho bài toán (4.26). Chúng tôi sử dụng ánh xạ điều khiển chỉ số

$$c(n) = n \mod 4,$$

và chọn các điểm đầu

$$\begin{aligned} x_{-3}(t) &= \sin t, \qquad x_{-2}(t) = \cos t, \\ x_{-1}(t) &= e^t, \qquad x_0(t) = \sqrt{t}, \qquad \forall t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Ngoài ra, chúng tôi cũng so sánh hai thuật toán trên với một số thuật toán trước đây: Thuật toán 5.2 trong [26] (ký hiệu ALGO-C), Thuật toán 1.5 và 1.6 trong [52] (ký hiệu ALGO-R1 và ALGO-R2), và Thuật toán 4.10 trong [77] (ký hiệu ALGO-W). Với mọi $t \in [0,1]$ và $x \in L^2[0,1]$, các tham số của từng thuật toán được chọn như sau:

- ALGO-C: $\alpha_n = \dfrac{1}{n}, \quad \tau = \dfrac{0.05}{1 + \sum_{i=1}^{3} \|T_i\|^2}, \quad u(t) = t + 1.$

- ALGO-R1: $\gamma_n = \dfrac{0.0005}{3\max_{0\le i\le 3}\{\|T_i\|^2\}}$.
- ALGO-R2: $\gamma_n = \dfrac{0.1}{3\max_{0\le i\le 3}\{\|T_i\|^2\}}, \quad \alpha_n = \dfrac{1}{n^{0.75}}, \quad f(x)(t) = 0.5\,x(t)$.
- ALGO-W: $\gamma_n = \dfrac{1}{n^{0.75}}, \quad f(x)(t) = 0.5\,x(t)$.

Quy tắc dừng được sử dụng cho tất cả các thuật toán là

$$\varepsilon_n = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} \|T_i(x_n) - P_{U_i}(T_i(x_n))\|^2 < \text{TOL},$$

trong đó TOL là ngưỡng sai số cho trước.

Các kết quả số được trình bày trong Bảng 4.4, Bảng 4.5 và Bảng 4.6.

Bảng 4.4: Bảng kết quả số của Thuật toán 4.1.1 cho Ví dụ 4.3.2

Bộ tham số	**TOL**	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{\varepsilon_n}$	**Thời gian (s)**
$\ell_{1,n} = -1,\ \ell_{2,n} = -2,\ \ell_{3,n} = -3$	10^{-4}	52	9.5057×10^{-5}	0.2188
	10^{-5}	70	8.7951×10^{-6}	0.2639
	10^{-6}	171	9.8082×10^{-7}	0.4298
$\ell_{1,n} = 1,\ \ell_{2,n} = 2,\ \ell_{3,n} = 3$	10^{-4}	12	7.7042×10^{-5}	0.1527
	10^{-5}	25	9.5718×10^{-6}	0.1782
	10^{-6}	322	9.5877×10^{-7}	0.7363
$\ell_{1,n} = -10,\ \ell_{2,n} = 20,\ \ell_{3,n} = -3$	10^{-4}	42	5.9390×10^{-5}	0.2031
	10^{-5}	61	3.0716×10^{-6}	0.2363
	10^{-6}	160	9.4149×10^{-7}	0.4026
$\ell_{1,n} = -10,\ \ell_{2,n} = 20,\ \ell_{3,n} = 3$	10^{-4}	37	4.9442×10^{-5}	0.1873
	10^{-5}	89	4.3360×10^{-6}	0.2877
	10^{-6}	269	9.7636×10^{-7}	0.6195

Bảng 4.5: Bảng kết quả số của Thuật toán 4.2.1 cho Ví dụ 4.3.2

Bộ tham số	**TOL**	n	ε_n	**Thời gian**(s)
$\ell_{1,n} = -1,\ \ell_{2,n} = -2,\ \ell_{3,n} = -3$	10^{-4}	36	7.8498×10^{-5}	0.2664
	10^{-5}	65	9.4747×10^{-6}	0.5076
	10^{-6}	106	9.4637×10^{-7}	1.2527
$\ell_{1,n} = 1,\ \ell_{2,n} = 2,\ \ell_{3,n} = 3$	10^{-4}	11	6.4461×10^{-5}	0.1730
	10^{-5}	25	9.4475×10^{-6}	0.2365
	10^{-6}	41	6.1331×10^{-7}	0.3728
$\ell_{1,n} = -10,\ \ell_{2,n} = 20,\ \ell_{3,n} = -3$	10^{-4}	36	7.8754×10^{-5}	0.2928
	10^{-5}	50	9.5896×10^{-6}	0.4035
	10^{-6}	76	9.1679×10^{-7}	0.7797
$\ell_{1,n} = -10,\ \ell_{2,n} = 20,\ \ell_{3,n} = 3$	10^{-4}	32	9.0814×10^{-5}	0.2751
	10^{-5}	48	8.7057×10^{-6}	0.4083
	10^{-6}	72	8.7536×10^{-7}	0.7357

Bảng 4.6: Bảng kết quả số của một số thuật toán trong [26, 52, 77]

TOL	**Thuật toán**	n	ε_n	**Thời gian (s)**
10^{-4}	ALGO-C	18 980	9.9994×10^{-5}	0.4136
	ALGO-R1	35 148	9.9999×10^{-5}	1.2278
	ALGO-R2	16 733	9.9993×10^{-5}	1.1826
	ALGO-W	572	9.9985×10^{-5}	0.2361
10^{-5}	ALGO-C	60 420	9.9998×10^{-6}	1.3188
	ALGO-R1	304 782	9.9999×10^{-6}	10.4006
	ALGO-R2	81 820	9.9998×10^{-6}	2.9567
	ALGO-W	2686	9.9959×10^{-6}	1.0471
10^{-6}	ALGO-C	191 291	9.9999×10^{-7}	4.1379
	ALGO-R1	577 617	9.9999×10^{-7}	19.8820
	ALGO-R2	411 309	9.9999×10^{-7}	14.7744
	ALGO-W	13 288	9.9997×10^{-7}	5.0946

Nhận xét 4.3.3. Từ Bảng 4.1–4.6, có thể thấy trong hai ví dụ trên, Thuật toán 4.1.1 và Thuật toán 4.2.1 không những đảm bảo độ chính xác yêu cầu mà còn thể hiện ưu thế về tốc độ hội tụ và hiệu quả tính toán so với các phương pháp đã công bố trong [26, 35, 52, 77]. Đặc biệt, khi ngưỡng sai số giảm xuống mức nhỏ, ưu điểm của các thuật toán đề xuất càng được thể hiện rõ rệt. Kết quả này góp phần củng cố cơ sở thực nghiệm cho các kết luận lý thuyết đã được trình bày trong các mục trước của chương.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 4

Trong chương này, chúng tôi đã trình bày về hai thuật toán chiếu xoay vòng, được xây dựng dựa trên phương pháp chiếu lai ghép và phương pháp chiếu co hẹp kết hợp với đa thành phần quán tính, đồng thời sử dụng ánh xạ điều khiển chỉ số nhằm nâng cao tính linh hoạt của quá trình lặp.

Các thuật toán được đề xuất không cần đến thông tin về chuẩn của các toán tử chuyển, cũng như không phụ thuộc vào hệ số đơn điệu mạnh ngược của các toán tử chi phí. Điều này giúp tránh được công việc ước lượng các tham số kỹ thuật phức tạp, vốn thường là một khó khăn trong quá trình triển khai thực tế của nhiều thuật toán trước đây.

Các kết quả thu được trong ví dụ số cho thấy, đối với trường hợp đang xét, các thuật toán được đề xuất cho hiệu quả tốt hơn so với một số thuật toán đã được công bố trước đó.

Những kết quả đạt được trong chương này góp phần mở rộng hướng nghiên cứu về các thuật toán chiếu giải bài toán nghiệm chung tách trong không gian Hilbert, đồng thời tạo tiền đề cho các nghiên cứu tiếp theo liên quan đến việc phát triển và ứng dụng các thuật toán chiếu hiện đại cho các lớp bài toán mở rộng khác.

Kết luận

Luận án này tập trung nghiên cứu một số phương pháp lặp để giải "Bài toán nghiệm chung tách cho lớp phương trình toán tử đơn điệu với đa tập đầu ra (SCSP-MOE)" trong không gian Hilbert. Bài toán này là một mô hình tổng quát của lớp bài toán chấp nhận tách. Do đó, nó có nhiều ý nghĩa lý thuyết và tiềm năng ứng dụng trong tối ưu hóa, cân bằng, xử lý tín hiệu và một số lĩnh vực khác.

Những đóng góp chính của luận án có thể tóm tắt như sau:

- Luận án đã xây dựng *thuật toán hiệu chỉnh Tikhonov ẩn* và *thuật toán hiệu chỉnh Tikhonov hiện* cho bài toán SCSP-MOE, đồng thời chứng minh được tính hội tụ mạnh của cả hai thuật toán. Đây là những kết quả mới, mở rộng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov sang một lớp bài toán tổng quát hơn. Ngoài ra, các thuật toán còn được chứng minh là ổn định trước nhiễu, góp phần nâng cao tính ứng dụng.

- Luận án đề xuất *hai thuật toán điểm gần kề quán tính* (bao gồm một thuật toán hội tụ yếu và một thuật toán hội tụ mạnh), được phát triển trên cơ sở kết hợp kỹ thuật quán tính và phương pháp xấp xỉ mềm. Các thuật toán này giải bài toán (SCSP-MOE) mà không cần đến thông tin về chuẩn của các toán tử chuyển – một ưu điểm nổi bật giúp giảm khó khăn khi tính toán.

- Luận án đã xây dựng *thuật toán chiếu xoay vòng* dựa trên phương pháp chiếu lai ghép và chiếu co hẹp, sử dụng ánh xạ điều khiển chỉ số cho bài toán (SCSP-MOE). Các thuật toán đều cho kết quả hội tụ mạnh mà không cần dùng đến thông tin về chuẩn của các toán tử chuyển hay hệ số đơn điệu mạnh ngược của các toán tử

chi phí. Bên cạnh đó, tại mỗi bước lặp các thuật toán được đề xuất chỉ yêu cầu tính toán với từng toán tử chuyển và từng toán tử chi phí tương ứng thay vì tính toán liên quan đến tổng của tất cả các toán tử như một số thuật toán khác. Đây là một hướng tiếp cận tinh gọn hơn so với một số phương pháp khác.

Bên cạnh những đóng góp về mặt lý thuyết, luận án cũng thực hiện các ví dụ số minh họa và so sánh với nhiều thuật toán trong một số tài liệu. Kết quả số cho thấy các thuật toán được đề xuất không chỉ hội tụ ổn định mà còn cho hiệu năng vượt trội trong nhiều trường hợp cụ thể.

Nhìn chung, các kết quả thu được trong luận án góp phần làm phong phú thêm lý thuyết về bài toán chấp nhận tách cũng như các phương pháp lặp trong không gian Hilbert. Đồng thời, luận án mở ra những hướng nghiên cứu tiếp theo liên quan đến việc phát triển các phương pháp lặp mạnh hơn, nhanh hơn và có khả năng mở rộng cho các mô hình bài toán tổng quát hơn và phức tạp hơn.

Danh mục các công trình liên quan đến luận án

(CT1) Reich, S., Tuyen, T. M., & Huyen, P. T. V. (2024). Inertial proximal point algorithms for solving a class of split feasibility problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **200**(3), 951–977.

(CT2) Ha, N. S., Tuyen, T. M., & Huyen, P. T. V. (2024). A new approach to solving the split common solution problem for monotone operator equations in Hilbert spaces. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, **55**, Article 29.

(CT3) Huyen, P. T. V., Ha, N. S., & Tuyen, T. M. (2025). Two generalized cyclic projection algorithms for solving a class of the split feasibility problem in real Hilbert spaces. *Carpathian Journal of Mathematics*, **41**(2), 525–541.

Tài liệu tham khảo

I. Tiếng Việt

[1] Hà, N. S., & Tuyên, T. M. (2022). *Bất đẳng thức biến phân*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[2] Lưu, Đ. V., & Khải, P. H. (2000). *Giải tích lồi*. Nhà xuất bản Khoa học và Kĩ thuật.

[3] Tụy, H. (2003). *Hàm thực và giải tích hàm*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

II. Tiếng Anh

[4] Anh, P. K., & Chung, C. V. (2009). Parallel iterative regularization methods for solving systems of ill-posed equations. *Applied Mathematics and Computation*, **212**(2), 542–550.

[5] Anh, P. K., & Hai, T. N. (2025). A simple regularized forward–backward–forward dynamical system for structured monotone inclusions. *Computational and Applied Mathematics*, **44**(4), 1–20.

[6] Alvarez, F. (2000). On the minimizing property of a second order dissipative system in Hilbert space. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **38**(4), 1102–1119.

[7] Alvarez, F., & Attouch, H. (2001). An inertial proximal method for maximal monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping. *Set-Valued Analysis*, **9**(1–2), 3–11.

[8] Alber, Y. I., & Ryazantseva, I. V. (2006). *Nonlinear Ill-Posed Problems of Monotone Type*. Springer.

[9] Bauschke, H. H. (1996). The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **202**(1), 150–159.

[10] Bauschke, H. H., & Borwein, J. M. (1996). On projection algorithms for solving convex feasibility problems. *SIAM Review*, **38**(3), 367–426.

[11] Bauschke, H. H., Matoušková, E., & Reich, S. (2004). Projection and proximal point methods: convergence results and counterexamples. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **56**(5), 715–738.

[12] Bauschke, H. H., & Combettes, P. L. (2011). *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. Springer.

[13] Baillon, J. B., & Haddad, G. (1977). Quelques propriétés des opérateurs angle-bornés et n-cycliquement monotones. *Israel Journal of Mathematics*, **26**(2), 137–150.

[14] Bot, R. I., & Csetnek, E. R. (2016). An inertial Tseng's type proximal algorithm for nonsmooth and nonconvex optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **171**(2), 600–616.

[15] Byrne, C. (2004). A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction. *Inverse Problems*, **20**(1), 103–120.

[16] Byrne, C., Censor, Y., Gibali, A., & Reich, S. (2012). The split common null point problem. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **13**(4), 759–775.

[17] Censor, Y., & Elfving, T. (1994). A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space. *Numerical Algorithms*, **8**(2–4), 221–239.

[18] Censor, Y., Elfving, T., Kopf, N., & Bortfeld, T. (2005). The multiple-sets split feasibility problem and its application. *Inverse Problems*, **21**(6), 2071–2084.

[19] Censor, Y., Bortfeld, T., Martin, B., & Trofimov, A. (2006). A unified approach for inversion problems in intensity-modulated radiation therapy. *Physics in Medicine and Biology*, **51**(10), 2353–2365.

[20] Censor, Y., & Segal, A. (2009). The split common fixed point problem for directed operators. *Journal of Convex Analysis*, **16**(2), 587–600.

[21] Chen, C., Ma, S., & Yang, J. (2015). A general inertial proximal point algorithm for mixed variational inequality problem. *SIAM Journal on Optimization*, **25**(4), 2120–2142.

[22] Cholamjiak, W., & Dutta, H. (2022). Viscosity modification with parallel inertial two steps forward–backward splitting methods for inclusion problems applied to signal recovery. *Chaos, Solitons & Fractals*, **157**, Article 111858.

[23] Combettes, P. L., & Pesquet, J.-C. (2008). A proximal decomposition method for solving convex variational inverse problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **1**(4), 297–325.

[24] Corman, E., & Yuan, X. (2014). A generalized proximal point algorithm and its convergence rate. *SIAM Journal on Optimization*, **24**(4), 1614–1638.

[25] Cui, H. (2023). An approach for solving split common fixed point problems with multiple output sets that uses dynamic step sizes. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **44**(14), 1669–1683.

[26] Cui, H., & Wang, F. (2024). The split common fixed point problem with multiple output sets for demicontractive mappings. *Optimization*, **73**(6), 1933–1947.

[27] Dadashi, V. (2017). Shrinking projection algorithms for the split common null point problem. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **96**(2), 299–306.

[28] De Vito, E., Rosasco, L., Caponnetto, A., De Giovannini, U., & Odone, F. (2005). Learning from examples as an inverse problem. *Journal of Machine Learning Research*, **6**, 883–904.

[29] Dong, Q. L., Huang, J. Z., Li, X. H., Cho, Y. J., & Rassias, T. M. (2019). MiKM: multi-step inertial Krasnosel'skii–Mann algorithm and its applications. *Journal of Global Optimization*, **73**(4), 801–844.

[30] Gebregiorgis, S., Kumam, P., & Sitthithakerngkiet, K. (2024). Relaxed inertial self-adaptive algorithm for the split feasibility problem with multiple output sets and fixed-point problem in the class of demicontractive mappings. *Fixed Point Theory and Algorithms for Sciences and Engineering*, **2024**, Article 15.

[31] Gil', M. I. (2018). *Operator Functions and Operator Equations*. World Scientific.

[32] Gubin, L., Polyak, B., & Raik, E. (1967). The method of projections for finding the common point of convex sets. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **7**(6), 1–24.

[33] Güler, O. (1991). On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **29**(2), 403–419.

[34] Hadamard, J. (1932). *Le Problème de Cauchy et les Équations aux Dérivées Partielles Linéaires Hyperboliques*. Hermann.

[35] Ha, N. S., Tuyen, T. M., & Huyen, P. T. V. (2023). Inertial proximal point algorithm for the split common solution problem of monotone operator equations. *Computational and Applied Mathematics*, **42**, Article 303.

[36] Hieu, D. V., Anh, P. K., & Ha, N. H. (2021). Regularization proximal method for monotone variational inclusions. *Networks and Spatial Economics*, **21**(4), 905–932.

[37] Iyiola, O. S., & Shehu, Y. (2022). Convergence results of two-step inertial proximal point algorithm. *Applied Numerical Mathematics*, **182**, 57–75.

[38] Jolaoso, L. O., Shehu, Y., & Yao, J. C. (2024). Strongly convergent inertial proximal point algorithm without on-line rule. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **200**(2), 555–584.

[39] Kinderlehrer, D., & Stampacchia, G. (2000). *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. SIAM, Philadelphia, PA.

[40] Li, J. (2018). Infinitely split Nash equilibrium problems in repeated games. *Fixed Point Theory and Applications*, 2018, Article 12.

[41] Lions, J.-L., & Magenes, E. (1972). *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications* (Vol. I). Springer.

[42] López, G., Márquez, V. M., Wang, F., & Xu, H. K. (2012). Solving the split feasibility problem without prior knowledge of matrix norms. *Inverse Problems*, **28**(8), Article 085004.

[43] Ly, L. X., Thuy, N. T. T., & Anh, N. Q. (2025). Relaxed two-step inertial method for solving a class of split variational inequality problems with application to traffic analysis. *Optimization*, **75**(3), 1–29.

[44] Martinet, B. (1970). Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives. *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, **4**(R-3), 154–158.

[45] Moudafi, A. (2000). Viscosity approximation methods for fixed-points problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **241**(1), 46–55.

[46] Moudafi, A., & Elisabeth, E. (2003). Approximate inertial proximal methods using the enlargement of maximal monotone operators. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **5**(3), 283–299.

[47] Nair, M. T. (2009). *Linear Operator Equations: Approximation and Regularization*. World Scientific.

[48] Panagiotopoulos, P. D. (1993). *Hemivariational Inequalities: Applications in Mechanics and Engineering*. Berlin, Heidelberg: Springer.

[49] Polyak, B. T. (1964). Some methods of speeding up the convergence of iteration methods. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **4**(5), 1–17.

[50] Polyak, B. T. (1987). *Introduction to Optimization*. Optimization Software, Inc.

[51] Qu, B., & Xiu, N. (2005). A note on the CQ algorithm for the split feasibility problem. *Inverse Problems*, **21**(5), 1655–1665.

[52] Reich, S., Truong, T. M., & Ha, M. T. N. (2020). The split feasibility problem with multiple output sets in Hilbert spaces. *Optimization Letters*, **14**(8), 2335–2353.

[53] Reich, S., Tuyen, T. M., & Ha, M. T. N. (2021). An optimization approach to solving the split feasibility problem in Hilbert spaces. *Journal of Global Optimization*, **79**(4), 837–852.

[54] Reich, S., & Tuyen, T. M. (2021). Two new self-adaptive algorithms for solving the split common null point problem with multiple output sets in Hilbert spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **23**, Article 16.

[55] Reich, S., Tuyen, T. M., & Ha, M. T. T. (2020). A product space approach to solving the split common fixed point problem in Hilbert spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **21**(11), 2571–2588.

[56] Reich, S., & Tuyen, T. M. (2022). A generalized cyclic iterative method for solving variational inequalities over the solution set of a split common fixed point problem. *Numerical Algorithms*, **91**(1), 1–17.

[57] Rashid, S., Iyiola, O. S., & Shehu, Y. (2024). A modified self-adaptive method for solving split feasibility problems in Banach spaces. *Computational and Applied Mathematics*, **43**, Article 192.

[58] Rockafellar, R. T. (1970). On the maximal monotonicity of subdifferential mappings. *Pacific Journal of Mathematics*, **33**(1), 209–216.

[59] Rockafellar, R. T. (1976). Monotone operators and the proximal point algorithm. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **14**(5), 877–898.

[60] Saejung, S., & Yotkaew, P. (2012). Approximation of zeros of inverse strongly monotone operators in Banach spaces. *Nonlinear Analysis*, **75**(2), 742–750.

[61] Shehu, Y., & Cholamjiak, P. (2016). Another look at the split common fixed point problem for demicontractive operators. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Serie A: Matemáticas*, **110**(1), 201–218.

[62] Suantai, S., Shehu, Y., Cholamjiak, P., & Iyiola, O. S. (2018). Strong convergence of a self-adaptive method for the split feasibility problem in Banach spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **20**, Article 68.

[63] Taddele, T., Benaissa, M., & Oke, M. O. (2024). Self-adaptive super set-relaxed projection algorithm for the split feasibility problem with multiple output sets. *Journal of Inequalities and Applications*, **2024**, Article 115.

[64] Tan, B., & Cho, S. Y. (2022). Strong convergence of inertial forward–backward methods for solving monotone inclusions. *Applied Analysis*, **101**(15), 5386–5414.

[65] Takahashi, S., & Takahashi, W. (2016). The split common null point problem and the shrinking projection method in Banach spaces. *Optimization*, **65**(2), 281–287.

[66] Takahashi, W. (2015). The split common null point problem in Banach spaces. *Archiv der Mathematik*, **104**(4), 357–365.

[67] Temam, R. (2001). *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. Providence, AMS Chelsea Publishing.

[68] Thang, T. V., Muu, L. D., & Hong, N. V. (2025). Parallel algorithms for finding common solutions to split convex feasibility and quasiconvex minimization problems. *Journal of Applied Mathematics and Computing,* **71**, 4121–4146.

[69] Thang, T. V. (2025). Two novel self-adaptive projection algorithms for split feasibility problems with multiple output sets. *Computational and Applied Mathematics*, **44**, Article 390.

[70] Tian, M., & Zhang, H. F. (2017). The regularized CQ algorithm without a priori knowledge of operator norm for solving the split feasibility problem. *Journal of Inequalities and Applications*, **2017**, Article 207.

[71] Tikhonov, A. N. (1943). On the stability of inverse problems. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, **39**, 195–198.

[72] Thong, D. V. (2017). Viscosity approximation methods for solving fixed-point problems and split common fixed-point problems. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **19**, 1481–1499.

[73] Thong, D. V., Vinh, N. T., & Cho, Y. J. (2020). New strong convergence theorem of the inertial projection and contraction method for variational inequality problems. *Numerical Algorithms*, **84**, 285–305.

[74] Thuy, N. T. T., & Nghia, N. T. (2024). Some novel inertial ball-relaxed CQ algorithms for solving the split feasibility problem with multiple output sets. *Journal of Applied Analysis and Computation*, **14**(3), 1485–1507.

[75] Thuy, N. T. T., & Tung, T. T. (2024). Two relaxed CQ methods for the split feasibility problem with multiple output sets. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **47**, Article 68.

[76] von Neumann, J. (1933). *Functional Operators II: The Geometry of Orthogonal Spaces*. Princeton University Press.

[77] Wang, F. (2022). The split feasibility problem with multiple output sets for demicontractive mappings. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **195**(3), 837–853.

[78] Wang, F. (2017). A new iterative method for the split common fixed point problem in Hilbert spaces. *Optimization*, **66**(3), 407–415.

[79] Xu, H.-K. (2006). A variable Krasnosel'skii–Mann algorithm and the multiple-set split feasibility problem. *Inverse Problems*, **22**(6), 2021–2034.

[80] Yang, Q. (2005). On variable-set relaxed projection algorithm for variational inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **302**(1), 166–179.

[81] Zhang, Y., & Guan, Y. (2023). A new algorithm for the split feasibility problem with multiple output sets in Hilbert spaces. *WSEAS Transactions on Mathematics*, **22**, 100–108.

[82] Zhang, C., Dong, Q. L., & Chen, J. (2020). Multi-step inertial proximal contraction algorithms for monotone variational inclusion problems. *Carpathian Journal of Mathematics*, **36**(1), 159–177.