ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHAN THỊ VÂN HUYỀN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI BÀI TOÁN NGHIỆM CHUNG TÁCH CHO LỚP PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU VỚI ĐA TẬP ĐẦU RA

Ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 9 46 01 12

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

Thái Nguyên – 2026

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Trương Minh Tuyên

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3: .

.

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án cấp Trường họp tại: ..... vào hồi ... giờ ... phút ngày ... tháng ... năm 2026.

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- .....
- .....
- .....

Các công trình đã công bố liên quan đến luận án

(CT1) Reich, S., Tuyen, T. M., & Huyen, P. T. V. (2024). Inertial proximal point algorithms for solving a class of split feasibility problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **200**(3), 951–977.

(CT2) Ha, N. S., Tuyen, T. M., & Huyen, P. T. V. (2024). A new approach to solving the split common solution problem for monotone operator equations in Hilbert spaces. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, **55**, Article 29.

(CT3) Huyen, P. T. V., Ha, N. S., & Tuyen, T. M. (2025). Two generalized cyclic projection algorithms for solving a class of the split feasibility problem in real Hilbert spaces. *Carpathian Journal of Mathematics*, **41**(2), 525–541.

Mở đầu

Phương trình toán tử (Operator Equation Problem), viết tắt là (OEQ) là một trong những mô hình cơ bản và quan trọng của Toán học hiện đại. Nhiều bài toán trong giải tích và ứng dụng có thể quy về việc giải phương trình toán tử tổng quát dưới dạng

$$A(x) = f, \quad x \in U,\ f \in V, \tag{OEQ}$$

trong đó A là một toán tử từ không gian U vào không gian V.

Trong nhiều lĩnh vực của Toán học ứng dụng hiện đại người ta thường gặp phải các bài toán mà trong đó lời giải cần thoả mãn đồng thời nhiều điều kiện ràng buộc đặt tại những không gian khác nhau. Một trong những mô hình toán học tiêu biểu cho loại bài toán này là *bài toán chấp nhận tách (Split Feasibility Problem)* trong các không gian Hilbert hữu hạn chiều, viết tắt là (SFP), được giới thiệu lần đầu tiên bởi Yair Censor và Tommy Elfving vào năm 1994 cho mô hình bài toán ngược. Bài toán (SFP) được phát biểu như sau: Cho C và Q lần lượt là các tập con lồi, đóng và khác rỗng trong các không gian Hilbert thực $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$, $T:\ \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn.

$$\text{Tìm phần tử } p \in C \text{ sao cho } T(p) \in Q. \tag{SFP}$$

Kể từ khi ra đời, bài toán (SFP) đã trở thành chủ đề nghiên cứu quan trọng và được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực thực tế như xử lý tín hiệu và khôi phục ảnh, liệu pháp xạ trị điều chỉnh cường độ, giúp tối ưu hóa phương pháp điều trị, giải quyết các bài toán cân bằng trong kinh tế và lý thuyết trò chơi và một số ứng dụng khác.

Bài toán chấp nhận tách cùng các bài toán liên quan ngày càng được mở rộng và tổng quát hơn. Năm 2020, Reich và cộng sự đã nghiên cứu và giới thiệu một mô hình tổng quát của bài toán chấp nhận tách, được gọi là *bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra (Split Feasibility Problem with Multiple Output Sets)*, viết tắt là (SFP-MOS). Bài toán được phát biểu như sau:

Cho $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các không gian Hilbert thực, $T_i:\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các toán tử tuyến tính bị chặn. Cho C và Q_i là các tập con lồi,

đóng, khác rỗng của $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, tương ứng. Bài toán yêu cầu:

$$\text{Tìm phần tử } p \in \mathcal{H} \text{ sao cho } p \in C \text{ và } T_i(p) \in Q_i, \qquad \text{(SFP-MOS)}$$

với mọi $i = 1, 2, \ldots, N$. Trong trường hợp $N = 1$ thì bài toán (SFP-MOS) trở thành bài toán (SFP). Một số lớp bài toán liên quan như bài toán không điểm chung tách với đa tập đầu ra hay bài toán điểm bất động tách với đa tập đầu ra cũng đã được nghiên cứu.

Mặc dù chỉ mới được đề xuất trong thời gian gần đây, lớp bài toán chấp nhận tách với *đa tập đầu ra* đã thu hút sự quan tâm đáng kể của cộng đồng nghiên cứu. Minh chứng cho điều này là nhiều công trình khoa học đã được công bố theo hướng tiếp cận này. Các công trình này tập trung theo hai hướng chính: một là, mở rộng và khái quát hóa mô hình bài toán sang các lớp ánh xạ hoặc không gian tổng quát hơn; hai là, đề xuất, phân tích cũng như cải tiến các thuật toán lặp nhằm nâng cao tốc độ hội tụ và tính ổn định của phương pháp.

Xuất phát từ các mô hình bài toán (OEQ), (SFP) và (SFP-MOS), năm 2023, trong công trình (CT1), chúng tôi giới thiệu và nghiên cứu một mô hình bài toán mới, gọi là **"*Bài toán nghiệm chung tách cho lớp phương trình toán tử đơn điệu với đa tập đầu ra*"** (viết tắt là SCSP-MOE: *Split Common Solution Problem for Monotone Operator Equations*) trong không gian Hilbert, cùng với một số bài toán liên quan. Mô hình bài toán (SCSP-MOE) trong không gian Hilbert được phát biểu như sau: Cho $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các không gian Hilbert thực. Cho $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ và $A_i: \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các toán tử đơn điệu. Cho $T_i: \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các toán tử tuyến tính bị chặn. Cho f và f_i là các phần tử cho trước thuộc $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}_i$, tương ứng, $i = 1, 2, \ldots, N$.

$$\text{Tìm một phần tử } p \in \Omega = \Omega^A \cap (\cap_{i=1}^N \Omega^{A_i}) \neq \emptyset, \qquad \text{(SCSP-MOE)}$$

trong đó

$$\Omega^A = \{x \in \mathcal{H} \mid A(x) = f\},$$
$$\Omega^{A_i} = \{x \in \mathcal{H} \mid A_i(T_i(x)) = f_i\}, \text{ với mọi } i = 1, 2, \ldots, N.$$

Nếu $S: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là ánh một ánh xạ không giãn, thì $A = I - S$ là $\frac{1}{2}$- đơn điệu mạnh ngược. Do đó, trong một số trường hợp đặc biệt thì bài toán (SCSP-MOE) trở thành bài toán *bài toán điểm bất động chung tách với đa tập đầu ra*, *bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra* hay *bài toán không điểm chung tách với đa tập đầu ra*. Như vậy có thể nói rằng mô hình bài toán (SCSP-MOE) bao hàm nhiều lớp bài toán tách khác nhau. Do đó, việc nghiên cứu về mô hình bài toán này cùng

với đó là các phương pháp tìm nghiệm của bài toán là một chủ đề có ý nghĩa khoa học. Chính vì vậy, chúng tôi lựa chọn bài toán này làm đối tượng nghiên cứu chính của luận án.

Bên cạnh hướng nghiên cứu mở rộng và tổng quát hóa các mô hình của bài toán chấp nhận tách, việc xây dựng và phát triển các phương pháp cũng như các thuật toán nhằm giải lớp bài toán này đã và đang thu hút được sự quan tâm mạnh mẽ của nhiều tác giả.

Năm 1932, J. Hadamard đã chỉ ra rằng phần lớn các bài toán tách, đặc biệt là những bài toán có liên quan đến toán tử ngược, thường là *bài toán đặt không chỉnh (ill-posed problems)*. Để khắc phục vấn đề này, năm 1943, Tikhonov đã đề xuất *phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov* (*Tikhonov regularization*) – một công cụ cổ điển nhưng vẫn có giá trị nền tảng cho đến ngày nay. Ý tưởng chính của phương pháp là thay vì giải trực tiếp bài toán đặt không chỉnh

$$Ax = b,$$

ta xét một bài toán đặt chỉnh dạng

$$\min_{x \in H} \ \|Ax - b\|^2 + \lambda \|x\|^2,$$

trong đó A là toán tử tuyến tính, $\lambda > 0$ là *tham số hiệu chỉnh (regularization parameter)*. Khi $\lambda \to 0$, nghiệm hiệu chỉnh x_λ tiến dần tới nghiệm thực của bài toán gốc. Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov không chỉ đặt nền tảng cho nhiều kỹ thuật hiện đại trong giải bài toán ngược mà còn được kết hợp với một số phương pháp lặp hiện đại trong tối ưu hóa và lớp bài toán chấp nhận tách để tăng tính ổn định và đạt được sự hội tụ tốt hơn.

Một trong những phương pháp phổ biến để giải lớp bài toán chấp nhận tách đó là phương pháp CQ, được giới thiệu lần đầu bởi C. Byrne. Thuật toán CQ cùng một số mở rộng của nó nhìn chung chỉ thu được sự hội tụ yếu trong không gian Hilbert thực vô hạn chiều với cỡ bước được chọn phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển (trong thực tế việc tính toán chuẩn của một toán tử thường không đơn giản). Để khắc phục được hạn chế liên quan đến việc tính chuẩn của toán tử chuyển của thuật toán CQ, *thuật toán tự thích nghi* đã được đề xuất. Ưu điểm của các thuật toán này là cỡ bước được xây dựng tự thích nghi, không phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển.

Thuật toán điểm gần kề (Proximal Point Algorithm) cũng là một trong những thuật toán quan trọng để giải lớp bài toán chấp nhận tách. Thuật toán này được nghiên cứu lần đầu bởi Martinet cho bài toán cực tiểu của phiếm hàm lồi trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Năm 1976, Rockafellar đã áp dụng phương pháp điểm gần

kề của Martinet để tìm *không điểm của toán tử đơn điệu cực đại* $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Tuy nhiên, phương pháp điểm gần kề chỉ đạt được sự hội tụ yếu trong không gian Hilbert vô hạn chiều. Để đạt được sự hội tụ mạnh, phương pháp điểm gần kề được các tác giả kết hợp với một số phương pháp như phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, phương pháp lặp Halpern, phương pháp xấp xỉ mềm, phương pháp chiếu co hẹp, phương pháp chiếu lai ghép và một số phương pháp khác.

Một hướng mở rộng khác của phương pháp điểm gần kề đó là đưa thêm thành phần quán tính vào công thức lặp của thuật toán với mong muốn để tăng tốc độ hội tụ. Các *thuật toán quán tính* (*inertial algorithms*) có nguồn gốc từ cơ học cổ điển. Công trình đầu tiên đặt nền móng cho thuật toán quán tính là bài báo của Polyak năm 1964. Năm 1987, ý tưởng quán tính được Polyak chuẩn hóa và phát triển đầy đủ hơn trong phương pháp *Heavy Ball*, với công thức lặp

$$x^{n+1} = x^n - \alpha \nabla f(x^n) + \beta(x^n - x^{n-1}),$$

trong đó $\alpha > 0$ và $\beta \in [0, 1)$. Nhờ vào thành phần "quán tính" thông qua sai phân $x^n - x^{n-1}$, phương pháp này đã được chỉ ra là có khả năng cải thiện đáng kể tốc độ hội tụ so với các phương pháp một bước cổ điển trong các bài toán tối ưu lồi trơn.

Năm 2001, Alvarez và Attouch đã đưa thêm thành phần quán tính vào phương pháp điểm gần kề, qua đó đề xuất *phương pháp điểm gần kề quán tính* để tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại trong không gian Hilbert. Các tác giả đã đưa ra thuật toán điểm gần kề quán tính như sau

$$x_{n+1} = J^A_{\lambda_n}(x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1})),$$

trong đó $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là toán tử đơn điệu cực đại thỏa mãn $\mathrm{Zer}(A) \neq \emptyset$. Khi đó nếu các dãy tham số được chọn thỏa mãn một số điều kiện nhất định thì dãy lặp sinh bởi thuật toán trên sẽ hội tụ yếu tới không điểm của toán tử A. Khi $\theta_n = 0$ thì thuật toán này trở thành thuật toán điểm gần kề cổ điển của các giả Martinet và Rockafellar. Điểm đặc trưng của những thuật toán có thành phần quán tính là mỗi bước lặp mới không chỉ phụ thuộc vào bước trước đó mà còn kết hợp thông tin từ hai bước lặp trước. Điều này đã được chỉ ra là giúp cải thiện đáng kể hiệu suất của các thuật toán trước đó.

Gần đây, hướng nghiên cứu này tiếp tục được mở rộng theo hướng xây dựng các công thức lặp có nhiều thành phần quán tính nhằm tăng tốc độ hội tụ. Các thuật toán quán tính và phương pháp điểm gần kề đã trở thành những công cụ thiết yếu trong tối ưu lồi, lý thuyết điểm bất động và việc giải các bài toán tách, đồng thời đóng vai trò nền tảng cho sự phát triển của nhiều thuật toán hiện đại.

Từ những phân tích và kết quả đã trình bày ở trên, chúng tôi lựa chọn nghiên cứu đề tài **"Một số phương pháp lặp giải bài toán nghiệm chung tách cho lớp phương trình toán tử đơn điệu với đa tập đầu ra"** cho luận án của mình, nhằm góp phần phát triển lý thuyết và các thuật toán hiệu quả cho lớp bài toán này.

Mục tiêu của luận án là nghiên cứu, xây dựng các phương pháp lặp, thuật toán để tìm nghiệm cho bài toán (SCSP-MOE) và một số bài toán liên quan. Các thuật toán được phát triển theo hướng tự thích nghi. Cụ thể như sau:

- Nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov dưới dạng lặp ẩn để giải bài toán (SCSP-MOE). Từ phương pháp hiệu chỉnh thu được, đề xuất phương pháp lặp hiện cho bài toán này.

- Nghiên cứu và đề xuất phương pháp điểm gần kề quán tính (hiệu chỉnh) cho bài toán (SCSP-MOE). Đồng thời đề xuất các mô hình kết hợp phương pháp này với một số kỹ thuật khác như phương pháp xấp xỉ mềm, phương pháp chiếu lai ghép, phương pháp chiếu co hẹp nhằm xây dựng các thuật toán hiệu quả hơn để giải bài toán (SCSP-MOE).

- Áp dụng các thuật toán đề xuất cho một số bài toán liên quan và xây dựng các ví dụ số minh họa cho các kết quả lý thuyết thu được bằng MATLAB.

Nội dung của luận án được chia thành 04 chương, cùng với phần mở đầu, kết luận, danh mục các ký hiệu, danh mục các công trình khoa học của tác giả và tài liệu tham khảo.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.

Chương 2: Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov giải bài toán (SCSP-MOE).

Chương 3: Thuật toán điểm gần kề quán tính giải bài toán (SCSP-MOE).

Chương 4: Hai thuật toán chiếu với đa thành phần quán tính giải bài toán (SCSP-MOE).

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ bản của giải tích hàm được sử dụng trong các chương sau bao gồm: sự hội tụ mạnh, sự hội tụ yếu, tập lồi, hàm lồi, dưới vi phân của hàm lồi, một số toán tử trong không gian Hilbert, một số lớp ánh xạ liên tục, phép chiếu mêtric, toán tử loại đơn điệu, bất đẳng thức biến phân và một số bổ đề bổ trợ.

1.1 Một số nội dung cơ bản trong không gian Hilbert

1.1.1 Sự hội tụ mạnh và sự hội tụ yếu

1.1.2 Toán tử tuyến tính bị chặn và toán tử liên hợp

1.1.3 Hàm lồi và dưới vi phân của hàm lồi

1.2 Một số lớp ánh xạ đặc biệt

1.2.1 Ánh xạ liên tục Lipschitz

1.2.2 Ánh xạ h-liên tục

1.2.3 Phép chiếu mêtric

1.3 Toán tử đơn điệu

1.4 Bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert

1.5 Một số bổ đề bổ trợ

Chương 2

Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov giải bài toán (SCSP-MOE)

Trong chương này, dựa trên phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, chúng tôi đề xuất hai thuật toán xấp xỉ nghiệm cho bài toán (SCSP-MOE). Hai thuật toán này tương ứng với phương pháp lặp ẩn và phương pháp lặp hiện, đồng thời đều bảo đảm hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán. Ngoài ra, chúng tôi khảo sát tính ổn định của nghiệm xấp xỉ khi dữ liệu đầu vào bị nhiễu. Phần cuối chương trình bày một số ứng dụng và đưa ra các ví dụ số để minh họa tính hiệu quả của các phương pháp được đề xuất. Các kết quả của chương này được trình bày dựa trên nội dung của bài báo (CT2).

2.1 Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov ẩn

Xét bài toán (SCSP-MOE) với các giả thiết sau:

(H1) $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$ là các không gian Hilbert thực;
$f \in \mathcal{H}$ và $f_i \in \mathcal{H}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$ là các phần tử cho trước.

(H2) $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là một toán tử γ-đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}$;
$A_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$ là các toán tử γ_i-đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}_i$.

(H3) $T_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$ là các toán tử tuyến tính bị chặn trên $\mathcal{H}_i$ với toán tử liên hợp tương ứng là $T_i^* : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}$.

(H4) $\Omega := \Omega_A \cap \left(\bigcap_{i=1}^N \Omega_{A_i}\right) \neq \emptyset$, trong đó

$$\Omega_A = \{x \in \mathcal{H} : A(x) = f\}, \qquad \Omega_{A_i} = \{x \in \mathcal{H} : A_i(T_i(x)) = f_i\}.$$

Bài toán yêu cầu tìm một phần tử $x \in \Omega$.

Trên cơ sở phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov cổ điển đã được trình bày trong phần mở đầu, chúng tôi đề xuất thuật toán sau, với dãy lặp được xây dựng theo

phương pháp lặp ẩn để giải bài toán (SCSP-MOE) dưới các giả thiết (H1) – (H4) và các điều kiện sau:

(P1) $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là toán tử β-đơn điệu mạnh và h-liên tục trên $\mathcal{H}$;

(P2) $\{\alpha_n\}$ là dãy số thực dương thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Thuật toán 2.1.1 Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov ẩn

Dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi phương trình

$$A(x_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*\big(A_i(T_i(x_n))\big) + \alpha_n S(x_n) = f + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i). \tag{2.1}$$

Mệnh đề sau đây chỉ ra sự tồn tại của dãy lặp $\{x_n\}$ trong Thuật toán 2.1.1.

Mệnh đề 2.1.2. *Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, phương trình* (2.1) *có nghiệm duy nhất x_n.*

Sự hội tụ của dãy lặp được xây dựng trong Thuật toán 2.1.1 được chỉ ra trong định lý sau.

Định lý 2.1.3. *Dãy $\{x_n\}$ được tạo bởi Thuật toán 2.1.1 hội tụ mạnh đến $x^* \in \Omega$ là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân*

$$\langle S(x^*),\, q - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall q \in \Omega. \tag{2.2}$$

2.2 Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov hiện

Trong phần này chúng tôi xây dựng một phương pháp lặp hiện dựa trên phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov để giải bài toán (SCSP-MOE) với các giả thiết từ (H1) đến (H4) và các điều kiện sau:

(P1*) $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là toán tử β-đơn điệu mạnh và L-liên tục Lipschitz trên $\mathcal{H}$.

(P2*) $\{\alpha_n\}$ và $\{\theta_n\}$ là các dãy số thực dương, thỏa mãn:

(i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \alpha_n = \infty$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\theta_n}{\alpha_n} = 0$,

(iv) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{\theta_n \alpha_n^2} = 0$.

Thuật toán 2.2.1 Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov hiện

1: Chọn điểm đầu $y_1 \in \mathcal{H}$ tùy ý.
2: **for** $n = 1, 2, \ldots$ **do**
3: Tính

$$F_{\alpha_n}(y_n) = A(y_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*\big(A_i(T_i(y_n))\big) + \alpha_n S(y_n) - f - \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i).$$

4: Cập nhật

$$y_{n+1} = y_n - \theta_n F_{\alpha_n}(y_n). \tag{2.12}$$

5: **end for**

Sự hội tụ mạnh của dãy $\{y_n\}$ được xây dựng theo công thức lặp hiện (2.12) đến nghiệm của bài toán (SCSP-MOE) được trình bày trong định lý sau.

Định lý 2.2.4. *Dãy $\{y_n\}$ được xây dựng trong Thuật toán 2.2.1 hội tụ mạnh tới $x^* \in \Omega$. Hơn nữa, x^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân* (2.2).

Phần tiếp theo trình bày về tính ổn định của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov ẩn và hiệu chỉnh Tikhonov hiện ở trên khi dữ liệu đầu vào bị nhiễu.

2.3 Tính ổn định của phương pháp hiệu chỉnh

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu về tính ổn định của hai phương pháp lặp (2.1) và (2.12) với các điều kiện nhiễu sau:

(L1) Các điểm $f \in \mathcal{H}$ và $f_i \in \mathcal{H}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ chỉ được cho gần đúng. Cụ thể, thay f và f_i bởi các dãy $\{f^{\delta_n}\} \subset \mathcal{H}$ và $\{f_i^{\delta_n^i}\} \subset \mathcal{H}_i$, thỏa mãn

$$\|f - f^{\delta_n}\| \le \delta_n, \qquad \|f_i - f_i^{\delta_n^i}\| \le \delta_n^i,$$

trong đó $\{\delta_n\}$ và $\{\delta_n^i\}$ là các dãy số thực dương.

(L2) Các toán tử A và A_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ lần lượt được thay bởi các toán tử $A^{h_n} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ và $A_i^{h_n^i} : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, sao cho A^{h_n} là γ-đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}$ và $A_i^{h_n^i}$ cũng là các toán tử γ_i-đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}_i$ tương ứng, thỏa mãn

$$\|A^{h_n}(x) - A(x)\| \le \varphi(\|x\|)h_n, \qquad \forall x \in \mathcal{H},$$
$$\|A_i^{h_n^i}(x) - A_i(x)\| \le \varphi_i(\|x\|)h_n^i, \qquad \forall x \in \mathcal{H}_i,$$

trong đó $\varphi(t)$ và $\varphi_i(t)$ là các hàm số bị chặn với mọi $t \ge 0$, và $\{h_n\}, \{h_n^i\}$ là các dãy số thực dương.

Trước hết, chúng tôi xem xét và chỉ ra tính hội tụ mạnh của dãy $\{z_n\}$, được xác định bởi

$$A^{h_n}(z_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i^{h_n^i}(T_i(z_n))) + \alpha_n S(z_n) = f^{\delta_n} + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i^{\delta_n^i}). \tag{2.22}$$

Định lý sau đây trình bày về tính ổn định của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov ẩn.

Định lý 2.3.1. *Giả sử các điều kiện (P1), (P2), (L1), (L2) được thỏa mãn. Ngoài ra, nếu điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_n + h_n + \sum_{i=1}^{N}(\delta_n^i + h_n^i)}{\alpha_n} = 0, \tag{2.23}$$

thì dãy $\{z_n\}$ được tạo bởi phương trình (2.22) hội tụ mạnh đến $x^* \in \Omega$, trong đó x^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (2.2).

Tiếp theo, chúng tôi sẽ phân tích tính ổn định của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov hiện. Cụ thể, với mọi $u_1 \in \mathcal{H}$, ta xét dãy $\{u_n\}$ được xác định bởi

$$u_{n+1} = u_n - \theta_n \widehat{F}_{\alpha_n}(u_n), \quad n \geq 1, \tag{2.24}$$

trong đó

$$\widehat{F}_{\alpha_n}(u_n) := A^{h_n}(u_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(A_i^{h_n^i}(T_i(u_n))) + \alpha_n S(u_n) - f^{\delta_n} - \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i^{\delta_n^i}).$$

Định lý 2.3.2. *Giả sử các điều kiện $(P1^*)$, $(P2^*)$, $(L1)$, $(L2)$ và (2.23) đều thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{u_n\}$ được tạo bởi (2.24) hội tụ mạnh đến $x^* \in \Omega$, trong đó x^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (2.2).*

Nhận xét 2.3.3. Định lý 2.3.1 và Định lý 2.3.2 cho thấy rằng Thuật toán 2.1.1 và Thuật toán 2.2.1 là *ổn định trước nhiễu*. Tức là, ngay cả khi dữ liệu và toán tử chỉ được cho gần đúng theo các điều kiện $(L1)$, $(L2)$, các dãy lặp thu được vẫn hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất x^* của bài toán. Nhờ đó, khẳng định thuật toán được đề xuất không chỉ có giá trị lý thuyết mà còn khả thi trong thực tiễn, nơi dữ liệu thường chứa sai số.

2.4 Ứng dụng và ví dụ số minh họa

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số ứng dụng của hai thuật toán được đề xuất trong Chương 2 để giải các lớp bài toán sau:

- Bài toán điểm bất động chung tách với đa tập đầu ra (SCFPP-MOS);

- Bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra (SFP-MOS);
- Bài toán không điểm chung tách với đa tập đầu ra (SCNPP-MOS);
- Bài toán điểm cực tiểu chung tách với đa tập đầu ra (SMPP-MOS);
- Bài toán khôi phục tín hiệu.

Bên cạnh đó, một số ví dụ số minh họa cũng được thực hiện nhằm đánh giá hiệu quả và khả năng hội tụ của các thuật toán đề xuất. Bao gồm một ví dụ về bài toán (SFP-MOS) trong không gian Hilbert vô hạn chiều; một ví dụ về bài toán (SMPP-MOS) trong không gian Hilbert hữu hạn chiều và một ví dụ về bài toán khôi phục tín hiệu. Trong tóm tắt này chúng tôi trình bày ngắn gọn Ví dụ 2.4.7.

Ví dụ 2.4.7. Xét bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra (SFP-MOS) như sau:

$$\text{Tìm } x \in \widetilde{\Omega} := C \cap \left(\bigcap_{i=1}^{3} T_i^{-1}(Q_i) \right), \tag{2.36}$$

với các giả thiết sau đây.

(i) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_i = L^2[0,\pi]$ $(i = 1,2,3)$ với tích vô hướng và chuẩn được cho bởi

$$\langle x, y \rangle = \int_0^\pi x(t)\, y(t)\, dt, \qquad \|x\| = \left(\int_0^\pi x^2(t)\, dt \right)^{1/2}.$$

Các tập C và Q_i $(i = 1,2,3)$ được xác định bởi

$$C = \{\, x \in L^2[0,\pi] : \|x\| \leq 2 \,\}, \quad Q_i = \{\, x \in L^2[0,\pi] : \langle a_i, x \rangle \leq b_i \,\},$$

trong đó

$$a_i(t) = \sin\big((i+1)t\big), \qquad \forall\, t \in [0,\pi]; \qquad b_i = \frac{1 - \cos(i\pi)}{i(i+1)(i+2)}.$$

(ii) Với mỗi $i = 1,2,3$, toán tử $T_i : L^2[0,\pi] \longrightarrow L^2[0,\pi]$ được định nghĩa bởi

$$T_i(x)(t) = \frac{x(t)}{i+1}, \qquad \forall\, x = x(t) \in L^2[0,\pi].$$

Khi đó tập $\widetilde{\Omega}$ là khác rỗng, vì $0 \in \widetilde{\Omega}$. Ta có $x_* = 0$ là nghiệm duy nhất của bài toán (2.36).

Áp dụng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov hiện (công thức lặp (2.31)):

$$z_{n+1} = z_n - \theta_n \Big((I - P_C)(z_n) + \sum_{i=1}^{N} T_i^* \big((I_i - P_{Q_i})(T_i(z_n)) \big) + \alpha_n S(z_n) \Big). \tag{2.31}$$

Các dữ liệu được chọn như sau: $S(x) = x$ với mọi $x = x(t) \in L^2[0, \pi]$ và điểm đầu $x_1 = e^t, \forall\, t \in [0, \pi]$; Các tham số được chọn là

$$\alpha_n = n^{-0.1}, \qquad \theta_n = 0.75\, n^{-0.3};$$

Sử dụng tiêu chuẩn dừng $\varepsilon_n = \|x_n\| \leq \text{TOL}$, với TOL là ngưỡng sai số cho trước cho trước.

Đồng thời, chúng tôi cũng so sánh kết quả số của công thức lặp (2.31) với Thuật toán 3.5 của Reich và các cộng sự trong [52] (Reich, S., Truong, T. M., & Ha, M. T. N. (2020). The split feasibility problem with multiple output sets in Hilbert spaces. *Optimization Letters*, **14**, 2335–2353.) và Thuật toán trong Hệ quả 4.3 của Reich và Tuyen trong [54] (Reich, S., & Tuyen, T. M. (2021). Two new self-adaptive algorithms for solving the split common null point problem with multiple output sets in Hilbert spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **23**(16)). Các dữ liệu cho mỗi thuật toán được lựa chọn như sau

- Thuật toán 3.5 trong [52]:

$$f(x) = 0.85x, \qquad \alpha_n = n^{-0.1}, \qquad \gamma_n = \frac{2}{3}.$$

- Hệ quả 4.3 trong [54]:

$$f(x) = 0.85x, \qquad \alpha_n = n^{-0.1}, \qquad \beta_{i,n} = 0.75, \qquad \theta_{i,n} = 1, \qquad \rho_{i,n} = 1.$$

Các kết quả số được trình bày trong Bảng 2.1.

Bảng 2.1: Bảng kết quả số của phương pháp lặp (2.31) và so sánh giữa các thuật toán

TOL	**Thuật toán**	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{\varepsilon_n}$	**Thời gian (s)**
10^{-5}	Phương pháp lặp (2.31)	38	9.375×10^{-6}	0.001
	Thuật toán 3.5 trong [52]	196	9.676×10^{-6}	0.006
	Hệ quả 4.3 trong [54]	71	9.073×10^{-6}	0.029
10^{-6}	Phương pháp lặp (2.31)	51	9.144×10^{-7}	0.001
	Thuật toán 3.5 trong [52]	240	9.627×10^{-7}	0.007
	Hệ quả 4.3 trong [54]	82	9.531×10^{-7}	0.030
10^{-7}	Phương pháp lặp (2.31)	65	9.790×10^{-8}	0.001
	Thuật toán 3.5 trong [52]	285	9.929×10^{-8}	0.008
	Hệ quả 4.3 trong [54]	93	9.897×10^{-8}	0.032

Chương 3

Thuật toán điểm gần kề quán tính giải bài toán (SCSP-MOE)

Trong chương này, dựa trên phương pháp điểm gần kề quán tính (hiệu chỉnh), chúng tôi đề xuất hai thuật toán lặp giải bài toán (SCSP-MOE). Thuật toán thứ nhất được chứng minh hội tụ yếu đến nghiệm của bài toán và được đánh giá về tốc độ hội tụ. Thuật toán thứ hai được xây dựng trên cơ sở kết hợp thuật toán thứ nhất với phương pháp xấp xỉ mềm nhằm thu được sự hội tụ mạnh. Cuối chương, một số ví dụ số được trình bày để minh họa các kết quả lý thuyết. Các nội dung của chương được trình bày dựa trên các kết quả chính của bài báo (CT1).

3.1 Thuật toán hội tụ yếu và tốc độ hội tụ

Trong toàn bộ chương này, bài toán (SCSP-MOE) được xét dưới các giả thiết (H1)–(H4) đã nêu trong Chương 2.

Dựa trên thuật toán điểm gần kề quán tính của Alvarez và Attouch, chúng tôi xây dựng thuật toán sau để tìm nghiệm của bài toán (SCSP-MOE).

Thuật toán 3.1.1 Thuật toán hội tụ yếu

1: Chọn $\theta \in [0,1)$ và dãy $\{t_n\}$ thỏa mãn

$$0 \leq t_n \leq \theta, \qquad \forall n \geq 0.$$

2: Chọn hai điểm đầu $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ tùy ý.

3: **for** $n = 1, 2, \ldots$ **do**

4: Tính

$$x_{n+1} = J^{A+\sum_{i=1}^{N} T_i^* A_i T_i} \left(x_n + t_n(x_n - x_{n-1}) + f + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i) \right). \tag{3.1}$$

5: **end for**

Sự hội tụ của dãy được tạo ra bởi Thuật toán 3.1.1 được chỉ ra trong định lý sau.

Định lý 3.1.2. *Giả sử rằng dãy $\{t_n\}$ được chọn sao cho điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \|x_n - x_{n-1}\|^2 < \infty. \tag{C}$$

Khi đó, dãy $\{x_n\}$ được tạo ra bởi Thuật toán 3.1.1 hội tụ yếu đến một nghiệm của bài toán (SCSP-MOE).

Nhận xét 3.1.3. i) Bằng cách sử dụng phương pháp điểm gần kề quán tính chúng tôi đã chỉ ra được rằng khi điều kiện (C) được thỏa mãn thì dãy $\{x_n\}$ được xây dựng trong Thuật toán 3.1.1 hội tụ yếu tới nghiệm của bài toán (SCSP-MOE) mà không cần dùng đến thông tin về chuẩn của toán tử chuyển.

ii) Điều kiện (C) có thể được đảm bảo bằng cách chọn dãy tham số phù hợp. Chẳng hạn, có thể chọn dãy $\{t_n\}$ như sau

$$t_n = \frac{1}{(\alpha + n^s)(\|x_n - x_{n-1}\|^2 + \beta)},$$

trong đó $s > 1$ và α, β là các hằng số dương.

Hơn nữa, điều kiện (C) cũng có thể tự động được thỏa mãn trong một số trường hợp đặc biệt, chẳng hạn như trường hợp được trình bày trong hệ quả sau.

Hệ quả 3.1.4. *Giả sử rằng $\{x_n\}$ là dãy được tạo ra bởi Thuật toán 3.1.1. Nếu điều kiện* (C) *được thay thế bởi điều kiện*

$$\{t_n\} \subset [0, \theta) \quad \text{với } \theta \in [0, 1/3] \text{ và } \{t_n\} \text{ là dãy tăng,} \tag{C'}$$

thì ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|^2 < \infty$, do đó dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến một phần tử $p \in \Omega$.

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu tốc độ hội tụ của Thuật toán 3.1.1 dựa trên ý tưởng của Chen và cộng sự, Corman và cộng sự. Trước tiên, chúng tôi thiết lập một kết quả đánh giá sơ bộ cho dãy $\{x_n\}$ được xây dựng trong Thuật toán 3.1.1 như sau.

Định lý 3.1.5. *Cho dãy $\{x_n\}$ được tạo bởi Thuật toán 3.1.1 với $x_0 = x_1$ và giả sử rằng dãy $\{t_n\}$ thỏa mãn điều kiện* (C'). *Khi đó với bất kỳ $p \in \Omega$ và bất kỳ số tự nhiên n, ta có*

$$\min_{1 \le k \le n} \|x_{k+1} - z_k\|^2 \le \frac{2(1+\theta^2)(1+\theta-\theta^2)}{(1-\theta)(1-3\theta)n} \|x_0 - p\|^2,$$

trong đó $z_k = x_k + t_k(x_k - x_{k-1})$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$.

Chú ý 3.1.6. Trong Thuật toán 3.1.1, nếu $x_{n+1} = z_n$, thì $x_{n+1} \in \Omega$, tức là x_{n+1} là một nghiệm của bài toán (SCSP-MOE). Do đó, ta có thể sử dụng điều kiện dừng

$$\|x_{n+1} - z_n\|^2 < \text{TOL}$$

để kết thúc quá trình lặp, trong đó TOL là ngưỡng sai số cho trước.

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập một bất đẳng thức đánh giá sai số chặt hơn, qua đó xác nhận rằng tốc độ hội tụ của dãy thực sự đạt bậc $O(1/\sqrt{n})$. Kết quả chi tiết được trình bày trong Định lý 3.1.7 dưới đây.

Định lý 3.1.7. *Cho dãy $\{x_n\}$ được tạo bởi Thuật toán 3.1.1 với $t_n = \theta < 1/3$ với mọi $n \geq 1$ và $x_0 = x_1$. Khi đó, với bất kỳ $p \in \Omega$ và mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có*

$$\|x_{n+1} - z_n\|^2 \leq \frac{2(1+7\theta)(1+\theta-\theta^2)(1+\theta^2)}{(1-\theta)(1-2\theta)(1-3\theta)(n-1)}\|x_0 - p\|^2.$$

3.2 Thuật toán hội tụ mạnh

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu một mở rộng của thuật toán hội tụ yếu (Thuật toán 3.1.1) nhằm đạt được tính hội tụ mạnh.

Thuật toán 3.2.1 Thuật toán hội tụ mạnh

1: Chọn $\theta \in [0,1)$ và dãy $\{t_n\}$ sao cho $0 \leq t_n \leq \theta, \qquad \forall n \geq 0.$

2: Chọn ánh xạ co $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ với hệ số co $c \in [0,1)$.

3: Chọn dãy $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty.$$

4: Chọn hai điểm đầu $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ tùy ý.

5: **for** $n = 1, 2, \ldots$ **do**

6: Tính

$$y_n = x_n + t_n(x_n - x_{n-1}).$$

7: Tính

$$u_n = J^{A+\sum_{i=1}^{N} T_i^* A_i T_i}\left(y_n + f + \sum_{i=1}^{N} T_i^*(f_i)\right).$$

8: Cập nhật

$$x_{n+1} = \alpha_n \varphi(x_n) + (1-\alpha_n)u_n. \tag{3.2}$$

9: **end for**

Sự hội tụ mạnh của dãy được tạo bởi thuật toán trên đến nghiệm của bài toán (SCSP-MOE) được trình bày trong định lý sau.

Định lý 3.2.2. *Trong Thuật toán 3.2.1, nếu điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n\|x_n - x_{n-1}\|}{\alpha_n} = 0, \tag{C"}$$

thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới một phần tử $p \in \Omega$ thỏa mãn $p = P_\Omega(\varphi(p))$.

Nhận xét 3.2.3. i) Bằng cách kết hợp thuật toán hội tụ yếu (Thuật toán 3.1.1) với phương pháp xấp xỉ mềm chúng tôi đã chứng minh được sự hội tụ mạnh của dãy lặp sinh bởi Thuật toán 3.2.1 đến nghiệm của bài toán (SCSP-MOE) mà không cần dùng đến thông tin về chuẩn của ánh xạ chuyển.

ii) Có thể áp dụng Thuật toán 3.1.1 và Thuật toán 3.2.1 để giải bài toán điểm bất động chung tách với đa tập đầu ra (SFNPP-MOS), bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra (SFP-MOS), bài toán không điểm chung tách với đa tập đầu ra (SCNPP-MOS), bài toán điểm cực tiểu chung tách với đa tập đầu ra (SMPP-MOS) và bài toán khôi phục tín hiệu.

3.3 Ví dụ số minh họa

Trong mục này, chúng tôi đưa ra ba ví dụ số minh họa cho các kết quả của Chương 3. Bao gồm, một ví dụ về bài toán khôi phục tín hiệu, một ví dụ về bài toán (SMPP-MOS) trong không gian Hilbert hữu hạn chiều và một ví dụ về bài toán (SFP-MOS) trong không gian Hilbert vô hạn chiều. Trong tóm tắt này chúng tôi trình bày ngắn gọn Ví dụ 3.3.1.

Ví dụ 3.3.1. Xét bài toán khôi phục tín hiệu với các dữ liệu thử nghiệm được thiết lập như sau. Tín hiệu ban đầu có kích thước $n = 100$ với 32 phần tử khác không, được phân bố ngẫu nhiên và lấy mẫu theo phân phối chuẩn.

Ma trận đo chính A có kích thước $m \times n$ với $m = 40$. Các hàng của ma trận A được chuẩn hóa theo chuẩn Euclid.

Với N hệ đo bổ sung, mỗi hệ được thiết lập bao gồm một toán tử tuyến tính bị chặn $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_i}$ và một ma trận lấy mẫu $A_i \in \mathbb{R}^{p_i \times m_i}$, trong đó $m_i \in [50, 100]$ và $p_i \in [20, 50]$ được chọn ngẫu nhiên. Các hàng của ma trận A_i và T_i lần lượt được chuẩn hóa theo chuẩn Euclid và chuẩn Frobenius.

Để mô phỏng sai số đo, nhiễu Gauss với phương sai $\sigma^2 = 0.005$ được thêm vào dữ liệu quan sát.

Áp dụng Thuật toán 3.1.1, trong đó các toán tử

$$A = \nabla h, \qquad A_i = \nabla h_i, \qquad f = f_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

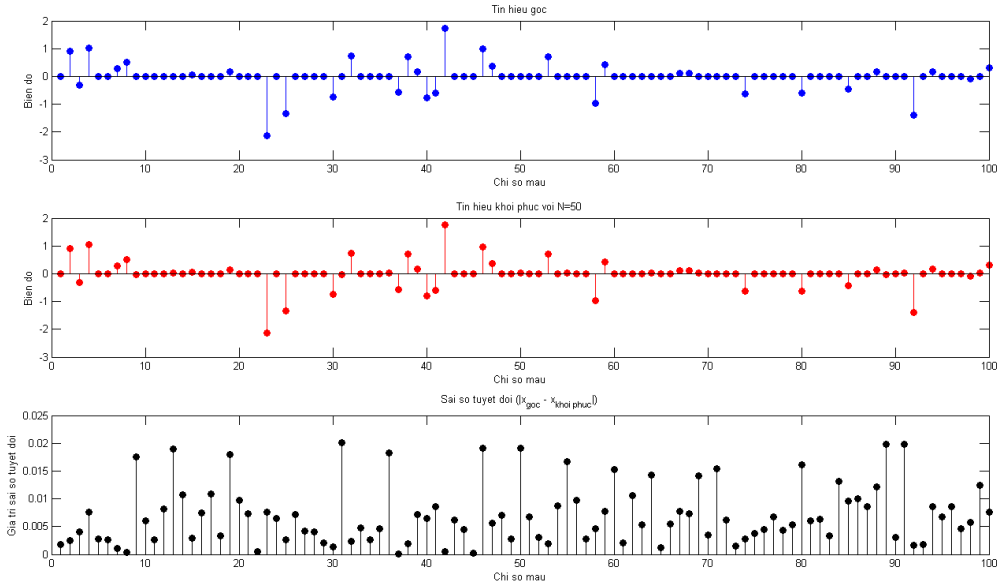
và các giá trị khởi tạo x_0, x_1 và x_2 được sinh ngẫu nhiên theo phân phối chuẩn, dãy $\{x_n\}$ được tính bằng công thức lặp

$$x_{n+1} = J^{\nabla h + \sum_{i=1}^{N} T_i^* \nabla h_i T_i}(x_n + t_n(x_n - x_{n-1})). \tag{3.30}$$

Thuật toán dừng khi $\|x_{n+1} - (x_n + t_n(x_n - x_{n-1}))\| < 10^{-5}$ hoặc khi số vòng lặp đạt 1000. Thuật toán được kiểm tra trên 50 lần chạy độc lập, trong đó các đại lượng được ghi nhận bao gồm thời gian tính toán trung bình, sai số trung bình và số bước lặp trung bình. Với việc lựa chọn tham số $t_n = 0.25$, chúng tôi thu được các kết quả số tương ứng với các giá trị khác nhau của N như được trình bày trong Bảng 3.1. Hình ảnh khôi phục tín hiệu với $N = 50$ được thể hiện trong Hình 3.3.

Bảng 3.1: Bảng kết quả số của thuật toán (3.30)

N	Số bước lặp trung bình	Thời gian trung bình (s)	Sai số trung bình
10	367.26	0.054062	0.059542
20	144.82	0.035797	0.023415
30	96.82	0.031199	0.016185
50	55.76	0.023691	0.009343



Hình 3.3: Tín hiệu gốc và tín hiệu khôi phục bằng thuật toán (3.30) với $N = 50$

Chương 4

Hai thuật toán chiếu với đa thành phần quán tính giải bài toán (SCSP-MOE)

Trong chương này, chúng tôi trình bày hai thuật toán chiếu xoay vòng cho bài toán (SCSP-MOE), được xây dựng dựa trên phương pháp điểm gần kề kết hợp với đa thành phần quán tính và kỹ thuật chiếu lai ghép hoặc chiếu co hẹp. Tính hội tụ mạnh của hai thuật toán sẽ lần lượt được chứng minh trong các định lý. Phần cuối của chương trình bày hai ví dụ số minh họa cho các kết quả lý thuyết, đồng thời so sánh với một số thuật toán đã có trước đó, qua đó minh họa tính hiệu quả của các thuật toán đề xuất. Các kết quả của chương này được trình bày dựa trên nội dung của bài báo (CT3).

4.1 Thuật toán chiếu lai ghép

Trong chương này, để thuận tiện cho việc trình bày thuật toán và chứng minh định lý, chúng tôi biểu diễn bài toán (SCSP-MOE) như sau.

Tìm phần tử $p \in \Omega$ với các giả thiết:

(O1) $i \in J = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, $\mathcal{H}_i$ là một không gian Hilbert thực và $f_i \in \mathcal{H}_i$ là một phần tử cho trước.

(O2) Với mỗi $i \in J$, $A_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$ là toán tử γ_i-đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}_i$.

(O3) $T_0 = I_0$ là ánh xạ đồng nhất trên $\mathcal{H}_0$, $T_j : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ là các toán tử tuyến tính bị chặn trên $\mathcal{H}_j$ với toán tử liên hợp tương ứng là $T_j^* : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_0$.

(O4) $\Omega = \bigcap_{i \in J} \Omega_{A_i} \neq \emptyset$, trong đó $\Omega_{A_i} = \{p \in \mathcal{H}_0 : A_i(T_i(p)) = f_i\}$ với mỗi $i \in J$.

Bằng cách kết hợp thuật toán chiếu xoay vòng với đa thành phần quán tính, chúng tôi xây dựng thuật toán sau để giải bài toán (SCSP-MOE). Đặc biệt, thuật toán của chúng tôi sử dụng *ánh xạ điều khiển chỉ số (index control mapping)* nhằm

tăng tính linh hoạt trong việc xác định thứ tự cũng như cách thức lựa chọn các ánh xạ tại mỗi bước lặp.

Trước hết, chúng tôi nhắc lại khái niệm ánh xạ điều khiển chỉ số. Ánh xạ $c : \mathbb{N} \to J$, với $J = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ được gọi là ánh xạ điều khiển chỉ số nếu với mỗi $i \in J$, tồn tại một số tự nhiên M_i sao cho

$$i \in \{c(n), c(n+1), \ldots, c(n+M_i-1)\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ví dụ như, ánh xạ $c : \mathbb{N} \to J$ được định nghĩa bởi

$$c(n) = n \mod (N+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

là một ánh xạ điều khiển chỉ số.

Thuật toán đầu tiên được xây dựng qua các bước sau.

Thuật toán 4.1.1 Thuật toán chiếu lai ghép

1: Chọn các dãy số thực bị chặn $\{\ell_{t,n}\}$, với $t = 1, 2, \ldots, k$.

2: Chọn tùy ý các điểm khởi tạo

$$x_{-k}, x_{-(k-1)}, \ldots, x_{-1}, x_0 \in \mathcal{H}_0.$$

3: **for** $n = 0, 1, 2, \ldots$ **do**

4: Tính

$$y_n = x_n + \sum_{t=1}^{k} \ell_{t,n}\big(x_{n+1-t} - x_{n-t}\big).$$

5: Tìm $z_n \in \mathcal{H}_0$ thỏa mãn

$$T^*_{c(n)}\big(A_{c(n)}(T_{c(n)}(z_n))\big) - T^*_{c(n)}(f_{c(n)}) + z_n = y_n. \tag{4.1}$$

6: Xác định

$$C_n = \{a \in \mathcal{H}_0 \,|\, \|z_n - a\| \le \|y_n - a\|\}, \tag{4.2}$$

$$Q_n = \{b \in \mathcal{H}_0 \,|\, \langle x_0 - x_n,\ b - x_n\rangle \le 0\}. \tag{4.3}$$

7: Cập nhật

$$x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0). \tag{4.4}$$

8: **end for**

Sự hội tụ mạnh của dãy $\{x_n\}$ sinh bởi Thuật toán 4.1.1 được thiết lập trong định lý sau.

Định lý 4.1.4. *Dãy $\{x_n\}$ được sinh bởi Thuật toán 4.1.1 hội tụ mạnh đến một phần tử $x_* \in \Omega$ thỏa mãn $x_* = P_\Omega(x_0)$.*

4.2 Thuật toán chiếu co hẹp

Trong mục này, chúng tôi đề xuất một biến thể của Thuật toán 4.1.1 bằng cách sử dụng phương pháp chiếu co hẹp để giải bài toán (SCSP-MOE).

Thuật toán 4.2.1 Thuật toán chiếu co hẹp

1: Chọn các dãy số thực bị chặn $\{\ell_{t,n}\}$, với $t = 1, 2, \ldots, k$.

2: Chọn tùy ý các điểm khởi tạo

$$x_{-k}, x_{-(k-1)}, \ldots, x_{-1}, x_0 \in \mathcal{H}_0,$$

và đặt $\mathcal{W}_{-1} = \mathcal{H}_0$.

3: **for** $n = 0, 1, 2, \ldots$ **do**

4: Tính

$$y_n = x_n + \sum_{t=1}^{k} \ell_{t,n}\big(x_{n+1-t} - x_{n-t}\big).$$

5: Tìm $z_n \in \mathcal{H}_0$ thỏa mãn

$$T^*_{c(n)}\big(A_{c(n)}(T_{c(n)}(z_n))\big) - T^*_{c(n)}(f_{c(n)}) + z_n = y_n.$$

6: Xác định

$$\mathcal{W}_n = \{a \in \mathcal{W}_{n-1} \,|\, \|z_n - a\| \leq \|y_n - a\|\}.$$

7: Cập nhật

$$x_{n+1} = P_{\mathcal{W}_n}(x_0).$$

8: **end for**

Định lý sau đây trình bày về sự hội tụ mạnh của dãy lặp được xây dựng trong thuật toán trên đến nghiệm của bài toán (SCSP-MOE).

Định lý 4.2.2. *Dãy $\{x_n\}$ sinh bởi Thuật toán 4.2.1 hội tụ mạnh đến một phần tử $x_\star \in \Omega$ thỏa mãn $x_\star = P_\Omega(x_0)$.*

Nhận xét 4.2.3. (i) Trong một số công trình trước đây, các thuật toán giải bài toán (SCSP-MOE) yêu cầu sử dụng thông tin về hệ số đơn điệu mạnh ngược của các toán tử – một tham số thường khó xác định trong thực tế. Ngược lại, hai thuật toán được đề xuất trong Chương 4 được xây dựng mà không phụ thuộc vào tham số này, nhờ đó có tính linh hoạt cao và phạm vi ứng dụng rộng rãi hơn.

(ii) Các thuật toán trước đây như trong (CT1) cần giải một phương trình liên

quan đến tổng tất cả các toán tử để tính x_{n+1} tại mỗi bước lặp. Hai thuật toán được đề xuất trong chương này chỉ yêu cầu tính toán với từng toán tử T_i và A_i tại mỗi bước lặp, qua đó làm giảm đáng kể độ phức tạp tính toán.

(iii) Có thể áp dụng Thuật toán 4.1.1 và Thuật toán 4.2.1 để giải bài toán điểm bất động chung tách với đa tập đầu ra, bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra và bài toán không điểm chung tách với đa tập đầu ra.

4.3 Ví dụ số minh họa

Trong phần này chúng tôi đưa ra hai ví dụ minh họa cho hai thuật toán của Chương 4. Bao gồm, một ví dụ về bài toán điểm cực tiểu tách với đa tập đầu ra trong không gian Hilbert hữu hạn chiều và một ví dụ về bài toán chấp nhận tách với đa tập đầu ra trong không gian Hilbert vô hạn chiều. Trong phần tóm tắt này chúng tôi trình bày ngắn gọn Ví dụ 4.3.1.

Ví dụ 4.3.1. Xét bài toán điểm cực tiểu tách với đa tập đầu ra:

$$\text{Tìm } x \in \Omega^* := \bigcap_{i=0}^{3} T_i^{-1}(\operatorname{Argmin} g_i). \tag{4.25}$$

Với các dữ liệu sau:
(i) Các toán tử chi phí $g_0 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R},\ g_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ và $g_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là các hàm lồi và khả vi Fréchet, được xác định như sau:

$$\begin{aligned}
&g_0(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 - 1)^2, \qquad \forall\, x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5,\\
&g_1(y) = (y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 - 1)^2, \qquad \forall\, y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4,\\
&g_2(z) = (2z_1 - z_2 + z_3 - 1)^2, \qquad \forall\, z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3,\\
&g_3(t) = (t_1 + t_2 - 1)^2, \qquad \forall\, t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

(ii) $T_0 = I_0$ là toán tử đồng nhất trên $\mathbb{R}^5$. Các ánh xạ chuyển $T_1 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $T_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ và $T_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ được xác định tương ứng như sau:

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= (x_1 + x_2 - 4x_5,\ 2x_3 - x_4 + x_5,\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4,\ 2x_2 + 3x_5),\\
T_2(x) &= (x_1 - x_2 + x_4,\ -2x_3 + 2x_4 - x_5,\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4),\\
T_3(x) &= (x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5,\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5),
\end{aligned}$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$.

Khi đó, tập nghiệm của bài toán là

$$\Omega^* = \{\, x = (5 - 3t,\ -4,\ 2,\ 1 + t,\ t) \in \mathbb{R}^5 : t \in \mathbb{R} \,\}.$$

Sử dụng Thuật toán 4.1.1 và Thuật toán 4.2.1 với các toán tử A_i lần lượt được thay bằng $I_i - J^{\partial g_i}$, $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, trong đó

$$J^{\partial g_i} = (I_i + \partial g_i)^{-1}, \qquad i = 0, 1, 2, 3,$$

với I_1, I_2 và I_3 lần lượt là các toán tử đồng nhất trên $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$, chúng tôi thu được các thuật toán tương ứng để gải bài toán (4.25). Trong ví dụ này, chúng tôi sử dụng ánh xạ điều khiển chỉ số

$$c(n) = n \mod 4,$$

và chọn các điểm đầu như sau:

$$x_{-3} = (3, 0, 3, 0, 3),\ x_{-2} = (2, 1, 2, 1, 2), x_{-1} = (1, 2, 1, 2, 1),\ x_0 = (-4, 0, 4, 0, -4).$$

Ngoài ra, dễ thấy rằng $x_* = P_{\Omega^*}(x_0) = (-1,\ -4,\ 2,\ 3,\ 2)$.

Chúng tôi cũng so sánh hai thuật toán trên với Thuật toán 2 (viết tắt là ALGO-H1) và Thuật toán 3 (viết tắt là ALGO-H2) trong [35] (Ha, N. S., Tuyen, T. M., & Huyen, P. T. V. (2023). Inertial proximal point algorithm for the split common solution problem of monotone operator equations. *Computational and Applied Mathematics*, **42**, Article 303).

Quy tắc dừng cho tất cả các thuật toán được lựa chọn như sau

$$\varepsilon_n = \|x_n - x_*\| < \text{TOL},$$

trong đó TOL là ngưỡng sai số cho trước.

Các kết quả tính toán được trình bày trong Bảng 4.1, Bảng 4.2 và Bảng 4.3.

Bảng 4.1: Bảng kết quả số của Thuật toán 4.1.1 cho Ví dụ 4.3.1

Bộ tham số	**TOL**	n	ε_n	**Thời gian** (s)
$\ell_{1,n} = 1,\ \ell_{2,n} = -3,\ \ell_{3,n} = 2$	10^{-4}	114	9.9000×10^{-5}	0.2854
	10^{-5}	130	9.9781×10^{-6}	0.3011
	10^{-6}	146	9.3456×10^{-7}	0.3232
$\ell_{1,n} = 50,\ \ell_{2,n} = -25,\ \ell_{3,n} = 100$	10^{-4}	134	9.0839×10^{-5}	0.2949
	10^{-5}	150	9.1640×10^{-6}	0.3569
	10^{-6}	166	8.8274×10^{-7}	0.3900
$\ell_{1,n} = 100,\ \ell_{2,n} = -30,\ \ell_{3,n} = -10$	10^{-4}	164	9.3564×10^{-5}	0.3636
	10^{-5}	188	8.0723×10^{-6}	0.4018
	10^{-6}	206	9.9109×10^{-7}	0.4511
$\ell_{1,n} = 1000/n,\ \ell_{2,n} = -50,\ \ell_{3,n} = 25$	10^{-4}	119	9.0477×10^{-5}	0.2712
	10^{-5}	135	9.1169×10^{-6}	0.3115
	10^{-6}	151	8.4995×10^{-7}	0.3393

Bảng 4.2: Bảng kết quả số của Thuật toán 4.2.1 cho Ví dụ 4.3.1

Bộ tham số	**TOL**	n	ε_n	**Thời gian** (s)
$\ell_{1,n}=1,\ \ell_{2,n}=-3,\ \ell_{3,n}=2$	10^{-4}	72	9.9920×10^{-5}	0.4212
	10^{-5}	83	7.7280×10^{-6}	0.5535
	10^{-6}	95	6.5143×10^{-7}	0.7336
$\ell_{1,n}=50,\ \ell_{2,n}=-25,\ \ell_{3,n}=100$	10^{-4}	123	8.4315×10^{-5}	0.6706
	10^{-5}	135	7.6039×10^{-6}	0.8289
	10^{-6}	147	7.1771×10^{-7}	0.9956
$\ell_{1,n}=100,\ \ell_{2,n}=-30,\ \ell_{3,n}=-10$	10^{-4}	151	4.7631×10^{-5}	1.1650
	10^{-5}	161	9.8930×10^{-6}	1.3968
	10^{-6}	175	6.4232×10^{-7}	1.6950
$\ell_{1,n}=1000/n,\ \ell_{2,n}=-50,\ \ell_{3,n}=25$	10^{-4}	95	6.7640×10^{-5}	0.4592
	10^{-5}	106	8.0157×10^{-6}	0.5611
	10^{-6}	115	8.7889×10^{-7}	0.6583

Bảng 4.3: Bảng kết quả số của hai thuật toán trong [35]

TOL	θ_n	**Thuật toán**	**n**	ε_n	**Thời gian (s)**
10^{-4}	50	ALGO-H1	1607	9.9735×10^{-5}	5.3989
		ALGO-H2	303	9.9301×10^{-5}	1.6858
	100	ALGO-H1	3202	9.9604×10^{-5}	11.3877
		ALGO-H2	325	8.8377×10^{-5}	2.1084
	$1000/n$	ALGO-H1	263	9.1738×10^{-5}	1.5724
		ALGO-H2	319	9.6868×10^{-5}	2.1917
10^{-5}	50	ALGO-H1	1826	9.9617×10^{-6}	5.9028
		ALGO-H2	362	9.9748×10^{-6}	2.4305
	100	ALGO-H1	3638	9.9611×10^{-6}	13.3407
		ALGO-H2	384	9.8051×10^{-6}	3.0366
	$1000/n$	ALGO-H1	281	9.1894×10^{-6}	1.6091
		ALGO-H2	373	9.0063×10^{-6}	2.9550
10^{-6}	50	ALGO-H1	2040	9.9300×10^{-7}	7.3342
		ALGO-H2	448	9.6430×10^{-7}	3.9373
	100	ALGO-H1	4065	9.9030×10^{-7}	14.9199
		ALGO-H2	474	9.4845×10^{-7}	5.0596
	$1000/n$	ALGO-H1	298	9.2445×10^{-7}	1.6584
		ALGO-H2	431	8.3679×10^{-7}	3.7227

Nhận xét 4.3.2. Các bảng số liệu 4.1–4.3 cho thấy Thuật toán 4.1.2 và Thuật toán 4.2.1 đạt độ chính xác yêu cầu, đồng thời thể hiện ưu thế về tốc độ hội tụ và hiệu quả tính toán so với một số phương pháp đã công bố.

Kết luận

Luận án này tập trung nghiên cứu một số phương pháp lặp để giải "Bài toán nghiệm chung tách của lớp phương trình toán tử đơn điệu với đa tập đầu ra (SCSP-MOE)" trong không gian Hilbert. Bài toán này là một mô hình tổng quát của lớp bài toán chấp nhận tách.

Những đóng góp chính của luận án có thể tóm tắt như sau:

- Luận án đã xây dựng *thuật toán hiệu chỉnh Tikhonov ẩn* và *thuật toán hiệu chỉnh Tikhonov hiện* cho bài toán SCSP-MOE, đồng thời chứng minh được tính hội tụ mạnh của cả hai thuật toán. Ngoài ra, các thuật toán còn được chứng minh là ổn định trước nhiễu, góp phần nâng cao tính ứng dụng.
- Luận án đề xuất *hai thuật toán điểm gần kề quán tính* (bao gồm một thuật toán hội tụ yếu và một thuật toán hội tụ mạnh), được phát triển trên cơ sở kết hợp kỹ thuật quán tính và phương pháp xấp xỉ mềm mà không cần đến thông tin về chuẩn của các ánh xạ chuyển – một ưu điểm nổi bật giúp giảm khó khăn khi tính toán.
- Luận án đã xây dựng *thuật toán chiếu xoay vòng* dựa trên phương pháp chiếu lai ghép và chiếu co hẹp, sử dụng ánh xạ điều khiển chỉ số cho bài toán (SCSP-MOE). Tại mỗi bước lặp các thuật toán được đề xuất chỉ yêu cầu tính toán với từng ánh xạ chuyển và từng toán tử chi phí tương ứng thay vì tính toán liên quan đến tổng của tất cả các toán tử như một số thuật toán khác. Đây là một hướng tiếp cận mới, tinh gọn hơn so với một số phương pháp hiện có.

Bên cạnh các đóng góp về mặt lý thuyết, luận án cũng trình bày một số ví dụ số nhằm minh họa và so sánh với một số thuật toán đã công bố, qua đó cho thấy hiệu quả của các thuật toán đề xuất.

Nhìn chung, các kết quả thu được trong luận án góp phần làm phong phú thêm lý thuyết về bài toán chấp nhận tách cũng như các phương pháp lặp trong không gian Hilbert. Đồng thời, luận án mở ra những hướng nghiên cứu tiếp theo liên quan đến việc phát triển các phương pháp lặp mạnh hơn, nhanh hơn và có khả năng mở rộng cho các mô hình bài toán tổng quát hơn và phức tạp hơn.