

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

**TÍNH ỔN ĐỊNH TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN
CỦA MỘT SỐ LỚP HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI
PHÂN CẤP PHÂN SỐ VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN
LIÊN QUAN**

Ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 9 46 01 12

**BẢN TÓM TẮT
LUẬN ÁN TIẾN SĨ**

Thái Nguyên – 2026

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Tập thể hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Mai Viết Thuận

PGS.TS. Nguyễn Trường Thanh

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3: .

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia
- Thư viện của Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên
- Trung tâm Số, Đại học Thái Nguyên

Mở đầu

Giải tích cấp phân số nghiên cứu các đạo hàm và tích phân có bậc không nguyên, bắt nguồn từ vấn đề do L'Hôpital nêu ra trong thư gửi Leibniz năm 1695; các nền tảng lý thuyết sau đó được phát triển bởi Euler, Lagrange, Liouville, Riemann và Hadamard, v.v. Có nhiều định nghĩa về đạo hàm cấp phân số, trong đó Riemann–Liouville và Caputo là hai định nghĩa phổ biến; đạo hàm Caputo được sử dụng rộng rãi hơn do cho phép đặt điều kiện ban đầu theo dạng quen thuộc của phương trình vi phân cấp số nguyên. Các mô hình cấp phân số phản ánh động lực vật lý chính xác hơn mô hình cấp số nguyên; bên cạnh đó, để mô tả hiệu ứng suy giảm nhanh, đạo hàm Caputo với nhân suy giảm được đề xuất trên cơ sở mở rộng của đạo hàm Caputo.

Bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn đã thu hút nhiều sự quan tâm trong vài thập niên gần đây do ý nghĩa thực tiễn của nó. Khái niệm này được G. Kamenkov đề xuất lần đầu vào năm 1953 và được P. Dorato phát triển vào năm 1961, với yêu cầu trạng thái hệ luôn nằm trong một miền bị chặn xác định trước trên một khoảng thời gian hữu hạn, khác với ổn định tiệm cận theo nghĩa Lyapunov.

Hiệu suất của hệ động lực thường được đánh giá thông qua mối quan hệ giữa các tham số đầu vào và đầu ra, từ đó phản ánh khả năng tối ưu hóa của hệ thống trong việc đáp ứng các yêu cầu vận hành. Trên cơ sở này, nhiều bài toán định tính quan trọng đối với các lớp hệ phương trình vi phân cấp phân số đã được nghiên cứu, tiêu biểu như bài toán tiêu hao và bài toán điều khiển đảm bảo chi phí.

Khái niệm tiêu hao được khởi xướng bởi J.C. Willems vào năm 1972 và đã trở thành một công cụ nền tảng trong phân tích và thiết kế các lớp hệ động lực. Khái niệm này là sự tổng quát hóa của các tính chất quen thuộc như ổn định hiệu suất H_∞ và tính thụ động của hệ động lực. Do đó, lý thuyết tiêu hao nhận được sự quan tâm đặc biệt nhờ tính ứng dụng cao trong kỹ thuật, vật lý và các lớp hệ điều khiển. Đã có nhiều công bố đáng chú ý về bài toán tiêu hao cho các lớp hệ động lực khác nhau.

Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí đã được S. Chang và T. Peng đề xuất lần đầu vào năm 1972. Khi nghiên cứu các bài toán điều khiển trong thời gian hữu hạn, bên cạnh việc xây dựng các tiêu chuẩn ổn định, việc thiết kế các bộ điều khiển

có khả năng đảm bảo một mức hiệu suất xác định cũng là một vấn đề được quan tâm. Cụ thể, bài toán này không chỉ yêu cầu bộ điều khiển duy trì tính ổn định của hệ thống mà còn đòi hỏi giá trị của hàm chi phí luôn nằm trong một giới hạn chấp nhận được. Do đó, sự kết hợp giữa điều khiển đảm bảo chi phí và ổn định trong thời gian hữu hạn mang lại ý nghĩa ứng dụng cao trong thiết kế điều khiển thông qua việc thiết lập một chặn trên cho chỉ số hiệu suất đã xác định. Đã có nhiều công bố đáng chú ý về bài toán điều khiển đảm bảo chi phí cho các lớp hệ động lực khác nhau.

Các kết quả liên quan đến bài toán tiêu hao và điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn hiện nay vẫn chủ yếu tập trung vào các lớp hệ cấp số nguyên, trong khi đối với các lớp hệ cấp phân số, số lượng công trình tương ứng còn khá hạn chế.

Đối với các hệ có trễ, các phương pháp phân tích trong trường hợp cấp số nguyên thường dựa trên việc xây dựng các hàm Lyapunov–Krasovskii thích hợp. Tuy nhiên, khi chuyển sang các hệ phương trình vi phân cấp phân số không chắc chắn có trễ, việc xây dựng các hàm Lyapunov–Krasovskii dạng này cũng như việc xử lý đạo hàm cấp phân số của các hàm toàn phương trở nên phức tạp hơn.

Xuất phát từ các phân tích nêu trên, chúng tôi lựa chọn đề tài *“Tính ổn định trong thời gian hữu hạn của một số lớp hệ phương trình vi phân cấp phân số và một số bài toán liên quan”* làm hướng nghiên cứu của luận án.

Trong luận án này, lớp hệ đầu tiên được xem xét là hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có nhiều và trễ hằng số, được mô tả bởi hệ sau

$$\begin{cases} {}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]g(x(t)) \\ \quad + [W + \Delta W(t)]h(x(t - \tau)) + [D + \Delta D(t)]\omega(t), \quad t \geq 0, \\ y(t) = C_1x(t) + C_2x(t - \tau) + C_3g(x(t)) + C_4h(x(t - \tau)) + C_5\omega(t), \quad t \geq 0, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

Kết quả đạt được là dựa vào một bổ đề mới về ước lượng hàm toàn phương cho đạo hàm cấp phân số Caputo với nhân suy giảm, trên cơ sở đó, các điều kiện đủ dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính được thiết lập nhằm đảm bảo tính tiêu hao vững trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ được xem xét.

Lớp hệ thứ hai được xem xét là hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số có nhiều,

được mô tả bởi hệ phương trình sau

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [W + \Delta W(t)]g(x(t)) \\ \quad + [D + \Delta D(t)]\omega(t), \quad t \geq 0, \\ y(t) = C_1 x(t) + C_2 g(x(t)), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2)$$

Các kết quả đạt được dựa trên định nghĩa tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn đã được giới thiệu, qua đó thiết lập các điều kiện đủ phụ thuộc cấp phân số dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính nhằm bảo đảm hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo có nhiều thỏa mãn tính tiêu hao mở rộng trong một khoảng thời gian hữu hạn.

Phần tiếp theo của luận án nghiên cứu lớp hệ tổ hợp lỗi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên, được mô tả như sau

$$\begin{cases} {}^C_0 D^\alpha x(t) = A(\xi)x(t) + D(\xi)x(t - h(t)) + B(\xi)u(t), \quad t > 0, \\ x(\eta) = \varphi(\eta), \quad \forall \eta \in [-h_2, 0]. \end{cases} \quad (3)$$

Kết quả đạt được là đưa ra các điều kiện đủ cho sự tồn tại của luật điều khiển phản hồi trạng thái đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn được thiết lập dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính đối với lớp hệ (3).

Phần cuối của luận án tập trung nghiên cứu bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có trễ, được mô tả bởi hệ phương trình sau

$$\begin{cases} {}^{TC}_0 D_0^{\alpha, \lambda} x(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (D + \Delta D(t))x(t - \tau) \\ \quad + f(t, x(t)) + g(t, x(t - \tau)) + (B + \Delta B(t))u(t), \quad t \geq 0, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (4)$$

Kết quả đạt được là thiết lập các điều kiện đủ phụ thuộc trễ dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính, nhằm thiết kế luật điều khiển phản hồi trạng thái đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ xem xét.

Nội dung chính của luận án được trình bày trong 3 chương:

- Chương 1: Cơ sở toán học.
- Chương 2: Bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn cho một số lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số.
- Chương 3: Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho một số lớp hệ điều khiển cấp phân số.

Chương 1

Cơ sở toán học

Chương này trình bày các kiến thức toán học cơ sở làm nền tảng cho việc nghiên cứu các bài toán của luận án. Nội dung chương này bao gồm: Một số kiến thức cơ bản về giải tích cấp phân số, bài toán tồn tại và duy nhất nghiệm cho lớp hệ phương trình vi phân cấp phân số, ổn định trong thời gian hữu hạn và ổn định hóa trong thời gian hữu hạn, bài toán tiêu hao cho hệ động lực, bài toán điều khiển đảm bảo chi phí và một số bổ đề hỗ trợ được sử dụng trong việc chứng minh các kết quả chính.

- 1.1 Một số kiến thức cơ bản về giải tích cấp phân số
- 1.2 Bài toán tồn tại và duy nhất nghiệm cho hệ phương trình vi phân cấp phân số
- 1.3 Ổn định trong thời gian hữu hạn và ổn định hoá trong thời gian hữu hạn
- 1.4 Bài toán tiêu hao cho hệ động lực
- 1.5 Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí
- 1.6 Một số bổ đề hỗ trợ

Chương 2

Bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn cho một số lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có nhiều và trễ hằng số, đồng thời nghiên cứu bài toán tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo có nhiều. Các nội dung trình bày trong chương này dựa trên các kết quả nghiên cứu đã được công bố trong các bài báo [CT4, CT1] thuộc danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

2.1 Bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có nhiều và trễ hằng số

Xét hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có nhiều và trễ hằng số sau

$$\begin{cases} {}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]g(x(t)) \\ \quad + [W + \Delta W(t)]h(x(t - \tau)) + [D + \Delta D(t)]\omega(t), \quad t \geq 0, \\ y(t) = C_1x(t) + C_2x(t - \tau) + C_3g(x(t)) + C_4h(x(t - \tau)) + C_5\omega(t), \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (2.1)$$

trong đó $\alpha \in (0, 1)$ là cấp phân số và $\lambda > 0$ là tham số nhân suy giảm. Véc tơ $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ là trạng thái của hệ, $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ là nhiễu tác động bên ngoài. Số chiều n tương ứng với số lượng nơ-ron trong mạng. Ma trận $A = \text{diag}\{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận đường chéo xác định dương, các ma trận $B, W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ và $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$ là các ma trận thực đã biết. Các ma trận tham số bất

định được xác định bởi

$$\begin{aligned}\Delta A(t) &= E_a F_1(t) H_a, & \Delta B(t) &= E_b F_2(t) H_b, \\ \Delta D(t) &= E_d F_3(t) H_d, & \Delta W(t) &= E_w F_4(t) H_w,\end{aligned}$$

trong đó $E_a, E_b, E_d, E_w, H_a, H_b, H_d, H_w$ là các ma trận thực đã biết có kích thước phù hợp. Các ma trận chưa biết biến thiên theo thời gian $F_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, thỏa mãn điều kiện

$$F_i^\top(t) F_i(t) \leq I, \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.2)$$

Hàm $\varphi(\cdot) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu với chuẩn

$$\|\varphi\| = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Các hàm kích hoạt phi tuyến $g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ được xác định bởi

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x_1(t)) \\ \vdots \\ g_n(x_n(t)) \end{bmatrix}, \quad h(x(t - \tau)) = \begin{bmatrix} h_1(x_1(t - \tau)) \\ \vdots \\ h_n(x_n(t - \tau)) \end{bmatrix},$$

với mọi $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$.

Để phân tích tính tiêu hao của hệ, chúng tôi sử dụng các giả thiết sau.

Giả thiết 2.1.1. Các hàm kích hoạt phi tuyến $g_i(t)$, $h_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) là liên tục và bị chặn với $g_i(0) = 0$, $h_i(0) = 0$ và thỏa mãn

$$\begin{aligned}k_i^- &\leq \frac{g_i(u) - g_i(v)}{u - v} \leq k_i^+, \\ t_i^- &\leq \frac{h_i(u) - h_i(v)}{u - v} \leq t_i^+, \end{aligned} \quad (2.3)$$

trong đó $k_i^-, k_i^+, t_i^-, t_i^+$ là các số thực đã biết, $u, v \in \mathbb{R}, u \neq v$.

Giả thiết 2.1.2. Nhiều đầu vào $\omega(\cdot) \in L_2([0, +\infty), \mathbb{R}^q)$ thỏa mãn điều kiện sau

$$\exists \bar{\omega} : \omega^\top(t) \omega(t) < \bar{\omega},$$

trong đó $\bar{\omega}$ là một số thực dương.

Trong trường hợp không có véc tơ đầu ra, hệ (2.1) trở thành

$$\begin{cases} {}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda} x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]g(x(t)) \\ \quad + [W + \Delta W(t)]h(x(t - \tau)) + [D + \Delta D(t)]\omega(t), t \geq 0, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2.4)$$

Định nghĩa 2.1.3. Cho các số dương c_1, c_2, T và $\bar{\omega}$ với $c_1 < c_2$, hệ (2.4) được gọi là bị chặn vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega})$ nếu điều kiện sau được thỏa mãn

$$\|\varphi\|^2 \leq c_1 \Rightarrow \|x(t)\|^2 < c_2, \quad \forall t \in [0, T],$$

với mọi tín hiệu nhiễu $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ thỏa mãn Giả thiết 2.1.2.

Định nghĩa 2.1.4. Hệ (2.1) được gọi là tiêu hao vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega})$ nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:

- (i) Hệ (2.4) bị chặn vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega})$.
- (ii) Với điều kiện ban đầu $\varphi(t) \equiv 0$ với mọi $t \in [-\tau, 0]$, tồn tại số dương $\gamma > 0$ sao cho

$$\int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} \hat{J}(s) ds \geq \gamma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} \omega^\top(s) \omega(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

trong đó

$$\hat{J}(s) = 2y^\top(s) \Psi_2 \omega(s) + y^\top(s) \Psi_1 y(s) + \omega^\top(s) \Psi_3 \omega(s),$$

với Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 là các ma trận thực cho trước. Trong đó, Ψ_1 và Ψ_3 là các ma trận đối xứng, ma trận $\Psi_1 \leq 0$ và nhiễu $\omega(t)$ thỏa mãn Giả thiết 2.1.2.

Định lý dưới đây đưa ra một tiêu chuẩn về tính tiêu hao trong thời gian hữu hạn cho hệ (2.1).

Định lý 2.1.5. Cho các số dương c_1, c_2, T và $\bar{\omega}$ với $c_1 < c_2$. Xét hệ (2.1) thỏa mãn các Giả thiết 2.1.1 và 2.2.2. Giả sử tồn tại các số dương $r_a, r_b, r_d, r_w, \gamma, \gamma_1, \gamma_2$, hai ma trận đối xứng xác định dương P, Q và các ma trận đường chéo xác định dương Λ_g, Λ_h sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ * & \Psi_3 - Q - \gamma I - \gamma_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.5a)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Xi}_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} & \Xi_{15} & PE_a & PE_b & PE_d & PE_w \\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} & \Xi_{24} & \Xi_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Xi_{33} & \Xi_{34} & \Xi_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & \Xi_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -r_a I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -r_b I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -r_d I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -r_w I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.5b)$$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}(P)} (\lambda_1 c_1 + \lambda_2) < c_2, \quad (2.5c)$$

$$Q - (\gamma_1 - \gamma_2)I > \gamma_0(1 + e^{\lambda\tau})I, \quad (2.5d)$$

khi đó hệ (2.1) là tiêu hao vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega})$,
trong đó

$$K_{1g} = \text{diag}\{k_1^- k_1^+, k_2^- k_2^+, \dots, k_n^- k_n^+\}, K_{2g} = \text{diag}\left\{\frac{k_1^- + k_1^+}{2}, \dots, \frac{k_n^- + k_n^+}{2}\right\},$$

$$K_{1h} = \text{diag}\{t_1^- t_1^+, t_2^- t_2^+, \dots, t_n^- t_n^+\}, K_{2h} = \text{diag}\left\{\frac{t_1^- + t_1^+}{2}, \dots, \frac{t_n^- + t_n^+}{2}\right\},$$

$$\Lambda_g = \text{diag}\{\Lambda_{11}^g, \Lambda_{12}^g, \dots, \Lambda_{1n}^g\}, \Lambda_h = \text{diag}\{\Lambda_{11}^h, \Lambda_{12}^h, \dots, \Lambda_{1n}^h\},$$

$$\xi_1 = E_\alpha(\tau T^\alpha), \xi_2 = e^{\lambda\tau} (E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1), \xi_3 = \gamma_1 \bar{\omega} e^{\lambda\tau} \frac{E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1}{\tau},$$

$$\lambda_1 = \lambda_{\max}(P) \xi_1 \sum_{j=0}^{\lfloor T/\tau \rfloor + 1} \xi_2^j, \lambda_2 = \frac{\xi_3}{\xi_1 + \xi_2 - 1} \left(\xi_1 \sum_{j=0}^{\lfloor T/\tau \rfloor + 1} \xi_2^j - 1 \right),$$

$$\bar{\gamma}_0 = (\lambda_1 \|\varphi\|^2 + \lambda_2) \tau, x_\tau(t) = x(t - \tau),$$

$$\gamma_0 = \frac{\gamma_1 e^{\lambda\tau} (E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1)}{\xi_1 + \xi_2 - 1} \left(\xi_1 \sum_{j=0}^{\lfloor T/\tau \rfloor + 1} \xi_2^j - 1 \right),$$

$$\hat{\Xi}_{11} = -PA - A^\top P + r_a H_a^\top H_a - K_{1g} \Lambda_g - C_1^\top \Psi_1 C_1 - \tau P,$$

$$\Xi_{12} = -C_1^\top \Psi_1 C_2, \Xi_{13} = PB + K_{2g} \Lambda_g - C_1^\top \Psi_1 C_3,$$

$$\Xi_{14} = PW - C_1^\top \Psi_1 C_4, \Xi_{15} = -C_1^\top \Psi_2 - C_1^\top \Psi_1 C_5 + PD,$$

$$\Xi_{22} = -K_{1h} \Lambda_h - C_2^\top \Psi_1 C_2 - \tau P, \Xi_{23} = -C_2^\top \Psi_1 C_3,$$

$$\Xi_{24} = K_{2h} \Lambda_h - C_2^\top \Psi_1 C_4, \Xi_{25} = -C_2^\top \Psi_2 - C_2^\top \Psi_1 C_5,$$

$$\Xi_{33} = r_b H_b^\top H_b - \Lambda_g - C_3^\top \Psi_1 C_3, \Xi_{34} = -C_3^\top \Psi_1 C_4, \Xi_{35} = -C_3^\top \Psi_2 - C_3^\top \Psi_1 C_5,$$

$$\Xi_{44} = r_w H_w^\top H_w - \Lambda_h - C_4^\top \Psi_1 C_4, \Xi_{45} = -C_4^\top \Psi_2 - C_4^\top \Psi_1 C_5,$$

$$\Xi_{55} = r_d H_d^\top H_d - C_5^\top \Psi_2 - \Psi_2^\top C_5 - C_5^\top \Psi_1 C_5 - \Psi_3 + \gamma I - \gamma_1 I + \gamma_2 I + Q.$$

Trong trường hợp $\lambda = 0$ và với mọi $t \geq 0$, hệ (2.1) trở thành lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo có trễ hằng số sau

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = -[A + E_a F_a(t) H_a] x(t) + [B + E_b F_b(t) H_b] g(x(t)) \\ \quad + [W + E_w F_w(t) H_w] h(x(t - \tau)) + [D + E_d F_d(t) H_d] \omega(t), \\ y(t) = C_1 x(t) + C_2 x(t - \tau) + C_3 g(x(t)) + C_4 h(x(t - \tau)) + C_5 \omega(t), \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2.25)$$

Từ Định lý 2.1.5, ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 2.1.7. Cho các số dương c_1, c_2, T và $\bar{\omega}$ với $c_1 < c_2$. Giả sử tồn tại các số dương $r_a, r_b, r_d, r_w, \gamma, \gamma_1, \gamma_2$, các ma trận $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ đối xứng xác định dương và các ma trận đường chéo xác định dương Λ_g, Λ_h thoả mãn các điều kiện sau

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ * & \Psi_3 - Q - \gamma I - \gamma_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.26a)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} & \Xi_{15} & PE_a & PE_b & PE_d & PE_w \\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} & \Xi_{24} & \Xi_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Xi_{33} & \Xi_{34} & \Xi_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & \Xi_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -r_a I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -r_b I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -r_d I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -r_w I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.26b)$$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}(P)} (\lambda_1 c_1 + \lambda_2) < c_2, \quad (2.26c)$$

$$Q - (\gamma_1 - \gamma_2)I > 2\tilde{\gamma}_0 I, \quad (2.26d)$$

khi đó hệ (2.25) là tiêu hao vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega})$,
trong đó

$$K_{1g} = \text{diag} \{k_1^- k_1^+, k_2^- k_2^+, \dots, k_n^- k_n^+\},$$

$$K_{2g} = \text{diag} \left\{ \frac{k_1^- + k_1^+}{2}, \frac{k_2^- + k_2^+}{2}, \dots, \frac{k_n^- + k_n^+}{2} \right\},$$

$$K_{1h} = \text{diag} \{t_1^- t_1^+, t_2^- t_2^+, \dots, t_n^- t_n^+\},$$

$$K_{2h} = \text{diag} \left\{ \frac{t_1^- + t_1^+}{2}, \frac{t_2^- + t_2^+}{2}, \dots, \frac{t_n^- + t_n^+}{2} \right\},$$

$$\Lambda_g = \text{diag} \{\Lambda_{11}^g, \Lambda_{12}^g, \dots, \Lambda_{1n}^g\}, \quad \Lambda_h = \text{diag} \{\Lambda_{11}^h, \Lambda_{12}^h, \dots, \Lambda_{1n}^h\},$$

$$\xi_1 = E_\alpha(\tau T^\alpha), \quad \bar{\xi}_2 = E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1, \quad \bar{\xi}_3 = \gamma_1 \bar{\omega} \frac{E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1}{\tau},$$

$$\lambda_1 = \lambda_{\max}(P) \xi_1 \sum_{j=0}^{[T/\tau]+1} \bar{\xi}_2^j, \quad \lambda_2 = \frac{\bar{\xi}_3}{\xi_1 + \bar{\xi}_2 - 1} \left(\xi_1 \sum_{j=0}^{[T/\tau]+1} \bar{\xi}_2^j - 1 \right),$$

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_0 &= (\lambda_1 \|\varphi\|^2 + \lambda_2) \tau, \quad \tilde{\gamma}_0 = \frac{\gamma_1 (E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1)}{\xi_1 + \bar{\xi}_2 - 1} \left(\xi_1 \sum_{j=0}^{[T/\tau]+1} \bar{\xi}_2^j - 1 \right), \\
\hat{\Xi}_{11} &= -PA - A^\top P + r_a H_a^\top H_a - K_{1g} \Lambda_g - C_1^\top \Psi_1 C_1 - \tau P, \\
\Xi_{12} &= -C_1^\top \Psi_1 C_2, \quad \Xi_{13} = PB + K_{2g} \Lambda_g - C_1^\top \Psi_1 C_3, \quad \Xi_{14} = PW - C_1^\top \Psi_1 C_4, \\
\Xi_{15} &= -C_1^\top \Psi_2 - C_1^\top \Psi_1 C_5 + PD, \\
\Xi_{22} &= -K_{1h} \Lambda_h - C_2^\top \Psi_1 C_2 - \tau P, \quad \Xi_{23} = -C_2^\top \Psi_1 C_3, \quad \Xi_{24} = K_{2h} \Lambda_h - C_2^\top \Psi_1 C_4, \\
\Xi_{25} &= -C_2^\top \Psi_2 - C_2^\top \Psi_1 C_5, \\
\Xi_{33} &= r_b H_b^\top H_b - \Lambda_g - C_3^\top \Psi_1 C_3, \quad \Xi_{34} = -C_3^\top \Psi_1 C_4, \quad \Xi_{35} = -C_3^\top \Psi_2 - C_3^\top \Psi_1 C_5, \\
\Xi_{44} &= r_w H_w^\top H_w - \Lambda_h - C_4^\top \Psi_1 C_4, \quad \Xi_{45} = -C_4^\top \Psi_2 - C_4^\top \Psi_1 C_5, \\
\Xi_{55} &= r_d H_d^\top H_d - C_5^\top \Psi_2 - \Psi_2^\top C_5 - C_5^\top \Psi_1 C_5 - \Psi_3 + \gamma I - \gamma_1 I + \gamma_2 I + Q.
\end{aligned}$$

2.2 Bài toán tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo có nhiễu

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu bài toán tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn đối với lớp hệ nơ-ron không chắc chắn phi tuyến cấp phân số Caputo có nhiễu như sau

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [W + \Delta W(t)]g(x(t)) \\ \quad \quad \quad + [D + \Delta D(t)]\omega(t), \quad t \geq 0, \\ y(t) = C_1 x(t) + C_2 g(x(t)), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.28)$$

trong đó $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^\top \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ đầu ra, $\omega(\cdot) \in L_2([0, +\infty), \mathbb{R}^q)$ là nhiễu đầu vào và

$$g(x(t)) = (g_1(x_1(t)), \dots, g_n(x_n(t)))^\top$$

là các hàm kích hoạt phi tuyến. Ma trận $A = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$ là ma trận đường chéo xác định dương, các ma trận W, D, C_1, C_2 là các ma trận thực đã biết với kích thước phù hợp.

Để phân tích tính tiêu hao của hệ, chúng tôi sử dụng các giả thiết sau.

Giả thiết 2.2.1. Các ma trận tham số $\Delta A(t)$, $\Delta D(t)$ và $\Delta W(t)$ xác định bởi

$$\Delta A(t) = E_1 F_1(t) H_1, \quad \Delta W(t) = E_2 F_2(t) H_2, \quad \Delta D(t) = E_3 F_3(t) H_3,$$

trong đó $E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3$ là các ma trận thực đã biết có kích thước phù hợp, còn $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$ là các ma trận chưa biết biến thiên theo thời gian, thỏa mãn

$$F_i^\top(t)F_i(t) \leq I, \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Giả thiết 2.2.2. Các hàm kích hoạt phi tuyến $g_i(t) (i = 1, 2, \dots, n)$ là liên tục và bị chặn với $g_i(0) = 0$, thỏa mãn

$$k_i^- \leq \frac{g_i(u) - g_i(v)}{u - v} \leq k_i^+, \quad (2.29)$$

trong đó k_i^-, k_i^+ là các số thực đã biết, $u, v \in \mathbb{R}, u \neq v$.

Khi không có véc tơ đầu ra $y(t)$, hệ (2.28) trở thành

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [W + \Delta W(t)]g(x(t)) \\ \quad + [D + \Delta D(t)]\omega(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.30)$$

Định nghĩa 2.2.3. Cho ma trận $R \in \mathbb{S}_n^+$ và các số dương $c_1, c_2, \bar{\omega}, T (c_1 < c_2)$. Hệ (2.30) được gọi là bị chặn vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega}, R)$ nếu điều kiện sau được thỏa mãn

$$x_0^\top R x_0 \leq c_1 \Rightarrow x^\top(t) R x(t) < c_2, \quad \forall t \in [0, T],$$

với mọi nhiễu đầu vào $\omega(t)$ thỏa mãn Giả thiết 2.1.2.

Định nghĩa 2.2.4. Giả sử các Giả thiết 2.1.2, 2.2.1, 2.2.2 được thỏa mãn. Hệ (2.28) được gọi là tiêu hao mở rộng vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega}, R)$, nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn

- (i) Hệ (2.30) là bị chặn vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega}, R)$.
- (ii) Với điều kiện ban đầu bằng không, bất đẳng thức sau đây được thỏa mãn

$${}_0 I_t^\alpha \hat{J}(t) - y^\top(t) \Psi_4 y(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.31)$$

trong đó

$$\hat{J}(t) = y^\top(t) \Psi_1 y(t) + 2y^\top(t) \Psi_2 \omega(t) + \omega^\top(t) \Psi_3 \omega(t),$$

với Ψ_1, Ψ_3, Ψ_4 là các ma trận thực đối xứng, có số chiều thích hợp thỏa mãn $\Psi_1 \leq 0, \Psi_3 \geq 0, \Psi_4 \geq 0$ và Ψ_2 là một ma trận thực có số chiều thích hợp.

Đối với hệ (2.28), chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ đảm bảo tính tiêu hao mở rộng vững trong thời gian hữu hạn như sau.

Định lý 2.2.6. Cho các số dương $c_1, c_2, \bar{\omega}, T$ với $c_1 < c_2$ và ma trận $R \in \mathbb{S}_n^+$. Giả sử các giả thiết 2.1.2, 2.2.1 được thỏa mãn. Hệ (2.28) là tiêu hao mở rộng vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, R, \bar{\omega})$, nếu tồn tại ba số dương $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, hai ma trận $Q, X \in \mathbb{S}_n^+$, và ma trận đường chéo xác định dương $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & QE_1 & QE_2 & QE_3 \\ * & \Omega_{22} & -C_2^\top \Psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Omega_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon_3 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.32a)$$

$$\lambda_2 c_1 + \frac{\lambda_{\max}(\Psi_3) \bar{\omega}}{\Gamma(\alpha + 1)} T^\alpha < \lambda_1 c_2, \quad (2.32b)$$

$$\begin{bmatrix} C_1^\top \Psi_4 C_1 & C_1^\top \Psi_4 C_2 \\ * & C_2^\top \Psi_4 C_2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2.32c)$$

$$X + K^2 < Q, \quad (2.32d)$$

trong đó

$$K = \text{diag} \{k_1^+, k_2^+, \dots, k_n^+\}, K_1 = \text{diag} \{k_1^- k_1^+, k_2^- k_2^+, \dots, k_n^- k_n^+\},$$

$$K_2 = \text{diag} \left\{ \frac{k_1^- + k_1^+}{2}, \frac{k_2^- + k_2^+}{2}, \dots, \frac{k_n^- + k_n^+}{2} \right\},$$

$$\bar{Q} = R^{-\frac{1}{2}} Q R^{-\frac{1}{2}}, \lambda_1 = \lambda_{\min}(\bar{Q}), \lambda_2 = \lambda_{\max}(\bar{Q}),$$

$$\Omega_{11} = -QA - A^\top Q + \epsilon_1 h_1^\top h_1 - C_1^\top \Psi_1 C_1 - K_1 \Lambda,$$

$$\Omega_{22} = \epsilon_2 H_2^\top H_2 - C_2^\top \Psi_1 C_2 - \Lambda,$$

$$\Omega_{33} = \epsilon_3 H_3^\top H_3 - \Psi_3, \Omega_{12} = QW - C_1^\top \Psi_1 C_2 + K_2 \Lambda, \Omega_{13} = QD - C_1^\top \Psi_2.$$

Bằng cách chọn các ma trận $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = I$, $\Psi_3 = \gamma I$, và $\Psi_4 = 0$, trong đó γ là một hằng số dương, các tiêu chí thụ động cho hệ (2.28) chúng tôi thu được hệ quả suy ra từ Định lý 2.2.6 như sau:

Hệ quả 2.2.9. Cho các số dương $c_1, c_2, \bar{\omega}, T$ và một ma trận $R \in \mathbb{S}_n^+$. Dưới các giả thiết 2.2.1–2.1.2, hệ (2.28) là thụ động vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, R, \bar{\omega})$ nếu tồn tại các số dương $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \gamma$, các ma trận $Q, X \in \mathbb{S}_n^+$ và một ma trận đường chéo xác định dương $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sao cho các điều kiện sau

được thỏa mãn:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} & \mathcal{M}_{13} & QE_1 & QE_2 & QE_3 \\ * & \mathcal{M}_{22} & -C_2^\top & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \mathcal{M}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon_3 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.52a)$$

$$\lambda_2 c_1 + \frac{\gamma \bar{\omega}}{\Gamma(\alpha + 1)} T^\alpha < \lambda_1 c_2, \quad (2.52b)$$

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (2.52c)$$

$$X + K^2 < Q, \quad (2.52d)$$

trong đó

$$K = \text{diag}\{k_1^+, k_2^+, \dots, k_n^+\}, \quad K_1 = \text{diag}\{k_1^- k_1^+, k_2^- k_2^+, \dots, k_n^- k_n^+\},$$

$$K_2 = \text{diag}\left\{\frac{k_1^- + k_1^+}{2}, \frac{k_2^- + k_2^+}{2}, \dots, \frac{k_n^- + k_n^+}{2}\right\},$$

$$\bar{Q} = R^{-1/2} Q R^{-1/2}, \quad \lambda_1 = \lambda_{\min}(\bar{Q}), \quad \lambda_2 = \lambda_{\max}(\bar{Q}),$$

$$\mathcal{M}_{11} = -QA - A^\top Q + \epsilon_1 H_1^\top H_1 - K_1 \Lambda,$$

$$\mathcal{M}_{22} = \epsilon_2 H_2^\top H_2 - \Lambda, \quad \mathcal{M}_{33} = \epsilon_3 H_3^\top H_3 - \gamma I,$$

$$\mathcal{M}_{12} = QW + K_2 \Lambda, \quad \mathcal{M}_{13} = QD - C_1^\top.$$

Xét một trường hợp đặc biệt của hệ (2.28).

Cụ thể, khi $\Delta A(t) = 0$, $\Delta W(t) = 0$ và $\Delta D(t) = 0$, hệ (2.28) trở thành:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha x(t) = -Ax(t) + Wg(x(t)) + D\omega(t), \quad t \geq 0, \\ y(t) = C_1 x(t) + C_2 g(x(t)), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.53)$$

Theo Định lý 2.2.6, ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.10. Cho các số dương $c_1, c_2, \bar{\omega}, T$ và một ma trận $R \in \mathbb{S}_n^+$. Dưới các giả thiết 2.2.2-??, hệ (2.53) là tiêu hao vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, R, \bar{\omega})$, nếu tồn tại hai ma trận $Q, X \in \mathbb{S}_n^+$ và một ma trận đường chéo xác định dương $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & QD - C_1^\top \Psi_2 \\ * & -C_2^\top \Psi_1 C_2 - \Lambda & -C_2^\top \Psi_2 \\ * & * & -\Psi_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.54a)$$

$$\lambda_2 c_1 + \frac{\lambda_{\max}(\Psi_3) \bar{\omega}}{\Gamma(\alpha + 1)} T^\alpha < \lambda_1 c_2, \quad (2.54b)$$

$$\begin{bmatrix} C_1^\top \Psi_4 C_1 & C_1^\top \Psi_4 C_2 \\ * & C_2^\top \Psi_4 C_2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2.54c)$$

$$X + K^2 < Q, \quad (2.54d)$$

trong đó

$$\Phi_{11} = -QA - A^\top Q - C_1^\top \Psi_1 C_1 - K_1 \Lambda, \quad \Phi_{12} = QW - C_1^\top \Psi_1 C_2 + K_2 \Lambda.$$

Để so sánh với các kết quả đã có trước đó, ta xét trường hợp đặc biệt sau, trong đó hệ đang xét trở thành một hệ cấp phân số tuyến tính sau

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + D\omega(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.55)$$

trong đó $\alpha \in (0, 1)$ là cấp phân số của hệ, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ là véc tơ nhiễu đầu vào thỏa mãn Giả thiết 2.1.2, và $x_0 \in \mathbb{R}^n$ là điều kiện ban đầu. Các ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ và $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$ là các ma trận thực đã biết.

Từ Hệ quả 2.2.10, ta thu được kết quả cho tính bị chặn trong thời gian hữu hạn như sau.

Hệ quả 2.2.11. *Cho các số dương $c_1, c_2, \bar{\omega}, T$ với $c_1 < c_2$ và một ma trận $R \in \mathbb{S}_n^+$. Giả sử giả thiết 2.1.2 được thỏa mãn. Hệ (2.55) là bị chặn trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, R, \bar{\omega})$, nếu tồn tại hai ma trận $Q, P \in \mathbb{S}_n^+$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix} QA + A^\top Q & QD \\ D^\top Q & -P \end{bmatrix} < 0, \quad (2.56a)$$

$$\lambda_2 c_1 + \frac{\lambda_{\max}(P) \bar{\omega}}{\Gamma(\alpha + 1)} T^\alpha < \lambda_1 c_2, \quad (2.56b)$$

trong đó

$$\bar{Q} = R^{-\frac{1}{2}} Q R^{-\frac{1}{2}}, \quad \lambda_1 = \lambda_{\min}(\bar{Q}), \quad \lambda_2 = \lambda_{\max}(\bar{Q}).$$

2.3 Kết luận chương 2

Chương này đã nghiên cứu bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn đối với một số lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số. Đối với lớp hệ Caputo với nhân suy giảm, việc xây dựng các đánh giá Lyapunov gặp khó khăn do cấu trúc của toán tử khác với trường hợp Caputo cổ điển. Để xử lý vấn đề này, luận án đã thiết lập các Bổ đề 1.6.4 và 1.6.5, kết hợp với phương pháp hàm Lyapunov và kỹ thuật bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Các kết quả chính đạt được như sau:

- Đối với lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm, có nhiều ngoài và trễ hằng số, luận án đã thiết lập các điều kiện đủ đảm bảo tính tiêu hao trong thời gian hữu hạn dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính, trên cơ sở sử dụng phương pháp hàm Lyapunov.
- Đối với lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo có nhiều, luận án đã thiết lập các điều kiện đủ đảm bảo tính tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính, trên cơ sở sử dụng phương pháp hàm Lyapunov.
- Các ví dụ số và mô phỏng được xây dựng nhằm minh họa tính khả thi của các điều kiện đủ đã thiết lập. Kết quả mô phỏng cho thấy các điều kiện lý thuyết thu được có thể được kiểm chứng bằng tính toán số.

Chương 3

Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho một số lớp hệ phương trình vi phân cấp phân số

Chương này trình bày các kết quả nghiên cứu về bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn đối với các lớp hệ phương trình vi phân không chắc chắn cấp phân số Caputo có trễ. Nội dung chính của chương tập trung vào việc xây dựng các điều kiện đủ dưới dạng LMI nhằm đảm bảo sự tồn tại của luật điều khiển phản hồi trạng thái thỏa mãn yêu cầu điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn. Các kết quả thu được được áp dụng cho lớp hệ không chắc chắn tổ hợp lỗi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên và lớp hệ không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có trễ hằng số.

Nội dung của chương được xây dựng dựa trên hai bài báo [CT2, CT3] trong danh mục các công trình khoa học đã công bố của tác giả liên quan đến luận án.

3.1 Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ cấp phân số Caputo tổ hợp lỗi có trễ biến thiên

Xét hệ không chắc chắn tổ hợp lỗi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên như sau

$$\begin{cases} {}^C_0 D^\alpha x(t) = A(\xi)x(t) + D(\xi)x(t - h(t)) + B(\xi)u(t), & t > 0, \\ x(\eta) = \varphi(\eta), & \forall \eta \in [-h_2, 0], \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó $0 < \alpha < 1$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là luật điều khiển và các ma trận chưa biết $A(\xi)$, $B(\xi)$, $D(\xi)$ của hệ thuộc tổ hợp lỗi Ω được cho bởi

$$\Omega := \left\{ [A, B, D](\xi) = \sum_{i=1}^s \xi_i [A_i, B_i, D_i] \left| \sum_{i=1}^s \xi_i = 1, \xi_i > 0, i \in \{1, \dots, s\} \right. \right\},$$

trong đó $A_i, D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, ($i = 1, 2, \dots, s$, $s > 1$) là các ma trận thực, hàm trễ $h(t)$ thỏa mãn $0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2$, $\forall t > 0$, hàm điều kiện ban đầu

$$\varphi(t) \in C([-h_2, 0], \mathbb{R}^n) \text{ với } \|\varphi\| = \sup_{s \in [-h_2, 0]} \|\varphi(s)\|.$$

Cho số $T > 0$. Liên kết với hệ (3.1) là hàm chi phí toàn phương sau

$$J = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} [x^\top(s)Mx(s) + u^\top(s)Ru(s)] ds, \quad (3.2)$$

trong đó M và R là các ma trận đối xứng xác định dương.

Khi không có điều khiển $u(t)$, hệ (3.1) trở thành

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = A(\xi)x(t) + D(\xi)x(t-h(t)), & t > 0, \\ x(\eta) = \varphi(\eta), & \forall \eta \in [-h_2, 0]. \end{cases} \quad (3.3)$$

Định nghĩa 3.1.1. Cho $c_2 > c_1 > 0$, $T > 0$. Hệ (3.3) được gọi là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) nếu điều kiện sau được thỏa mãn

$$\|\varphi\|^2 \leq c_1 \Rightarrow \|x(t)\|^2 < c_2, \quad \forall t \in [0, T].$$

Định nghĩa 3.1.2. Cho $c_2 > c_1 > 0$, $T > 0$. Hệ (3.1) được gọi là ổn định hóa vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) nếu tồn tại một điều khiển phản hồi trạng thái dạng $u(t) = Kx(t)$ sao cho hệ đóng

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = [A(\xi) + B(\xi)K]x(t) + D(\xi)x(t-h(t)), \\ x(\eta) = \varphi(\eta), & \forall \eta \in [-h_2, 0], \end{cases} \quad (3.4)$$

là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) .

Định nghĩa 3.1.3. Đối với hệ (3.1) và hàm chi phí (3.2), nếu tồn tại một điều khiển phản hồi trạng thái $u^*(t)$ và một hằng số dương J^* sao cho hệ đóng (3.4) là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) và hàm chi phí thỏa mãn $J \leq J^*$, thì $u^*(t)$ được gọi là luật điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn và J^* được gọi là chi phí đảm bảo.

Để xây dựng các điều kiện LMI trong quá trình thiết kế điều khiển, chúng tôi xét các chỉ số $i, j = 1, 2, \dots, s$ với $i \neq j$ và định nghĩa ma trận

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

trong đó S là một ma trận đối xứng xác định dương chưa biết. Các biểu thức sau được sử dụng trong quá trình thiết kế điều kiện LMI

$$\begin{aligned}
W_{ii} &= A_i P + B_i Y + (A_i P + B_i Y)^\top - h_2 P + S, \\
W_{jj} &= A_i P + B_i Y + A_j P + B_j Y + (A_i P + B_i Y + A_j P + B_j Y)^\top \\
&\quad - 2h_2 P - \frac{2S}{s-1}, \\
q &= E_\alpha(h_2 T^\alpha) \sum_{j=0}^{[T/h_1]+1} (E_\alpha(h_2 T^\alpha) - 1)^j, \\
\beta &= \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}, \quad \beta_0 = \frac{\frac{2h_2 q T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 1}{\lambda_{\min}(P)}.
\end{aligned}$$

Định lý 3.1.4. Cho $c_2 > c_1 > 0$, $T > 0$. Xét hệ (3.1) với hàm chi phí (3.2). Giả sử tồn tại các ma trận P , $S \in \mathbb{S}_n^+$ và ma trận thực Y với kích thước phù hợp sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} W_{ii} & D_i P & P M & Y^\top R \\ * & -h_2 P & 0 & 0 \\ * & * & -M & 0 \\ * & * & * & -R \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i \in \overline{1, s}, \quad (3.5a)$$

$$\begin{bmatrix} W_{jj} & D_i P + D_j P & P M & Y^\top R \\ * & -2h_2 P & 0 & 0 \\ * & * & -\frac{1}{2}M & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{2}R \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i \neq j, i, j \in \overline{1, s}, \quad (3.5b)$$

$$E_\alpha(h_2 T^\alpha) \sum_{j=0}^{[T/h_1]+1} (E_\alpha(h_2 T^\alpha) - 1)^j \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \leq \frac{c_2}{c_1}, \quad (3.5c)$$

thì $u(t) = Y P^{-1} x(t)$ là luật điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn và chi phí đảm bảo được xác định bởi

$$J^* = \frac{\frac{2h_2 q T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 1}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2.$$

Xét trường hợp đặc biệt của hệ (3.1) khi các ma trận của hệ không phụ thuộc tham số bất định. Khi $s = 2$ và các ma trận của hệ thỏa mãn

$$A_i = A, \quad D_i = D, \quad B_i = B, \quad \forall i \in \{1, 2\},$$

thì hệ (3.1) trở thành hệ cấp phân số Caputo với trễ biến thiên như sau

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Dx(t - h(t)) + Bu(t), \\ x(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [-h_2, 0], \end{cases} \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.27)$$

trong đó $0 < \alpha < 1$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là tín hiệu điều khiển, và các ma trận $A, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ là ma trận cho trước.

Hàm trễ $h(t)$ là một hàm bị chặn, thỏa mãn

$$0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2, \quad \forall t \geq 0.$$

Hàm điều kiện ban đầu $\varphi(t) \in C([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$ liên tục trên đoạn $[-h_2, 0]$, với chuẩn được xác định bởi

$$\|\varphi\| = \sup_{\theta \in [-h_2, 0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Từ Định lý 3.1.4, ta suy ra hệ quả sau.

Hệ quả 3.1.5. *Cho các số dương c_1, c_2, T với $c_1 < c_2$. Xét hệ (3.27) với hàm chi phí (3.2). Giả sử tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương $P, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ và một ma trận $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ có kích thước phù hợp, sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix} W & DP & PM & Y^\top R \\ * & -h_2 P & 0 & 0 \\ * & * & -M & 0 \\ * & * & * & -R \end{bmatrix} < 0, \quad (3.28a)$$

$$\begin{bmatrix} W_1 & 2DP & 2PM & 2Y^\top R \\ * & -2h_2 P & 0 & 0 \\ * & * & -\frac{1}{2}M & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{2}R \end{bmatrix} < 0, \quad (3.28b)$$

$$E_\alpha(h_2 T^\alpha) \sum_{j=0}^{\lceil T/h_1 \rceil + 1} (E_\alpha(h_2 T^\alpha) - 1)^j \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \leq \frac{c_2}{c_1}, \quad (3.28c)$$

khi đó

$$u(t) = Y P^{-1} x(t)$$

là luật điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn và chi phí đảm bảo tương ứng được xác định bởi

$$J^* = \left(\frac{2h_2 q T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \right) \|\varphi\|^2,$$

trong đó

$$\begin{aligned}
W &= [AP + BY] + [AP + BY]^\top - h_2 P + S, \\
W_1 &= 2[AP + BY] + 2[AP + BY]^\top - 2h_2 P - 2S, \\
q &= E_\alpha(h_2 T^\alpha) \sum_{j=0}^{\lceil T/h_1 \rceil + 1} (E_\alpha(h_2 T^\alpha) - 1)^j, \\
\beta &= \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}, \quad \beta_0 = \frac{\left(\frac{2h_2 q T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 1\right)}{\lambda_{\min}(P)}.
\end{aligned}$$

3.2 Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho hệ phi tuyến cấp phân số với nhân suy giảm có trễ

Xét lớp hệ phi tuyến cấp phân số Caputo với nhân suy giảm không chắc chắn, với trễ hằng số sau

$$\begin{cases} {}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda} x(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (D + \Delta D(t))x(t - \tau) \\ \quad + f(t, x(t)) + g(t, x(t - \tau)) + (B + \Delta B(t))u(t), \quad t \geq 0, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (3.30)$$

trong đó $\lambda \geq 0$, $\alpha \in (0, 1]$ là cấp của hệ, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển, $\varphi(\cdot) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu với chuẩn

$$\|\varphi\| = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|,$$

các ma trận thực cho trước A , B , D có kích thước phù hợp, các ma trận phụ thuộc tham số $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ và $\Delta D(t)$ thỏa mãn Giả thiết 3.2.1, còn f và g là các hàm kích hoạt phi tuyến thỏa mãn Giả thiết 3.2.2.

Trong mục này, chúng tôi sử dụng các giả thiết sau.

Giả thiết 3.2.1. Các ma trận $\Delta A(t)$, $\Delta D(t)$ và $\Delta B(t)$ có dạng

$$\Delta A(t) = E_a F_1(t) H_a, \quad \Delta D(t) = E_d F_2(t) H_d, \quad \Delta B(t) = E_b F_3(t) H_b,$$

trong đó E_a , E_d , E_b , H_a , H_d , H_b là các ma trận thực đã biết có kích thước phù hợp và $F_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, là các ma trận biến thiên theo thời gian thỏa mãn

$$F_i^\top(t) F_i(t) \leq I, \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Giả thiết 3.2.2. Các hàm $f, g : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} f^\top(t, x)f(t, x) &\leq x^\top Qx, \\ g^\top(t, x)g(t, x) &\leq x^\top Gx, \end{aligned} \quad (3.31)$$

với mọi $(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, trong đó Q và G là các ma trận đối xứng xác định dương.

Khi không có điều khiển $u(t)$, hệ (3.30) trở thành

$$\begin{cases} {}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda}x(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (D + \Delta D(t))x(t - \tau) \\ \quad + f(t, x(t)) + g(t, x(t - \tau)), \quad t \geq 0, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (3.32)$$

Định nghĩa 3.2.3. Cho các số dương c_1, c_2, T với $c_1 < c_2$. Hệ (3.32) được gọi là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) nếu điều kiện sau được thỏa mãn

$$\|\varphi\|^2 \leq c_1 \Rightarrow \|x(t)\|^2 < c_2, \quad \forall t \in [0, T].$$

Định nghĩa 3.2.4. Cho các số dương c_1, c_2, T thỏa mãn $c_2 > c_1$. Hệ (3.30) được gọi là ổn định hoá vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) nếu tồn tại một điều khiển phản hồi trạng thái $u(t) = Kx(t)$ sao cho hệ đóng

$$\begin{cases} {}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda}x(t) = (A + \Delta A(t) + BK + \Delta B(t))x(t) \\ \quad + (D + \Delta D(t))x(t - \tau) + f(t, x(t)) + g(t, x(t - \tau)), \quad t \geq 0, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (3.33)$$

là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) .

Với số dương $T > 0$, hàm chi phí liên quan đến hệ (3.30) được xác định bởi

$$J(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} [x^\top(s)Mx(s) + u^\top(s)Ru(s)] ds, \quad (3.34)$$

với mọi $t \in [0, T]$ và M, R là các ma trận đối xứng xác định dương cho trước.

Định nghĩa 3.2.5. Đối với hệ (3.30) và hàm chi phí (3.34), nếu tồn tại luật điều khiển phản hồi trạng thái $u^*(t)$ và một hằng số dương J^* sao cho hệ đóng (3.33) là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) và hàm chi phí thỏa mãn $J \leq J^*$, thì $u^*(t)$ được gọi là luật điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn và J^* được gọi là chi phí đảm bảo.

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho hệ (3.30) thông qua luật điều khiển phản hồi trạng thái $u(t) = Kx(t)$. Kết quả chính được trình bày trong Định lý sau.

Định lý 3.2.6. *Cho các số dương c_1, c_2, T với $c_1 < c_2$. Giả sử tồn tại các số dương $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, ma trận đối xứng xác định dương $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, và ma trận $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & DP & I & I & PQ & PM & Y^\top R & PH_a^\top & Y^\top H_b^\top & 0 & 0 \\ * & -\tau P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & PH_d^\top & PG \\ * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon_2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon_3 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -G \end{bmatrix} < 0, \quad (3.35a)$$

$$E_\alpha(\tau T^\alpha) \sum_{j=0}^{[T/\tau]+1} e^{\lambda \tau j} (E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1)^j \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \leq \frac{c_2}{c_1}, \quad (3.35b)$$

Khi đó, $u(t) = YP^{-1}x(t)$ là luật điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho hệ (3.30) và giá trị chi phí đảm bảo tương ứng được xác định bởi

$$J^* = \|\varphi\|^2 \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} + \frac{2\gamma\tau}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 \cdot \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

trong đó

$$\Theta_{11} = AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \epsilon_1 E_a E_a^\top + \epsilon_3 E_d E_d^\top + \epsilon_2 E_b E_b^\top - \tau P.$$

3.3 Kết luận chương 3

Trong chương này, luận án đã nghiên cứu bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho hai lớp hệ cấp phân số. Đầu tiên, chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ tổ hợp lõi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên. Tiếp theo, nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phi tuyến không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có trễ hằng số.

- Đối với lớp hệ tổ hợp lồi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên, luận án đã thiết lập các điều kiện đủ cho sự đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính, trên cơ sở sử dụng hàm Lyapunov.
- Đối với lớp hệ phi tuyến không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có trễ hằng số, luận án đưa ra bổ đề mới đối với đạo hàm Caputo với nhân suy giảm, từ đó, thiết lập điều kiện đủ nhằm đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính, trên cơ sở sử dụng hàm Lyapunov.
- Các ví dụ số và mô phỏng được xây dựng nhằm minh họa tính khả thi của các điều kiện đủ đã thiết lập. Kết quả mô phỏng cho thấy các đánh giá lý thuyết thu được là phù hợp và có thể kiểm chứng được bằng tính toán số.

KẾT LUẬN

Luận án nghiên cứu tính ổn định trong thời gian hữu hạn của một số lớp hệ phương trình vi phân cấp phân số và một số bài toán liên quan.

Các kết quả chính của luận án

- Đưa ra một số điều kiện đủ cho bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn đối với lớp hệ nơ-ron phi tuyến không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có nhiều và trễ hằng số (Định lý 2.1.5), cũng như bài toán tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron phi tuyến không chắc chắn cấp phân số Caputo có nhiều (Định lý 2.2.6).
- Đưa ra một số điều kiện đủ cho bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn đối với lớp hệ tổ hợp lỗi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên (Định lý 3.1.4), cũng như lớp hệ phi tuyến không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có trễ hằng số (Định lý 3.2.6).

Một khó khăn trong quá trình nghiên cứu xuất phát từ tính phi địa phương của đạo hàm cấp phân số, ảnh hưởng của trễ và sự xuất hiện của nhân suy giảm. Để xử lý các khó khăn này, luận án đã thiết lập và sử dụng các bổ đề bổ trợ thích hợp, kết hợp với phương pháp hàm Lyapunov, các công cụ của giải tích cấp phân số và kỹ thuật bất đẳng thức ma trận tuyến tính để xây dựng các điều kiện đủ cho các bài toán được xét.

Hướng nghiên cứu tiếp theo

Từ các kết quả nghiên cứu của luận án, có thể tiếp tục phát triển các hướng nghiên cứu về ổn định trong thời gian hữu hạn, tiêu hao, thụ động, điều khiển đảm bảo chi phí và điều khiển H_∞ cho một số lớp hệ động lực cấp phân số khác, chẳng hạn như hệ hai pha, hệ quy mô lớn và hệ chuyển mạch. Các bài toán này có thể được tiếp cận theo phương pháp hàm Lyapunov kết hợp với các công cụ giải tích cấp phân số và bất đẳng thức ma trận.

Danh mục các công trình của tác giả đã công bố liên quan đến đề tài luận án

- [CT1] T.N. Tuan, N.T. Thanh, M.V. Thuan (2023), “New results on robust finite-time extended dissipativity for uncertain fractional-order neural networks”, *Neural Processing Letters*, **55**, pp 9635–9650 (Q3/WoS, Q2/Scimago).
- [CT2] N.T. Thanh, M.V. Thuan, T.N. Tuan (2023), “New results on finite-time guaranteed cost control of uncertain polytopic fractional-order systems with time-varying delays”, *Optimal Control Applications and Methods*, **44**(5) pp 2504–2516 (Q2/WoS, Q2/Scimago).
- [CT3] T.N. Tuan, M.V. Thuan, N.T. Thanh (2025), “Finite-time guaranteed cost control for tempered nonlinear fractional-order systems with delays: A novel stability approach”, *Computational and Applied Mathematics*, **44**, Article 335(Q1/WoS, Q2/Scimago).
- [CT4] T.N. Tuan, N.T. Thanh, M.V. Thuan, N.T.T. Huyen (2026), “Finite-time dissipativity analysis of uncertain tempered fractional-order neural networks with delays via LMI approach”, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **72**, Article 59 (Q1/WoS, Q2/Scimago).