

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN NGỌC TUẤN

TÍNH ỔN ĐỊNH TRONG THỜI GIAN HỮU
HẠN CỦA MỘT SỐ LỚP HỆ PHƯƠNG
TRÌNH VI PHÂN CẤP PHÂN SỐ VÀ MỘT SỐ
BÀI TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ NGÀNH TOÁN ỨNG DỤNG

THÁI NGUYÊN - NĂM 2026

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN NGỌC TUẤN

TÍNH ỔN ĐỊNH TRONG THỜI GIAN HỮU
HẠN CỦA MỘT SỐ LỚP HỆ PHƯƠNG
TRÌNH VI PHÂN CẤP PHÂN SỐ VÀ MỘT SỐ
BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 9460112

LUẬN ÁN TIẾN SĨ

TẬP THỂ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

- PGS.TS. Mai Viết Thuận
- PGS.TS. Nguyễn Trường Thanh

THÁI NGUYÊN - NĂM 2026

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Mai Viết Thuận và PGS.TS. Nguyễn Trường Thanh. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả trong luận án là những kết quả mới và chưa từng được tác giả nào khác công bố.

Tác giả luận án

Trần Ngọc Tuấn

Lời cảm ơn

Luận án này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình cùng sự giúp đỡ quý báu của các thầy cô, đồng nghiệp, cơ quan công tác và gia đình. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới tất cả những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Trước hết, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS. Mai Viết Thuận, người thầy đã trực tiếp hướng dẫn, định hướng nghiên cứu và tận tình chỉ bảo tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận án. Những góp ý chuyên môn sâu sắc, phong cách làm việc nghiêm túc cùng tinh thần trách nhiệm và niềm đam mê khoa học của thầy không chỉ giúp tôi hoàn thành luận án mà còn là nguồn động lực và tấm gương quý báu để tôi học tập và noi theo.

Tôi xin chân thành cảm ơn PGS.TS. Nguyễn Trường Thanh, người đã tận tình chỉ bảo tôi ngay từ những ngày đầu tiếp cận lĩnh vực giải tích cấp phân số. Thầy không chỉ truyền đạt những kiến thức chuyên môn sâu sắc mà còn luôn tạo điều kiện thuận lợi về môi trường làm việc, phương tiện nghiên cứu và định hướng khoa học, giúp tôi từng bước hình thành và phát triển các kết quả nghiên cứu của luận án.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán–Tin và lãnh đạo Viện Khoa học và Công nghệ, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Công nghệ Kỹ thuật Hưng Yên – nơi tôi đang công tác – đã tạo điều kiện thuận lợi về thời gian, cơ sở vật chất và tinh thần để tôi tập trung thực

hiện luận án. Đồng thời, tôi xin gửi lời cảm ơn tới các thành viên nhóm Seminar Tối ưu và Điều khiển do GS.TSKH. Vũ Ngọc Phát chủ trì tại Viện Toán học Việt Nam, những người đã nhiệt tình trao đổi học thuật, góp ý và chia sẻ nhiều kiến thức quý báu liên quan đến hướng nghiên cứu của tôi.

Tôi cũng xin bày tỏ và biết ơn những ý kiến đóng góp, sự động viên từ các đồng nghiệp, bạn bè, những người đã chia sẻ tài liệu, kinh nghiệm và giúp tôi giữ được động lực trong suốt quá trình thực hiện công trình.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời biết ơn sâu đậm tới gia đình – bố mẹ, anh chị em, vợ và hai con trai tôi – những người luôn là chỗ dựa vững chắc, yêu thương, sẻ chia và động viên tôi vượt qua mọi khó khăn. Chính tình cảm và niềm tin của gia đình là động lực to lớn để tôi kiên theo đuổi con đường nghiên cứu và hoàn thành luận án này.

Nghiên cứu sinh

Trần Ngọc Tuấn

Mục lục

Lời cam đoan	i
Lời cảm ơn	ii
Mục lục	iv
Danh mục ký hiệu và chữ viết tắt	vi
Danh mục các hình vẽ	vii
Mở đầu	1
Chương 1. Cơ sở toán học	13
1.1 Một số kiến thức cơ bản về giải tích cấp phân số	13
1.1.1 Tích phân và đạo hàm cấp phân số Riemann–Liouville	15
1.1.2 Đạo hàm cấp phân số Caputo	17
1.1.3 Tích phân và đạo hàm cấp phân số với nhân suy giảm	18
1.1.4 Biến đổi Laplace của đạo hàm và tích phân cấp phân số	19
1.2 Bài toán tồn tại và duy nhất nghiệm cho hệ phương trình vi phân cấp phân số	20
1.2.1 Hệ phương trình vi phân cấp phân số không có trễ	20
1.2.2 Hệ phương trình vi phân cấp phân số có trễ	22
1.3 Ổn định trong thời gian hữu hạn và ổn định hoá trong thời gian hữu hạn	23
1.3.1 Bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn	23
1.3.2 Bài toán ổn định hóa trong thời gian hữu hạn	24

1.4	Bài toán tiêu hao cho hệ động lực	25
1.5	Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí	27
1.6	Một số bổ đề bổ trợ	29
 Chương 2. Bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn cho một		
	số lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số	33
2.1	Bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có nhiều và trễ hằng số	33
2.2	Bài toán tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo có nhiều	50
2.3	Kết luận chương 2	64
 Chương 3. Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian		
	hữu hạn cho một số lớp hệ phương trình vi phân cấp	
	phân số	65
3.1	Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ tổ hợp lồi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên	65
3.2	Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho hệ phi tuyến cấp phân số với nhân suy giảm có trễ	82
3.3	Kết luận chương 3	97
 Danh mục các công trình của tác giả đã công bố liên quan đến . 100		
đề tài luận án		
Tài liệu tham khảo 100		

Danh mục ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$	tập hợp các số tự nhiên, tập các số tự nhiên khác 0, tương ứng
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$	tập hợp các số thực, tập các số thực không âm, tương ứng
$\mathbb{R}^n$	không gian véc tơ Euclide thực n chiều
$\mathbb{R}^{m \times n}$	không gian các ma trận cỡ $m \times n$
$A^\top$	ma trận chuyển vị của ma trận A
I	ma trận đơn vị
$\mathbb{S}_n^+$	tập các ma trận đối xứng xác định dương trong $\mathbb{R}^{n \times n}$
$\lambda_{\max}(A)$	giá trị riêng lớn nhất của ma trận đối xứng A
$\lambda_{\min}(A)$	giá trị riêng nhỏ nhất của ma trận đối xứng A
$A \geq 0$	ma trận A là nửa xác định dương
$A > 0$	ma trận A là xác định dương
$*$	các phần tử nằm dưới đường chéo chính của ma trận đối xứng
$A > B$	nghĩa là $A - B > 0$
$R^{\frac{1}{2}}$	căn bậc hai của ma trận R đối xứng, xác định dương
$\ x\ $	chuẩn Euclide của véc tơ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$
$C([a, b])$	không gian các hàm liên tục trên $[a, b]$
$C([a, b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm liên tục trên $[a, b]$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
$AC^n([a, b])$	không gian các hàm liên tục tuyệt đối cấp n trên $[a, b]$
$AC^n([a, b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm liên tục tuyệt đối cấp n từ $[a, b]$ vào $\mathbb{R}^n$
$L_p([a, b])$	không gian các hàm khả tích bậc p trên $[a, b]$

Danh mục các hình vẽ

2.1	Quỹ đạo của $\ x(t)\ ^2$ trong Ví dụ 2.1.9.	49
2.2	Quỹ đạo của hàm hiệu suất $TP(t)$ trong Ví dụ 2.1.9.	49
2.3	Quỹ đạo của $x^\top(t)Rx(t)$ trong Ví dụ 2.2.11	62
2.4	Quỹ đạo của hàm $TP(t)$ trong Ví dụ 2.2.11	63
3.1	Quỹ đạo của $\ x(t)\ ^2$ trong Ví dụ 3.1.7	79
3.2	Quỹ đạo của $\ x(t)\ ^2$ của hệ mở trong Ví dụ 3.1.8	81
3.3	Quỹ đạo của $\ x(t)\ ^2$ của hệ đóng trong Ví dụ 3.1.8	81
3.4	Quỹ đạo của $\ x(t)\ ^2$ khi không có điều khiển trong Ví dụ 3.2.8. .	92
3.5	Quỹ đạo của $\ x(t)\ ^2$ khi có điều khiển $u(t)$ trong Ví dụ 3.2.8. .	93
3.6	Quỹ đạo của $J(t)$ với $J^* = 0.2058$ trong Ví dụ 3.2.8.	93
3.7	Quỹ đạo của $\ x(t)\ ^2$ khi không có điều khiển trong Ví dụ 3.2.9. .	96
3.8	Quỹ đạo của $\ x(t)\ ^2$ khi có điều khiển $u(t)$ trong Ví dụ 3.2.9. .	96
3.9	Quỹ đạo của hàm chi phí $J(t)$ với $J^* = 2.1713$ trong Ví dụ 3.2.9.	96

Mở đầu

1. Tổng quan về hướng nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Giải tích cấp phân số là một nhánh của toán học nghiên cứu đạo hàm và tích phân có bậc không nguyên. Khái niệm đạo hàm bậc không nguyên xuất hiện từ cuối thế kỷ XVII, khi G. de l'Hôpital nêu ra một vấn đề liên quan đến ký hiệu $\frac{d^n y}{dx^n}$ với trường hợp $n = \frac{1}{2}$ trong thư gửi G.W. Leibniz vào năm 1695. Từ đó, nhiều nhà toán học như L. Euler, J.L. Lagrange, J. Liouville, B. Riemann và J. Hadamard đã góp phần xây dựng các định nghĩa và tính chất cơ bản của giải tích cấp phân số. Các kết quả nền tảng này có thể được tìm thấy trong tài liệu [50].

Có nhiều định nghĩa khác nhau của đạo hàm cấp phân số, trong đó phổ biến nhất là đạo hàm cấp phân số Riemann–Liouville và đạo hàm cấp phân số Caputo. Các định nghĩa này đều trùng với đạo hàm cấp số nguyên khi cấp α là số nguyên, đồng thời cho phép mở rộng khái niệm đạo hàm sang trường hợp cấp không nguyên một cách tự nhiên và chặt chẽ. Trong đó, đạo hàm Caputo được sử dụng rộng rãi hơn trong mô hình hóa và lý thuyết điều khiển, do cho phép thiết lập các điều kiện ban đầu dưới dạng tương tự như đối với phương trình vi phân cấp số nguyên. Điều này tạo thuận lợi cho việc diễn giải ý nghĩa vật lý của bài toán cũng như trong quá trình phân tích và mô phỏng hệ thống.

Chỉ trong vài thập kỷ gần đây, cùng với sự phát triển của khoa học và kỹ thuật hiện đại, các toán tử đạo hàm và tích phân cấp phân số đã được chứng minh là đặc biệt hiệu quả trong việc mô tả hành vi của nhiều loại vật liệu và quá trình thực tế, chẳng hạn như polyme và các môi trường có cấu trúc phức tạp. Nhiều kết quả thực nghiệm và lý thuyết cho thấy rằng các mô hình cấp

phân số phản ánh động lực của hệ chính xác hơn so với các mô hình cấp số nguyên cổ điển. Cơ sở vật lý của việc sử dụng các mô hình dựa trên đạo hàm cấp phân số đã được trình bày và phân tích chi tiết trong tài liệu [7].

Mặc dù đạo hàm cấp phân số Caputo mô tả hiệu quả tính phụ thuộc vào lịch sử trạng thái của hệ, đạo hàm này chưa phản ánh đầy đủ các hiện tượng suy giảm nhanh thường xuất hiện trong nhiều mô hình vật lý và kỹ thuật hiện đại. Để khắc phục hạn chế đó, đạo hàm cấp phân số Caputo với nhân suy giảm (tempered Caputo fractional-order derivative) được xây dựng bằng cách đưa thêm nhân suy giảm mũ vào hạt nhân của đạo hàm Caputo. Khái niệm này được khởi xướng từ công trình của R.G. Buschman [6]. Nhờ đó, toán tử này vừa bảo toàn đặc tính phụ thuộc vào lịch sử trạng thái của đạo hàm Caputo, vừa cho phép mô tả hiệu quả các quá trình suy giảm nhanh, phù hợp với nhiều hiện tượng thực tế trong vật lý, kỹ thuật và sinh học [35, 36, 47, 48, 57, 58].

Tuy nhiên, việc nghiên cứu các tính chất ổn định và hiệu suất của các hệ sử dụng đạo hàm Caputo với nhân suy giảm vẫn gặp nhiều khó khăn đáng kể. Đặc biệt, sự xuất hiện của nhân suy giảm mũ trong hạt nhân của toán tử đạo hàm làm cho việc xây dựng các hàm Lyapunov thích hợp cũng như việc thiết lập các bất đẳng thức ma trận tuyến tính (linear matrix inequality-LMI) trở nên phức tạp hơn so với trường hợp Caputo cổ điển.

Trong vài thập niên gần đây, bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn (finite-time stability) đã thu hút sự quan tâm rộng rãi trong nghiên cứu các hệ động lực nhờ ý nghĩa thực tiễn và nhiều ưu điểm nổi bật. Khái niệm ổn định trong thời gian hữu hạn được G. Kamenkov [32] đề xuất lần đầu tiên vào năm 1953 trong một công trình công bố bằng tiếng Nga. Sau đó, các nghiên cứu của P. Dorato [16] đã góp phần thúc đẩy sự phát triển của hướng nghiên cứu này trong cộng đồng khoa học quốc tế. Cụ thể, hệ được gọi là ổn định trong thời gian hữu hạn nếu với mọi $t \in [0, T]$, từ mọi trạng thái ban đầu bị chặn bởi một hằng số c_1 , quỹ đạo nghiệm của hệ luôn được chặn bởi một hằng số c_2 , trong đó $c_1 < c_2$ và $T > 0$ là các hằng số cho trước. Khác với ổn định tiệm cận theo

nghĩa Lyapunov, vốn chỉ đảm bảo trạng thái của hệ hội tụ về điểm cân bằng khi $t \rightarrow +\infty$, ổn định trong thời gian hữu hạn yêu cầu trạng thái của hệ duy trì trong một miền bị chặn xác định trước trên một khoảng thời gian hữu hạn [1].

Đối với các lớp hệ cấp số nguyên, bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn đã được nghiên cứu sâu rộng thông qua nhiều phương pháp khác nhau, đặc biệt là phương pháp hàm Lyapunov và kỹ thuật bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMI). Nhiều kết quả quan trọng theo hướng này đã được công bố trong các công trình của M. Shen và các cộng sự [61], M. Bahreini, J. Zarei [?], Y. Liu và các cộng sự [45].

Đối với các lớp hệ cấp phân số, năm 2006, bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn lần đầu tiên được đưa ra bởi M.P. Lazarević [37] khi nghiên cứu tính ổn định trong thời gian hữu hạn của hệ thống robot có trễ hằng số. Năm 2015, Y. Yang và G. Chen [77] đã đề xuất các điều kiện đủ đảm bảo ổn định trong thời gian hữu hạn cho các lớp hệ chuyển mạch. Năm 2016, bài toán bị chặn trong thời gian hữu hạn đối với lớp hệ tuyến tính đã được Y.J. Ma và các cộng sự nghiên cứu trong [46]. Cũng trong năm này, J. Zhang và các cộng sự [86] đã phân tích tính ổn định và tính bị chặn trong thời gian hữu hạn của các lớp hệ chuyển mạch dương. Năm 2018, N.T. Thanh và V.N. Phát [63] đã nghiên cứu tính ổn định trong thời gian hữu hạn của các lớp hệ phi tuyến có trễ biến thiên. Năm 2019, T. Feng cùng các cộng sự [20] đã nghiên cứu bài toán ổn định và ổn định hóa trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ chuyển mạch suy biến.

Bên cạnh đó, mạng nơ-ron được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như nhận dạng mẫu, xử lý ảnh, trí tuệ nhân tạo và tự động hóa công nghiệp. Nhằm mô tả hiệu quả hơn các cơ chế động học có tính nhớ và hiệu ứng di truyền của hệ, A. Boroomand và M.B. Menhaj [4] đã đề xuất mô hình mạng nơ-ron cấp phân số thay cho mô hình mạng nơ-ron cấp nguyên. Kể từ đó, mạng nơ-ron cấp phân số đã thu hút sự quan tâm đáng kể và nhiều kết quả quan trọng đã được công bố [10,66,67,75,81,84,85,87]. Đối với mô hình mạng nơ-ron cấp phân số Caputo với nhân suy giảm, C.Y. Gu và các cộng sự đã tiến hành nghiên cứu trong [25].

Tuy nhiên, trong thực tiễn mô hình hóa, các hệ thống thường chịu ảnh hưởng của các tham số không chắc chắn phát sinh từ sai số đo lường và nhiễu. Nhiều nghiên cứu cho thấy các tham số này có thể làm suy giảm tính ổn định của hệ nơ-ron trong thực tế. Vì vậy, việc nghiên cứu các tính chất ổn định và hiệu suất của mạng nơ-ron cấp phân số có tham số không chắc chắn đã nhận được nhiều sự quan tâm, với các kết quả liên quan đến ổn định vững, đồng bộ hóa, tính thụ động và ổn định hóa trong thời gian hữu hạn [13, 14, 41, 51, 62, 73].

Bên cạnh bài toán ổn định, việc đánh giá hiệu suất của hệ động lực cũng là một hướng nghiên cứu quan trọng trong lý thuyết điều khiển. Hiệu suất của hệ động lực thường được đánh giá thông qua mối quan hệ giữa tín hiệu đầu vào và tín hiệu đầu ra, từ đó phản ánh khả năng đáp ứng các yêu cầu vận hành của hệ thống. Trên cơ sở đó, nhiều bài toán quan trọng trong lý thuyết điều khiển đã được đề xuất và nghiên cứu đối với các lớp hệ phương trình vi phân cấp phân số, tiêu biểu như bài toán tiêu hao (dissipativity analysis) và bài toán điều khiển đảm bảo chi phí (guaranteed cost control – GCC).

Khái niệm hệ tiêu hao được khởi xướng bởi J.C. Willems [71] vào năm 1972 và từ đó đã trở thành một công cụ nền tảng trong phân tích và thiết kế các lớp hệ động lực. Lý thuyết này có thể được xem như một sự tổng quát hóa của các khái niệm quen thuộc trong lý thuyết điều khiển, chẳng hạn như tính thụ động và lý thuyết H_∞ . Nhờ tính ứng dụng rộng rãi trong kỹ thuật, vật lý và lý thuyết điều khiển, lý thuyết tiêu hao đã thu hút được sự quan tâm đặc biệt từ cộng đồng nghiên cứu. Trong công trình nền tảng của mình, J.C. Willems đã chỉ ra mối liên hệ chặt chẽ giữa lý thuyết tiêu hao và lý thuyết ổn định Lyapunov, trong đó hàm lưu trữ đóng vai trò tương tự như hàm Lyapunov trong việc nghiên cứu tính ổn định của hệ thống.

Từ đó, lý thuyết tiêu hao giữ vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu tính ổn định và hiệu suất của các hệ điều khiển. Trong nhiều bài toán điều khiển, việc khảo sát tính ổn định thường chỉ phản ánh đặc tính tiệm cận của hệ, trong khi tính tiêu hao cho phép mô tả sâu hơn khả năng lưu trữ, truyền tải và tiêu

hao năng lượng của hệ dưới tác động của tín hiệu điều khiển và nhiễu ngoài. Vì vậy, đối với nhiều lớp hệ động lực, đặc biệt là các hệ có điều khiển và có nhiễu, bài toán tiêu hao thường được nghiên cứu trên cơ sở các kết quả ổn định đã được thiết lập trước đó.

Gần đây, phương pháp ổn định trong thời gian hữu hạn đã được mở rộng và áp dụng trong lý thuyết tiêu hao đối với nhiều lớp hệ động lực khác nhau. Dựa trên phương pháp Lyapunov kết hợp với công cụ bất đẳng thức ma trận tuyến tính, nhiều kết quả về bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn cho các lớp hệ cấp số nguyên đã được công bố trong những năm gần đây [15, 22, 23, 26, 27, 33, 42, 68, 74, 82]. Đối với các hệ phương trình vi phân cấp phân số Caputo, năm 2021, D.T. Hong cùng các cộng sự [30] đã nghiên cứu tính tiêu hao của các hệ nơ-ron tính cấp phân số, đồng thời khảo sát tính tiêu hao trong thời gian hữu hạn đối với các hệ cấp phân số phi tuyến không chắc chắn [29]. Tiếp đó, vào năm 2023, N.T. Phuong cùng các cộng sự [53] đã nghiên cứu tính tiêu hao đối với các hệ nơ-ron cấp phân số Caputo có trễ biến thiên không khả vi.

Năm 2013, B. Zhang cùng các cộng sự [83] đã đưa ra khái niệm tiêu hao mở rộng, đây là một khái niệm tổng quát bao hàm nhiều chỉ số hiệu suất như H_∞ , $L_2 - L_\infty$, tính thụ động, ... thông qua việc lựa chọn các ma trận trọng số thích hợp. Sau đó, các kết quả về tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn đã được nghiên cứu đối với nhiều lớp hệ cấp số nguyên trong các công trình [15, 22, 23, 26, 27, 42, 68, 74, 82].

Từ các phân tích trên có thể thấy rằng, các nghiên cứu hiện có về tiêu hao và tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn vẫn chủ yếu tập trung vào các lớp hệ cấp số nguyên, trong khi đối với các lớp hệ cấp phân số, đặc biệt là các hệ nơ-ron cấp phân số Caputo và Caputo với nhân suy giảm, các kết quả tương ứng còn khá hạn chế.

Bên cạnh đó, phương pháp hàm Lyapunov và phương pháp hàm Lyapunov–Krasovskii là những công cụ phân tích hiệu quả và được sử dụng rộng rãi trong nghiên cứu tính ổn định đối với các lớp hệ động lực và hệ động lực có trễ. Tuy

nhien, khi áp dụng cho các lớp hệ không chắc chắn cấp phân số có nhiều, các phương pháp này gặp phải nhiều khó khăn đáng kể. Cụ thể, việc xây dựng một hàm Lyapunov thích hợp và tính đạo hàm cấp phân số của nó trở nên phức tạp do đạo hàm cấp phân số của dạng hàm toàn phương không tuân theo quy tắc Leibniz như trong trường hợp cấp số nguyên. Điều này gây khó khăn trong việc thiết lập các điều kiện đại số dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính cho các lớp hệ không chắc chắn cấp phân số trong khoảng thời gian hữu hạn. Do đó, số lượng các công trình nghiên cứu về tiêu hao trong thời gian hữu hạn đối với các lớp hệ không chắc chắn cấp phân số hiện nay vẫn còn tương đối hạn chế.

Trên cơ sở đó, luận án đề xuất nghiên cứu bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn đối với hệ nơ-ron cấp phân số Caputo với nhân suy giảm không chắc chắn, có nhiễu và có trễ hằng số, đồng thời nghiên cứu bài toán tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn đối với hệ nơ-ron cấp phân số Caputo có nhiễu. Các kết quả đạt được góp phần bổ sung và hoàn thiện cơ sở lý thuyết cho các lớp hệ không chắc chắn cấp phân số, đồng thời mở rộng khả năng ứng dụng của các mô hình này trong các bài toán điều khiển.

Bên cạnh bài toán tiêu hao, bài toán điều khiển đảm bảo chi phí cũng nhận được nhiều sự quan tâm trong nghiên cứu các hệ động lực cấp phân số. Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí được S.S.L. Chang và T.K.C. Peng [8] đề xuất lần đầu vào năm 1972. Trong nhiều bài toán điều khiển, bên cạnh việc đảm bảo tính ổn định của hệ thống, việc thiết kế các luật điều khiển có khả năng duy trì một mức hiệu suất xác định thông qua hàm chi phí cũng là một yêu cầu quan trọng. Do đó, sự kết hợp giữa điều khiển đảm bảo chi phí và ổn định trong thời gian hữu hạn có ý nghĩa thực tiễn cao trong thiết kế điều khiển đối với các hệ động lực chịu tác động của nhiễu và bất định tham số.

Đối với các lớp hệ cấp số nguyên, nhiều nghiên cứu đã tập trung vào bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn dưới các mô hình và điều kiện khác nhau. Cụ thể, năm 2015, Z. Yan và các cộng sự [76] đã nghiên cứu các lớp hệ ngẫu nhiên Itô tuyến tính với nhiễu bị chặn; cùng năm đó, P. Niamsup

và các cộng sự [49] xem xét các lớp hệ nơ-ron có trễ hằng số. Năm 2018, Y. Qi và các cộng sự [55] đã nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn cho các lớp hệ tuyến tính chuyển mạch với nhiễu biến thiên dựa trên cơ chế kích hoạt sự kiện. Năm 2019, B. Li và các cộng sự [39] đã nghiên cứu các lớp hệ suy biến tuyến tính liên tục; trong khi đó, G. Zong và H. Ren [89] tập trung vào các lớp hệ Markov với nhiễu bị chặn.

Đối với các lớp hệ cấp phân số, số lượng công trình nghiên cứu về bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn hiện vẫn còn khá hạn chế. Năm 2019, L. Liu và các cộng sự [43] đã nghiên cứu bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho các lớp hệ chuyển mạch dương phi tuyến có nhiễu. Năm 2020, M.V. Thuan và các cộng sự [67] đã xem xét bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho các lớp hệ nơ-ron cấp phân số Caputo. Năm 2021, Y. Shang và các cộng sự [60] đã nghiên cứu bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho các lớp hệ chuyển mạch với nhiễu bị chặn. Cũng trong năm 2021, L. Liu và các cộng sự [44] đã nghiên cứu các lớp hệ chuyển mạch dương cấp phân số với cơ chế chuyển mạch không đồng bộ và có xung. Gần đây, năm 2024, H. Gassara và các cộng sự [24] đã nghiên cứu bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn và thiết kế điều khiển phản hồi cho một lớp hệ phi tuyến cấp phân số Caputo có trễ biến thiên.

Từ các nghiên cứu nêu trên có thể thấy rằng, các kết quả hiện có về điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn đối với các lớp hệ cấp phân số vẫn còn tương đối hạn chế, đặc biệt trong trường hợp hệ có bất định tham số và chứa thành phần trễ hoặc trễ biến thiên. Việc phân tích và thiết kế điều khiển cho các lớp hệ này thường đòi hỏi xây dựng các hàm Lyapunov hoặc Lyapunov–Krasovskii thích hợp kết hợp với kỹ thuật bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Tuy nhiên, đối với các hệ không chắc chắn cấp phân số có trễ, việc xây dựng các hàm Lyapunov loại này cũng như việc xử lý đạo hàm cấp phân số của các dạng toàn phương trở nên phức tạp hơn đáng kể.

Theo hiểu biết của chúng tôi, bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời

gian hữu hạn vẫn chưa được nghiên cứu đối với các lớp hệ tổ hợp lỗi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên. Bên cạnh đó, bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho các lớp hệ không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm, đặc biệt trong trường hợp có trễ, vẫn chưa được nghiên cứu một cách đầy đủ.

Xuất phát từ các phân tích nêu trên, chúng tôi lựa chọn đề tài “Tính ổn định trong thời gian hữu hạn của một số lớp hệ phương trình vi phân cấp phân số và một số bài toán liên quan” làm hướng nghiên cứu của đề tài luận án.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Luận án hướng tới việc phát triển các phương pháp phân tích và thiết kế điều khiển cho các lớp hệ động lực không chắc chắn cấp phân số có trễ và nhiễu, trong đó trọng tâm là các bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn, tiêu hao và điều khiển đảm bảo chi phí. Cụ thể, các mục tiêu chính của luận án bao gồm

- Nghiên cứu bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn đối với lớp hệ phương trình vi phân không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có nhiễu và trễ hằng số; đồng thời khảo sát bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn và bài toán tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo có nhiễu.
- Nghiên cứu bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn và thiết kế luật điều khiển phản hồi trạng thái cho các lớp hệ phương trình vi phân không chắc chắn cấp phân số, bao gồm lớp hệ Caputo dạng tổ hợp lỗi có trễ biến thiên và lớp hệ không chắc chắn Caputo với nhân suy giảm có nhiễu và trễ hằng số.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là các lớp hệ phương trình vi phân cấp phân số, bao gồm các hệ sử dụng đạo hàm Caputo và đạo hàm Caputo với nhân

suy giảm. Luận án tập trung nghiên cứu kết hợp các bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn, tiêu hao trong thời gian hữu hạn và điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn đối với các lớp hệ động lực nói trên.

Phạm vi nghiên cứu của luận án chủ yếu xét các lớp hệ không chắc chắn cấp phân số có nhiễu và có trễ, đặc biệt là các hệ chứa tham số bất định, trễ hằng số và trễ biến thiên.

4. Phương pháp nghiên cứu

Để đạt được mục tiêu nghiên cứu của luận án, chúng tôi sử dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp hàm Lyapunov và Lyapunov–Krasovskii được sử dụng để nghiên cứu tính ổn định trong thời gian hữu hạn, tính tiêu hao và bài toán điều khiển đối với các lớp hệ cấp phân số có trễ.
- Kỹ thuật bất đẳng thức ma trận tuyến tính kết hợp với các phép biến đổi ma trận thích hợp được sử dụng để thiết lập các điều kiện đủ cho các bài toán ổn định, tiêu hao và điều khiển đảm bảo chi phí.
- Các kỹ thuật của giải tích cấp phân số được sử dụng thông qua các công cụ liên quan đến đạo hàm và tích phân cấp phân số Riemann–Liouville, Caputo, Caputo với nhân suy giảm, phép biến đổi Laplace và các bất đẳng thức liên quan.
- Công cụ LMI Control Toolbox trong MATLAB được sử dụng để kiểm tra tính khả thi của các điều kiện LMI và thực hiện các mô phỏng số minh họa cho các kết quả lý thuyết.

5. Kết quả nghiên cứu và cấu trúc của luận án

Trong luận án này, lớp hệ đầu tiên được xem xét là hệ nơ-ron không chắc

chấn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có nhiều và trễ hằng số, được mô tả bởi hệ sau

$$\begin{cases} {}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]g(x(t)) \\ \quad + [W + \Delta W(t)]h(x(t - \tau)) + [D + \Delta D(t)]\omega(t), \quad t \geq 0, \\ y(t) = C_1x(t) + C_2x(t - \tau) + C_3g(x(t)) + C_4h(x(t - \tau)) + C_5\omega(t), \quad t \geq 0, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

Kết quả đạt được là thiết lập các điều kiện đủ dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính nhằm đảm bảo tính tiêu hao trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ được xét, trên cơ sở sử dụng phương pháp hàm Lyapunov.

Lớp hệ thứ hai được xem xét là hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo có nhiều, được mô tả bởi hệ phương trình sau

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [W + \Delta W(t)]g(x(t)) \\ \quad + [D + \Delta D(t)]\omega(t), \quad t \geq 0, \\ y(t) = C_1x(t) + C_2g(x(t)), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2)$$

Kết quả đạt được là thiết lập các điều kiện đủ dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính nhằm đảm bảo hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo có nhiều thỏa mãn tính tiêu hao mở rộng trong một khoảng thời gian hữu hạn, trên cơ sở sử dụng định nghĩa tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn và phương pháp hàm Lyapunov.

Phần tiếp theo của luận án nghiên cứu lớp hệ tổ hợp lỗi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên, được mô tả như sau

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = A(\xi)x(t) + D(\xi)x(t - h(t)) + B(\xi)u(t), \quad t > 0, \\ x(\eta) = \varphi(\eta), \quad \forall \eta \in [-h_2, 0]. \end{cases} \quad (3)$$

Kết quả đạt được là thiết lập các điều kiện đủ dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính nhằm đảm bảo sự tồn tại của luật điều khiển phản hồi trạng

thái đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ (3), trên cơ sở sử dụng phương pháp hàm Lyapunov.

Phần cuối của luận án tập trung nghiên cứu bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ không chắc chắn phi tuyến cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có trễ hằng số, được mô tả bởi hệ phương trình sau

$$\begin{cases} {}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}x(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (D + \Delta D(t))x(t - \tau) \\ \quad + f(t, x(t)) + g(t, x(t - \tau)) + (B + \Delta B(t))u(t), \quad t \geq 0, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (4)$$

Kết quả đạt được là thiết lập các điều kiện đủ phụ thuộc vào trễ dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính nhằm thiết kế luật điều khiển phản hồi trạng thái đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ được xem xét, trên cơ sở sử dụng phương pháp hàm Lyapunov.

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục ký hiệu, danh mục các công trình khoa học của tác giả và tài liệu tham khảo, nội dung chính của luận án được trình bày trong ba chương như sau:

- Chương 1: Cơ sở toán học.
- Chương 2: Bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn cho một số lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số.
- Chương 3: Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho một số lớp hệ phương trình vi phân cấp phân số.

Các kết quả của luận án được hình thành và hoàn thiện từ bốn công trình khoa học đã được công bố trên các tạp chí quốc tế thuộc danh mục SCIE, Q1/Q2. Ngoài ra, các kết quả nghiên cứu của luận án cũng đã được báo cáo tại các hội nghị, hội thảo khoa học và xêmina chuyên môn sau:

- Xêmina tại Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên trong giai đoạn 2022–2026.
- Hội thảo “Những khía cạnh mới trong lý thuyết định tính của hệ điều khiển và ứng dụng 2023 (NACSA–2023)”, Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán (VIASM), từ ngày 6 đến ngày 7 tháng 4 năm 2023.
- Hội nghị “Toán học toàn quốc lần thứ 10”, Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng, từ ngày 8 đến ngày 12 tháng 8 năm 2023.
- Hội thảo “Tính chất định tính của các hệ động lực và một số vấn đề liên quan”, Trường Đại học Đồng Tháp, ngày 12 tháng 1 năm 2024.
- Hội nghị Nghiên cứu sinh, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, tháng 11 năm 2024.

Chương 1

Cơ sở toán học

Chương này trình bày một số kiến thức cơ bản của lý thuyết phương trình vi phân cấp phân số. Nội dung chương bao gồm các kiến thức về giải tích cấp phân số, sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm của lớp hệ phương trình vi phân cấp phân số, ổn định trong thời gian hữu hạn và ổn định hóa trong thời gian hữu hạn, bài toán tiêu hao của hệ động lực, bài toán điều khiển đảm bảo chi phí cùng với một số bổ đề hỗ trợ được sử dụng trong quá trình chứng minh các kết quả chính của luận án. Nội dung kiến thức được tham khảo từ các tài liệu [2, 11, 12, 28, 31, 34, 46, 63, 69, 70].

1.1 Một số kiến thức cơ bản về giải tích cấp phân số

Một trong những hàm đặc biệt quan trọng trong giải tích cấp phân số là hàm Gamma $\Gamma(z)$. Hàm này là sự mở rộng của khái niệm giai thừa sang trường hợp đối số thực và phức, đồng thời đóng vai trò cơ bản trong lý thuyết đạo hàm và tích phân cấp phân số.

Định nghĩa 1.1.1 ([2], Chương 1, Mục 1.2(i), trang 6). Hàm Gamma $\Gamma(z)$ được định nghĩa bởi công thức

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad (\alpha > 0). \quad (1.1)$$

Mệnh đề 1.1.2 ([2], Chương 1, Mục 1.2, trang 6). *Hàm $\Gamma(\alpha)$ hội tụ với mọi $\alpha > 0$.*

Định nghĩa 1.1.3 ([2], Chương 1, Mục 1.2(ii), trang 8).

a) Hàm Mittag–Leffler hai tham số được định nghĩa bởi

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta, z \in \mathbb{R}). \quad (1.2)$$

b) Trong trường hợp $\beta = 1$, ta có

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z). \quad (1.3)$$

Định nghĩa 1.1.4 ([2], Chương 1, Mục 1.6, trang 20). Cho $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Hàm $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là *liên tục tuyệt đối* trên $[a, b]$ nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho đối với mọi họ hữu hạn các khoảng đôi một không giao nhau $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, n$, thỏa mãn

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta,$$

thì

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

Tập hợp các hàm liên tục tuyệt đối trên $[a, b]$ được ký hiệu bởi $AC([a, b])$.

Một hàm $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ thuộc $AC([a, b])$ khi và chỉ khi f' tồn tại hầu khắp nơi trên $[a, b]$, $f' \in L_1([a, b])$ và

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s) ds, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.4)$$

Định nghĩa 1.1.5 ([2], Chương 1, Mục 1.6, trang 20). Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta định nghĩa $AC^n([a, b])$ là không gian các hàm liên tục tuyệt đối cấp n , tức là

$$AC^n([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f^{(n-1)} \in AC([a, b]) \right\}.$$

Bổ đề 1.1.6 ([2], Chương 1, Mục 1.6, trang 20). Một hàm f thuộc $AC^n([a, b])$ khi và chỉ khi f có thể được biểu diễn dưới dạng

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} \varphi(s) ds + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (t-a)^k,$$

trong đó $\varphi \in L_1([a, b])$, $c_k \in \mathbb{R}$.

1.1.1 Tích phân và đạo hàm cấp phân số Riemann–Liouville

Trong mục này, chúng tôi trình bày định nghĩa và một số tính chất của tích phân và đạo hàm cấp phân số Riemann–Liouville trên khoảng hữu hạn.

Định nghĩa 1.1.7 ([2], Chương 2, Mục 2.1, trang 26). Cho $[a, b] \subset \mathbb{R}$ với $a < b$. Tích phân cấp phân số Riemann–Liouville cấp $\alpha > 0$ của hàm $f \in L_1(a, b)$ được định nghĩa bởi

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t \in (a, b].$$

Trường hợp $\alpha = 0$, ta quy ước ${}_a I_t^0 f(t) = f(t)$, hay tương đương ${}_a I_t^0 = I$, trong đó I là toán tử đồng nhất.

Bổ đề 1.1.8 ([2], Chương 2, mục 2.2, Bổ đề 2.2.2, trang 30). Cho $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Giả sử rằng $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Khi đó,

$${}_a I_t^\alpha \left({}_a I_t^\beta f(t) \right) = {}_a I_t^{\alpha+\beta} f(t), \quad t \in (a, b].$$

Định nghĩa 1.1.9 ([2], Chương 2, Mục 2.2, trang 27). Đạo hàm cấp phân số Riemann–Liouville cấp $\alpha > 0$ của hàm $f \in L_1([a, b])$, ký hiệu bởi ${}_a^{RL} D_t^\alpha f(t)$, được định nghĩa như sau

Với $n-1 < \alpha < n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} {}_a^{RL} D_t^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_a I_t^{n-\alpha} f(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds, \quad t \in (a, b]. \end{aligned}$$

Với $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ và giả sử f có đạo hàm đến cấp n , ta có

$${}_a^{RL} D_t^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t),$$

trong đó $\frac{d^n}{dt^n} f$ là đạo hàm cổ điển cấp n của hàm f .

Ngoài ra, với $\alpha = 0$, ta quy ước ${}_a^{RL} D_t^0$ là toán tử đồng nhất.

Ví dụ dưới đây trình bày công thức tính tích phân và đạo hàm cấp phân số Riemann–Liouville của hàm lũy thừa.

Ví dụ 1.1.10 ([2], Chương 2, mục 2.2, trang 28). Với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, thì

$${}_a I_t^\alpha (t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha-1},$$

$${}_a^{RL} D_t^\alpha (t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

Bổ đề sau đây đưa ra một điều kiện đủ để tồn tại các đạo hàm cấp phân số Riemann–Liouville.

Bổ đề 1.1.11 ([34], Hệ quả 2.2, trang 73). Giả sử $f \in AC([a, b])$. Khi đó, ${}_a^{RL} D_t^\alpha f(t)$ tồn tại hầu khắp nơi trên $[a, b]$ với mọi $0 < \alpha < 1$. Hơn nữa,

$${}_a^{RL} D_t^\alpha f(t) \in L_p([a, b]), \quad 1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$$

và

$${}_a^{RL} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_a^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds \right].$$

Mệnh đề sau khẳng định tính tuyến tính của toán tử đạo hàm cấp phân số Riemann–Liouville.

Mệnh đề 1.1.12 ([31], Định lý 2.1, trang 29). Cho $\alpha > 0$. Khi đó, đạo hàm cấp phân số Riemann–Liouville cấp α là một toán tử tuyến tính, tức là

$${}_a^{RL} D_t^\alpha (\xi_1 f(t) + \xi_2 g(t)) = \xi_1 {}_a^{RL} D_t^\alpha f(t) + \xi_2 {}_a^{RL} D_t^\alpha g(t),$$

trong đó $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ và $f, g \in AC^n([a, b])$.

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu định nghĩa và một số tính chất cơ bản của đạo hàm cấp phân số Caputo. Những kết quả này đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu các hệ phương trình vi phân cấp phân số và sẽ được sử dụng xuyên suốt trong các chương tiếp theo của luận án.

1.1.2 Đạo hàm cấp phân số Caputo

Định nghĩa 1.1.13 ([31], Chương 2, trang 37–38). Đạo hàm cấp phân số Caputo cấp α của hàm $f \in AC^n([a, b])$, ký hiệu bởi ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$, được định nghĩa bởi Với $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, thì

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds.$$

Với $\alpha = n \in \mathbb{N}$, thì

$${}_a^C D_t^n f(t) = f^{(n)}(t).$$

Đặc biệt, khi $0 < \alpha < 1$, ta có

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds.$$

Đối với hàm véc tơ $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^\top \in \mathbb{R}^n$, đạo hàm cấp phân số Caputo của $x(t)$ được định nghĩa theo từng thành phần như sau

$${}_a^C D_t^\alpha x(t) = ({}_a^C D_t^\alpha x_1(t), \dots, {}_a^C D_t^\alpha x_n(t))^\top.$$

Bổ đề 1.1.14 ([34], Chương 2, trang 95–96).

(i) Cho $\alpha > 0$ và $f \in C([a, b])$. Khi đó,

$${}_a^C D_t^\alpha {}_a I_t^\alpha f(t) = f(t), \quad t \in (a, b].$$

(ii) Cho $n - 1 < \alpha < n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $f \in AC^n([a, b])$, thì

$${}_a I_t^\alpha {}_a^C D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k.$$

Đặc biệt, khi $0 < \alpha < 1$, ta có

$${}_a I_t^\alpha {}_a^C D_t^\alpha f(t) = f(t) - f(a).$$

Bổ đề sau trình bày mối liên hệ giữa đạo hàm cấp phân số Riemann–Liouville và đạo hàm cấp phân số Caputo.

Bổ đề 1.1.15 ([34], Chương 2, trang 91). Cho $n - 1 < \alpha < n$, với $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, với mọi $f \in AC^n([a, b])$, ta có

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^{RL} D_t^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right].$$

Đặc biệt, nếu $0 < \alpha < 1$, thì

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^{RL} D_t^\alpha (f(t) - f(a)).$$

Mệnh đề sau cho thấy đạo hàm cấp phân số Caputo là một toán tử tuyến tính.

Mệnh đề 1.1.16 ([31], Định lý 2.3, trang 30). Cho $\alpha > 0$. Khi đó, đạo hàm cấp phân số Caputo cấp α là một toán tử tuyến tính, tức là

$${}_a^C D_t^\alpha (\xi_1 f(t) + \xi_2 g(t)) = \xi_1 {}_a^C D_t^\alpha f(t) + \xi_2 {}_a^C D_t^\alpha g(t),$$

trong đó $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ và $f, g \in AC^n([a, b])$.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày định nghĩa và một số tính chất cơ bản của tích phân và đạo hàm cấp phân số với nhân suy giảm.

1.1.3 Tích phân và đạo hàm cấp phân số với nhân suy giảm

Định nghĩa 1.1.17 ([40]). Cho $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda \geq 0$ và $f \in L_1([a, b])$. Tích phân cấp phân số Riemann–Liouville với nhân suy giảm của hàm f được định nghĩa bởi

$${}_0^T I_0^{\alpha, \lambda} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (1.5)$$

Định nghĩa 1.1.18 ([40]). Cho $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda \geq 0$ và $f \in AC([a, b])$. Đạo hàm cấp phân số Caputo với nhân suy giảm của hàm f được định nghĩa bởi

$${}_0^T D_0^{\alpha, \lambda} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{-\alpha} [\lambda f(s) + f'(s)] ds. \quad (1.6)$$

Đặc biệt, khi $\lambda = 0$, ta thu được đạo hàm cấp phân số Caputo

$${}^{TC}D_0^{\alpha,0}f(t) = {}^CD_t^\alpha f(t).$$

Bổ đề 1.1.19 ([40]). Cho $0 < \alpha < 1$, $\lambda \geq 0$ và $f \in AC([a, b], \mathbb{R})$. Khi đó,

$$(i) \quad {}^TI_a^{\alpha,\lambda} [{}^{TC}D_a^{\alpha,\lambda} f(t)] = f(t) - e^{-\lambda(t-a)} f(a).$$

$$(ii) \quad {}^{TC}D_a^{\alpha,\lambda} [{}^TI_a^{\alpha,\lambda} f(t)] = f(t).$$

1.1.4 Biến đổi Laplace của đạo hàm và tích phân cấp phân số

Biến đổi Laplace đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu các phương trình vi phân cấp phân số. Trong mục này, chúng tôi trình bày một số kết quả cơ bản về biến đổi Laplace của đạo hàm và tích phân cấp phân số.

Giả sử hàm $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- Tồn tại các hằng số $M > 0$ và $s_0 \geq 0$ sao cho

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t}, \quad t \geq 0.$$

- Trên mỗi đoạn $[a, b] \subset [0, +\infty)$, hàm f liên tục từng khúc và có hữu hạn điểm cực trị.

Khi đó, hàm f được gọi là hàm gốc. Mặt khác, với $s \in \mathbb{R}$, $s > s_0$, thì

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (1.7)$$

được gọi là biến đổi Laplace của hàm f . Hàm $F(s)$ được gọi là hàm ảnh của f qua biến đổi Laplace.

Các bổ đề sau trình bày một số công thức biến đổi Laplace cơ bản đối với các toán tử cấp phân số.

Bổ đề 1.1.20 ([34], trang 98). Cho $\alpha \in (0, 1)$, $\beta > 0$, $h > 0$, $s \in \mathbb{R}$ và $f, g \in AC([0, +\infty))$. Khi đó, ta có

$$(i) \quad \mathcal{L} \left[{}^C_0 D_t^\alpha f(t) \right] (s) = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)](s) - s^{\alpha-1} f(0), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad \mathcal{L} \left[t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(ht^\alpha) \right] (s) = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha - h)^{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, s > h^{1/\alpha}.$$

$$(iii) \quad \mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s), \text{ trong đó tích chập}$$

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau.$$

Bổ đề 1.1.21 ([40]). Cho $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda \geq 0$ và $f \in AC([0, +\infty))$. Khi đó, ta có

$$(i) \quad \mathcal{L} \left[{}^T I_0^{\alpha, \lambda} f(t) \right] (s) = (s + \lambda)^{-\alpha} \mathcal{L}[f(t)](s).$$

$$(ii) \quad \mathcal{L} \left[{}^{TC} D_0^{\alpha, \lambda} f(t) \right] (s) = (s + \lambda)^\alpha \mathcal{L}[f(t)](s) - (s + \lambda)^{\alpha-1} f(0).$$

1.2 Bài toán tồn tại và duy nhất nghiệm cho hệ phương trình vi phân cấp phân số

1.2.1 Hệ phương trình vi phân cấp phân số không có trễ

Giả sử $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ là một hàm liên tục và bị chặn.

Xét hệ phương trình vi phân cấp phân số Caputo sau

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.8)$$

trong đó $\alpha \in (0, 1)$, $T > 0$ và $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái.

Định nghĩa 1.2.1. Hàm $x(t)$ được gọi là nghiệm của bài toán (1.8) trên đoạn $[0, T]$ nếu $x(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ và khi thay vào hệ (1.8) thì nó thỏa mãn mọi điều kiện của phương trình với mọi $t \in [0, T]$.

Tương tự như trong lý thuyết phương trình vi phân thường, để chứng minh sự tồn tại nghiệm, người ta thường chuyển bài toán giá trị ban đầu cấp phân số về một phương trình tích phân tương đương.

Bổ đề 1.2.2 ([12], Chương 6, Bổ đề 6.2, trang 86). *Xét bài toán (1.8). Khi đó, với mọi điều kiện ban đầu $x_0 \in \mathbb{R}^n$, hàm $x(\cdot, x_0) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu (1.8) khi và chỉ khi nó thỏa mãn phương trình tích phân sau*

$$x(t, x_0) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s, x_0)) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (1.9)$$

Nhận xét 1.2.3. Giả sử t_0 là thời điểm hiện tại và $t > t_0$ là một thời điểm trong tương lai. Từ công thức (1.9), có thể thấy rằng để xác định trạng thái $x(t)$, ngoài việc biết giá trị của nghiệm trên khoảng $[t_0, t)$, ta còn cần biết các giá trị của nghiệm trên đoạn $[0, t_0]$. Điều này phản ánh bản chất phụ thuộc quá khứ của phương trình vi phân cấp phân số. Đây cũng là điểm khác biệt cơ bản giữa phương trình vi phân cấp phân số và phương trình vi phân thông thường, bởi nghiệm của phương trình vi phân cấp phân số không có tính chất địa phương theo thời gian.

Định lý sau đây phát biểu về sự tồn tại nghiệm địa phương cho phương trình vi phân cấp số.

Định lý 1.2.4 ([12], Chương 6, trang 86, Định lý 6.1). *Xét bài toán (1.8), với điều kiện ban đầu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và hai số dương $K > 0, T > 0$. Đặt*

$$G := \{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n : t \in [0, T], \|x - x_0\| \leq K\},$$

và giả sử $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ là một hàm liên tục. Đồng thời, đặt

$$\mathcal{T} = \begin{cases} T, & \text{nếu } \sup_{(t,x) \in G} \|f(t, x)\| = 0, \\ \min \left\{ T, \left(\frac{K\Gamma(\alpha+1)}{\sup_{(t,x) \in G} \|f(t, x)\|} \right)^{1/\alpha} \right\}, & \text{trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Khi đó, tồn tại một hàm $x \in C([0, \mathcal{T}], \mathbb{R}^n)$ là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu (1.8).

Tiếp theo, ta xét sự tồn tại và duy nhất của nghiệm toàn cục.

Định lý 1.2.5 ([3], Định lý 2). *Giả sử tồn tại một hàm liên tục*

$$L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

sao cho hàm $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ thỏa mãn

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t) \|x - y\|$$

với mọi $t \geq 0$ và mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$. Khi đó, phương trình tích phân (1.9) có một nghiệm toàn cục duy nhất được xác định trên $\mathbb{R}_+$.

1.2.2 Hệ phương trình vi phân cấp phân số có trễ

Đối với hệ phương trình vi phân cấp phân số có trễ, định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục đã được chứng minh trong [69].

Xét hệ phương trình vi phân cấp phân số có trễ

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t - h_1(t)), \dots, x(t - h_m(t))), & t \in [0, +\infty), \\ x(\theta) = \varphi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (1.10)$$

trong đó $\varphi(\theta)$ là một hàm liên tục, $\tau \geq 0$, $h_i : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ với $1 \leq i \leq m$ là các hàm liên tục và thỏa mãn $h_i(t) \leq \tau + t$. Hàm $f = (f_1, \dots, f_n)$, trong đó mỗi $f_i : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Mệnh đề 1.2.6 ([69]). *Hàm $x(t) \in C([-\tau, +\infty); \mathbb{R}^n)$ là nghiệm của bài toán điều kiện ban đầu (1.10) trên $[-\tau, +\infty)$ nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn phương trình tích phân*

$$x(t) = \varphi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s-h_1(s)), \dots, x(s-h_m(s))) ds,$$

với mọi $t \in [0, +\infty)$.

Định lý 1.2.7 ([69]). *Giả sử $f = (f_1, \dots, f_n)$, trong đó*

$$f_i : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

thỏa mãn các điều kiện sau

(i) Các hàm f_i , $i = 1, \dots, n$, là các hàm liên tục.

(ii) Tồn tại một hằng số $L > 0$ sao cho

$$|f_i(t, x) - f_i(t, y)| \leq L\|x - y\|,$$

với mọi $t \geq 0$, mọi $x, y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$.

Khi đó, bài toán giá trị ban đầu (1.10) có nghiệm duy nhất trên $[-\tau, +\infty)$.

1.3 Ổn định trong thời gian hữu hạn và ổn định hoá trong thời gian hữu hạn

Trong lý thuyết điều khiển, tính ổn định của hệ động lực là một trong những vấn đề cơ bản và quan trọng. Ổn định theo nghĩa Lyapunov mô tả khả năng duy trì quỹ đạo của hệ trong một lân cận của trạng thái cân bằng khi điều kiện ban đầu đủ gần trạng thái đó, trong khi ổn định tiệm cận yêu cầu thêm rằng quỹ đạo của hệ hội tụ về trạng thái cân bằng khi thời gian tiến tới vô cùng. Tuy nhiên, trong nhiều bài toán thực tế, người ta không chỉ quan tâm đến đặc tính tiệm cận của hệ mà còn yêu cầu trạng thái của hệ phải được duy trì trong một miền cho trước trên một khoảng thời gian hữu hạn xác định. Yêu cầu này dẫn đến khái niệm *ổn định trong thời gian hữu hạn*.

1.3.1 Bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn

Xét hệ phương trình vi phân cấp phân số

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.11)$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ thoả mãn $f(t, 0) = 0$, $\alpha \in (0, 1)$. Khi đó, bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 1.3.1. Cho các số dương c_1, c_2, T với $c_1 < c_2$ và ma trận đối xứng xác định dương $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Hệ (1.11) được gọi là ổn định trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T, R) nếu điều kiện sau được thỏa mãn

$$x_0^\top R x_0 \leq c_1 \Rightarrow x^\top(t) R x(t) < c_2, \forall t \in [0, T].$$

Mặt khác, trong trường hợp hệ chịu tác động của nhiễu bị chặn, khái niệm tính bị chặn trong thời gian hữu hạn thường được sử dụng để mô tả tính chất của trạng thái hệ trên một khoảng thời gian hữu hạn.

Định nghĩa 1.3.2. Hệ phương trình vi phân cấp phân số

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t), \omega(t)), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.12)$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ là hàm cho trước thỏa mãn điều kiện $f(t, 0, 0) = 0$, $\alpha \in (0, 1)$ và $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ là nhiễu đầu vào. Giả sử tồn tại hằng số $\bar{\omega} > 0$ sao cho

$$\omega^\top(t) \omega(t) \leq \bar{\omega}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Khi đó, với các số dương c_1, c_2, T , trong đó $c_1 < c_2$, và ma trận đối xứng xác định dương $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cho trước, hệ (1.12) được gọi là bị chặn trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, R, \bar{\omega})$ nếu điều kiện sau được thỏa mãn

$$x_0^\top R x_0 \leq c_1 \Rightarrow x^\top(t) R x(t) < c_2, \quad \forall t \in [0, T].$$

1.3.2 Bài toán ổn định hóa trong thời gian hữu hạn

Đối với các hệ cấp phân số Caputo, bài toán ổn định hóa trong thời gian hữu hạn có ý nghĩa đặc biệt quan trọng do các hệ này có tính chất nhớ và phụ thuộc vào lịch sử trạng thái, khiến động học của hệ phức tạp hơn so với các hệ cấp nguyên cổ điển. Vì vậy, việc nghiên cứu bài toán ổn định hóa trong thời gian hữu hạn cho các hệ cấp phân số không chỉ có ý nghĩa về mặt lý thuyết mà còn có giá trị trong nhiều bài toán ứng dụng thực tiễn.

Trong mục này, chúng tôi trình bày định nghĩa bài toán ổn định hóa trong thời gian hữu hạn đối với các hệ cấp phân số Caputo.

Xét hệ phương trình vi phân cấp phân số có điều khiển

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.13)$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ thỏa mãn điều kiện $f(t, 0, 0) = 0$, $u(t) \in L_2([0, T], \mathbb{R}^m)$ là véc tơ điều khiển và $\alpha \in (0, 1)$.

Định nghĩa 1.3.3. Cho các số dương c_1, c_2, T với $c_1 < c_2$ và ma trận đối xứng xác định dương $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Hệ (1.13) được gọi là ổn định hóa được trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T, R) nếu tồn tại hàm $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ thỏa mãn $h(0) = 0$ sao cho hệ đóng

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t), h(x(t))), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.14)$$

ổn định trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T, R) . Khi đó, $u = h(x)$ được gọi là luật điều khiển phản hồi trạng thái ổn định hóa.

Trong trường hợp đơn giản nhất là lớp hệ tuyến tính, các định nghĩa 1.3.1, 1.3.2 và 1.3.3 đã được Y. J. Ma và các cộng sự [46] lần đầu tiên đưa ra vào năm 2016.

1.4 Bài toán tiêu hao cho hệ động lực

Lý thuyết tiêu hao do J.C. Willems [71] giới thiệu vào năm 1972 đã trở thành một công cụ nền tảng trong phân tích và thiết kế các hệ động lực. Lý thuyết này dựa trên mối quan hệ giữa năng lượng cung cấp từ bên ngoài và năng lượng lưu trữ của hệ. Một hệ được gọi là tiêu hao nếu năng lượng lưu trữ của hệ luôn bị chặn trên bởi năng lượng cung cấp từ bên ngoài, nghĩa là hệ không thể tự sinh năng lượng.

Trong [71], J.C. Willems đã xét lớp hệ điều khiển tổng quát có dạng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \geq 0, \\ z(t) = g(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.15)$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ đầu vào và $z(t) \in \mathbb{R}^q$ là véc tơ đầu ra.

Định nghĩa 1.4.1 ([71]). Hệ (1.15) được gọi là *tiêu hao* nếu tồn tại một hàm lưu trữ $S(x) \geq 0$ sao cho

$$S(x(t)) - S(x(0)) \leq \int_0^t w(u(s), z(s)) ds, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.16)$$

trong đó $w : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm cung cấp.

Trong bất đẳng thức (1.16), $S(x(0))$ biểu diễn năng lượng lưu trữ ban đầu của hệ, còn $S(x(t))$ là năng lượng lưu trữ của hệ tại thời điểm t . Đại lượng

$$\int_0^t w(u(s), z(s)) ds, \quad \forall t \geq 0,$$

biểu diễn năng lượng được cung cấp cho hệ trong khoảng thời gian $[0, t]$. Bất đẳng thức này cho thấy năng lượng lưu trữ của hệ luôn bị chặn trên bởi năng lượng được cung cấp từ bên ngoài.

Năm 1976, D. J. Hill và P. J. Moylan [28] đã mở rộng lý thuyết tiêu hao của Willems thông qua việc xét lớp hàm cung cấp có dạng toàn phương

$$\omega(u(t), z(t)) = z^\top(t)Qz(t) + 2z^\top(t)Su(t) + u^\top(t)Ru(t), \quad (1.17)$$

trong đó Q, R là các ma trận đối xứng và S là ma trận thực có kích thước phù hợp.

Định nghĩa 1.4.2 ([28]). Hệ (1.15) với hàm cung cấp (1.17) được gọi là (Q, S, R) -*tiêu hao* nếu với mọi đầu vào chấp nhận được $u(\cdot)$, ta có

$$\int_0^t \omega(u(s), z(s)) ds \geq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

với $x(0) = 0$, trong đó $\omega(t) = \omega(u(t), z(t))$ được xác định dọc theo quỹ đạo của hệ (1.15).

Trong phân tích hệ động lực, các hàm lưu trữ thường được sử dụng như các hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định của hệ. Đối với một hệ cụ thể, hàm lưu trữ biểu diễn năng lượng được tích lũy trong hệ. Khi đó, bất đẳng thức tiêu hao (1.16) cho thấy năng lượng tích lũy của hệ không vượt quá năng lượng được cung cấp từ bên ngoài.

1.5 Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí

Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí đối với các lớp hệ động lực được giới thiệu bởi S.S.L. Chang và T.K.C. Peng [8] vào năm 1972. Mục tiêu của bài toán là thiết kế luật điều khiển sao cho hệ đóng đạt được tính ổn định, đồng thời hàm chi phí toàn phương tương ứng bị chặn trên bởi một hằng số cho trước.

Xét hệ điều khiển sau

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.18)$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ thỏa mãn điều kiện $f(t, 0, 0) = 0$, và $u(t) \in L_2([0, +\infty), \mathbb{R}^m)$ là véc tơ điều khiển.

Xét hàm chi phí toàn phương (còn gọi là hàm mục tiêu dạng toàn phương)

$$J(u) = \int_0^T [x^\top(t)Qx(t) + u^\top(t)Ru(t)] dt, \quad (1.19)$$

trong đó $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ và $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ là các ma trận đối xứng xác định dương cho trước.

Sau đây, chúng ta xét bài toán điều khiển đảm bảo chi phí đối với hệ (1.18). Bài toán này được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 1.5.1. Xét hệ điều khiển (1.18) và hàm chi phí toàn phương (1.19). Nếu tồn tại một luật điều khiển phản hồi trạng thái

$$u^*(t) = h(x(t))$$

dưới dạng $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h(0) = 0$ và một hằng số dương J^* sao cho hệ đóng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), h(x(t))), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.20)$$

là ổn định tiệm cận và hàm chi phí toàn phương (1.19) thỏa mãn $J(u^*) \leq J^*$, thì J^* được gọi là giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1.18) và $u^*(t) = h(x(t))$ được gọi là luật điều khiển phản hồi trạng thái cho hệ đã cho.

Trong trường hợp đơn giản của Định nghĩa 1.5.1, I. R. Petersen và D. C. McFarlane [52] đã nghiên cứu bài toán điều khiển đảm bảo chi phí cho các lớp hệ phương trình vi phân không chắc chắn vào năm 1994. Sau đó, năm 1999, L. Yu và J. Chu [80] đã mở rộng kết quả này cho lớp hệ phương trình vi phân không chắc chắn có trễ hằng số. Trong các công trình trên, hàm chi phí toàn phương được sử dụng có dạng như trong (1.19). Các tác giả đã áp dụng phương pháp hàm Lyapunov kết hợp với lý thuyết ma trận để thiết lập các điều kiện đủ đảm bảo sự tồn tại của luật điều khiển phản hồi trạng thái $u^*(t) = Kx(t)$, đối với hệ đang xét.

Trong những năm gần đây, bài toán điều khiển đảm bảo chi phí cho các lớp hệ phương trình vi phân cấp phân số cũng đã nhận được sự quan tâm đáng kể. Chẳng hạn, năm 2019, L. Liu và các cộng sự [43] đã giải quyết bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho các lớp hệ chuyển mạch phi tuyến cấp phân số có nhiễu thông qua việc thiết kế luật điều khiển phản hồi đầu ra tĩnh, bằng cách đề xuất các hàm Lyapunov đối ứng tuyến tính và áp dụng phương pháp thời gian lưu trung bình.

Năm 2020, M. V. Thuận và các cộng sự [67] đã đề xuất một phương pháp tiếp cận dựa trên LMI để giải bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời

gian hữu hạn cho hệ nơ-ron phi tuyến cấp phân số Caputo không chắc chắn có nhiều như sau

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]f(x(t)) \\ \quad + [W + \Delta W(t)]\omega(t) + [B + \Delta B(t)]u(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.21)$$

trong đó $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận đường chéo xác định dương, các ma trận D, W, B là các ma trận thực và $\Delta A(t), \Delta B(t), \Delta D(t), \Delta W(t)$ là các ma trận tham số bất định có cấu trúc. Các hàm kích hoạt phi tuyến $f_i(\cdot)$ ($i = 1, \dots, n$) là liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz $l_i > 0$, đồng thời thỏa mãn $f_i(0) = 0$. Nhiều $\omega(t) \in \mathbb{R}^p$ thỏa mãn

$$\exists \bar{\omega} > 0 : \quad \omega^\top(t)\omega(t) \leq \bar{\omega}, \quad \forall t \in [0, T],$$

với $T > 0$ là một số dương.

Hàm chi phí liên quan đến hệ (1.21) cho dưới dạng

$$J = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} [x^\top(s)Q_1x(s) + u^\top(s)Q_2u(s)] ds, \quad (1.22)$$

trong đó $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ là các ma trận đối xứng xác định dương cho trước.

Trong trường hợp $\alpha = 1$, biểu thức (1.22) trở thành hàm chi phí toàn phương (1.19) được sử dụng cho hệ phương trình vi phân cấp số nguyên.

Trước khi trình bày các kết quả chính, chúng tôi nhắc lại một số bổ đề hỗ trợ sẽ được sử dụng trong các chứng minh ở những phần sau.

1.6 Một số bổ đề hỗ trợ

Bổ đề 1.6.1. ([5], Bất đẳng thức ma trận Cauchy) Cho $x, y \in \mathbb{R}^n$ và $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là một ma trận đối xứng xác định dương. Khi đó, ta có

$$\pm 2x^\top y \leq x^\top Sx + y^\top S^{-1}y.$$

Bổ đề 1.6.2 ([38]). Giả sử $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi liên tục. Cho hàm $\chi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ không âm, khả vi liên tục và đơn điệu giảm. Khi đó, ta có bất đẳng thức

$${}_0^C D_t^\alpha \{ \chi(t)x^2(t) \} \leq 2\chi(t)x(t) {}_0^C D_t^\alpha x(t), \quad \forall t \geq 0, \forall \alpha \in (0, 1).$$

Bổ đề 1.6.3 ([11]). Cho $\alpha \in (0, 1)$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ và $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận đối xứng xác định dương. Khi đó,

$${}_0^C D_t^\alpha (x^\top(t)Px(t)) \leq 2x^\top(t)P {}_0^C D_t^\alpha x(t), \quad t \geq 0.$$

Do các bổ đề dành cho đạo hàm Caputo không còn áp dụng trực tiếp cho đạo hàm Caputo với nhân suy giảm, nên chúng tôi mở rộng một số kết quả tương ứng cho trường hợp đạo hàm Caputo với nhân suy giảm như sau.

Bổ đề 1.6.4. Cho $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda > 0$, $x(t) \in AC([0, +\infty), \mathbb{R})$. Khi đó, ta có

$${}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda} x^2(t) \leq 2x(t) {}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda} x(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Chứng minh. Theo công thức của đạo hàm Caputo với nhân suy giảm, ta có

$$\begin{aligned} {}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{-\alpha} [\lambda y(s) + \dot{y}(s)] ds \\ &= e^{-\lambda t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} [e^{\lambda s} y(s)]' ds \\ &= e^{-\lambda t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \dot{\rho}(s) ds \\ &= e^{-\lambda t} {}_0^C D_t^\alpha \rho(t), \end{aligned}$$

trong đó $\rho(t) = e^{\lambda t} y(t)$ và ${}_0^C D_t^\alpha \rho(t)$ là đạo hàm Caputo cấp α của hàm $\rho(t)$. Do đó, ta có

$${}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda} x^2(t) = e^{-\lambda t} {}_0^C D_t^\alpha (e^{\lambda t} x^2(t)) = e^{-\lambda t} {}_0^C D_t^\alpha \left[e^{-\lambda t} (e^{\lambda t} x(t))^2 \right].$$

Từ Bổ đề 1.6.2, ta suy ra

$${}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda} x^2(t) = e^{-\lambda t} {}_0^C D_t^\alpha \left[e^{-\lambda t} (e^{\lambda t} x(t))^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq e^{-\lambda t} 2e^{-\lambda t} (e^{\lambda t} x(t)) D_0^\alpha (e^{\lambda t} x(t)) \\
&= 2e^{-2\lambda t} e^{\lambda t} x(t) {}^C D_t^\alpha (e^{\lambda t} x(t)) \\
&= 2x(t) {}^{TC} D_0^{\alpha, \lambda} x(t). \quad \square
\end{aligned}$$

Bổ đề 1.6.5. Cho $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda > 0$, $x(t) \in AC([0, +\infty), \mathbb{R}^n)$ và ma trận đối xứng xác định dương $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Khi đó, bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$${}^{TC} D_0^{\alpha, \lambda} (x^\top(t) P x(t)) \leq 2x^\top(t) P {}^{TC} D_0^{\alpha, \lambda} x(t), \quad \forall t > 0.$$

Chứng minh. Xét $y(t) = P^{1/2} x(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^\top$.

Áp dụng Bổ đề 1.6.4, ta được

$$\begin{aligned}
{}^{TC} D_0^{\alpha, \lambda} (x^\top(t) P x(t)) &= {}^{TC} D_0^{\alpha, \lambda} (y^\top(t) y(t)) \\
&= \sum_{i=1}^n {}^{TC} D_0^{\alpha, \lambda} (y_i^2(t)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n 2y_i(t) {}^{TC} D_0^{\alpha, \lambda} y_i(t) \\
&= 2y^\top(t) {}^{TC} D_0^{\alpha, \lambda} y(t) \\
&= 2x^\top(t) P {}^{TC} D_0^{\alpha, \lambda} x(t). \quad \square
\end{aligned}$$

Bổ đề 1.6.6. ([63], Bổ đề 2) Cho $\alpha > 0$, ta có

(i) $E_\alpha(z) \geq 1$, với mọi $z \in \mathbb{R}_+$.

(ii) $E_\alpha(z)$ là một hàm tăng trên $\mathbb{R}_+$.

Bổ đề 1.6.7 ([63]). Cho $T, h > 0$, $a \geq 1$, $b \geq 0$ và hàm không giảm $G : [-h, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ thỏa mãn

$$G(t) \leq aG(0) + bG(t-h), \quad \forall t \in [0, T].$$

Khi đó,

$$G(t) \leq G(0)a \sum_{j=0}^{[T/h]+1} b^j, \quad \forall t \in [0, T].$$

Để phục vụ cho các phân tích trong các chương sau, chúng tôi mở rộng Bổ đề 1.6.7 như sau.

Bổ đề 1.6.8. Cho $T, \tau, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ là các hằng số dương với $\xi_1 \geq 1$. Giả sử hàm không giảm $\Pi : [-\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$\Pi(t) \leq \xi_1 \Pi(0) + \xi_2 \Pi(t - \tau) + \xi_3, \quad \forall t \in [0, T].$$

Khi đó, với mọi $t \in [0, T]$, ta có

$$\Pi(t) \leq \left(\Pi(0) + \frac{\xi_3}{\xi_1 + \xi_2 - 1} \right) \xi_1 \sum_{j=0}^{\lfloor T/\tau \rfloor + 1} \xi_2^j - \frac{\xi_3}{\xi_1 + \xi_2 - 1}.$$

Chứng minh. Bằng cách đưa vào phép biến đổi $\bar{\Pi}(t) = \Pi(t) + \frac{\xi_3}{\xi_1 + \xi_2 - 1}$, bất đẳng thức ban đầu được viết lại tương đương dưới dạng

$$\bar{\Pi}(t) \leq \xi_1 \bar{\Pi}(0) + \xi_2 \bar{\Pi}(t - \tau), \quad \forall t \in [0, T].$$

Áp dụng Bổ đề 1.6.7, ta có

$$\bar{\Pi}(t) \leq \bar{\Pi}(0) \xi_1 \sum_{j=0}^{\lfloor T/\tau \rfloor + 1} \xi_2^j.$$

Thay ngược lại định nghĩa của $\bar{\Pi}(t)$, ta thu được

$$\Pi(t) \leq \left(\Pi(0) + \frac{\xi_3}{\xi_1 + \xi_2 - 1} \right) \xi_1 \sum_{j=0}^{\lfloor T/\tau \rfloor + 1} \xi_2^j - \frac{\xi_3}{\xi_1 + \xi_2 - 1}.$$

Điều này hoàn tất chứng minh. □

Bổ đề 1.6.9 ([5], Bổ đề Schur). Cho trước các ma trận hằng X, Y, Z với số chiều thích hợp thỏa mãn $Y = Y^\top > 0, X = X^\top$. Khi đó, $X + Z^\top Y^{-1} Z < 0$ nếu và chỉ nếu

$$\begin{bmatrix} X & Z^\top \\ Z & -Y \end{bmatrix} < 0.$$

Chương 2

Bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn cho một số lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có nhiều và trễ hằng số, đồng thời nghiên cứu bài toán tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo có nhiều. Các nội dung trình bày trong chương này dựa trên các kết quả nghiên cứu đã được công bố trong các bài báo [CT4, CT1] thuộc danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

2.1 Bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có nhiều và trễ hằng số

Xét hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có nhiều và trễ hằng số sau

$$\begin{cases} {}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]g(x(t)) \\ \quad + [W + \Delta W(t)]h(x(t-\tau)) + [D + \Delta D(t)]\omega(t), \quad t \geq 0, \\ y(t) = C_1x(t) + C_2x(t-\tau) + C_3g(x(t)) + C_4h(x(t-\tau)) + C_5\omega(t), \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (2.1)$$

trong đó $\alpha \in (0, 1)$ là cấp phân số và $\lambda > 0$ là tham số nhân suy giảm. Véc tơ $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ là trạng thái của hệ, $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ là nhiễu tác động bên ngoài. Số chiều n tương ứng với số lượng nơ-ron trong mạng. Ma trận $A = \text{diag}\{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận đường chéo xác định dương, các ma trận $B, W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ và $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$ là các ma trận thực đã biết. Các ma trận tham số bất định được xác định bởi

$$\begin{aligned}\Delta A(t) &= E_a F_1(t) H_a, & \Delta B(t) &= E_b F_2(t) H_b, \\ \Delta D(t) &= E_d F_3(t) H_d, & \Delta W(t) &= E_w F_4(t) H_w,\end{aligned}$$

trong đó $E_a, E_b, E_d, E_w, H_a, H_b, H_d, H_w$ là các ma trận thực đã biết có kích thước phù hợp. Các ma trận chưa biết biến thiên theo thời gian $F_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, thỏa mãn điều kiện

$$F_i^T(t) F_i(t) \leq I, \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.2)$$

Hàm $\varphi(\cdot) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu với chuẩn

$$\|\varphi\| = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Các hàm kích hoạt phi tuyến $g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ được xác định bởi

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x_1(t)) \\ \vdots \\ g_n(x_n(t)) \end{bmatrix}, \quad h(x(t - \tau)) = \begin{bmatrix} h_1(x_1(t - \tau)) \\ \vdots \\ h_n(x_n(t - \tau)) \end{bmatrix},$$

với mọi $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Để phân tích tính tiêu hao của hệ, chúng tôi sử dụng các giả thiết sau.

Giả thiết 2.1.1. Các hàm kích hoạt phi tuyến $g_i(t)$, $h_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) là liên tục và bị chặn với $g_i(0) = 0$, $h_i(0) = 0$ và thỏa mãn

$$\begin{aligned}k_i^- &\leq \frac{g_i(u) - g_i(v)}{u - v} \leq k_i^+, \\ t_i^- &\leq \frac{h_i(u) - h_i(v)}{u - v} \leq t_i^+, \end{aligned} \quad (2.3)$$

trong đó $k_i^-, k_i^+, t_i^-, t_i^+$ là các số thực đã biết, $u, v \in \mathbb{R}, u \neq v$.

Giả thiết 2.1.2. Nhiễu đầu vào $\omega(\cdot) \in L_2([0, +\infty), \mathbb{R}^q)$ thỏa mãn điều kiện sau

$$\exists \bar{\omega} : \omega^\top(t) \omega(t) < \bar{\omega},$$

trong đó $\bar{\omega}$ là một số thực dương.

Trong trường hợp không có véc tơ đầu ra, hệ (2.1) trở thành

$$\begin{cases} {}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda} x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]g(x(t)) \\ \quad + [W + \Delta W(t)]h(x(t-\tau)) + [D + \Delta D(t)]\omega(t), t \geq 0, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2.4)$$

Định nghĩa 2.1.3. Cho các số dương c_1, c_2, T và $\bar{\omega}$ với $c_1 < c_2$, hệ (2.4) được gọi là bị chặn vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega})$ nếu điều kiện sau được thỏa mãn

$$\|\varphi\|^2 \leq c_1 \Rightarrow \|x(t)\|^2 < c_2, \quad \forall t \in [0, T],$$

với mọi tín hiệu nhiễu $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ thỏa mãn Giả thiết 2.1.2.

Định nghĩa 2.1.4. Hệ (2.1) được gọi là tiêu hao vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega})$ nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn

- (i) Hệ (2.4) bị chặn vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega})$.
- (ii) Với điều kiện ban đầu $\varphi(t) \equiv 0$ với mọi $t \in [-\tau, 0]$, tồn tại số dương $\gamma > 0$ sao cho

$$\int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} \hat{J}(s) ds \geq \gamma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} \omega^\top(s) \omega(s) ds, \forall t \in [0, T],$$

trong đó

$$\hat{J}(s) = 2y^\top(s) \Psi_2 \omega(s) + y^\top(s) \Psi_1 y(s) + \omega^\top(s) \Psi_3 \omega(s),$$

với Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 là các ma trận thực cho trước. Trong đó, Ψ_1 và Ψ_3 là các ma trận đối xứng, ma trận $\Psi_1 \leq 0$ và nhiễu $\omega(t)$ thỏa mãn Giả thiết 2.1.2.

Định lý dưới đây đưa ra một tiêu chuẩn về tính tiêu hao trong thời gian hữu hạn cho hệ (2.1).

Định lý 2.1.5. Cho các số dương c_1, c_2, T và $\bar{\omega}$ với $c_1 < c_2$. Xét hệ (2.1) thỏa mãn các Giả thiết 2.1.1 và 2.1.2. Giả sử tồn tại các số dương $r_a, r_b, r_d, r_w, \gamma, \gamma_1, \gamma_2$, hai ma trận đối xứng xác định dương P, Q và các ma trận đường chéo xác định dương Λ_g, Λ_h sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ * & \Psi_3 - Q - \gamma I - \gamma_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.5a)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Xi}_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} & \Xi_{15} & PE_a & PE_b & PE_d & PE_w \\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} & \Xi_{24} & \Xi_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Xi_{33} & \Xi_{34} & \Xi_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & \Xi_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -r_a I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -r_b I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -r_d I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -r_w I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.5b)$$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}(P)} (\lambda_1 c_1 + \lambda_2) < c_2, \quad (2.5c)$$

$$Q - (\gamma_1 - \gamma_2)I > \gamma_0(1 + e^{\lambda\tau})I. \quad (2.5d)$$

Khi đó, hệ (2.1) là tiêu hao vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega})$, trong đó

$$K_{1g} = \text{diag}\{k_1^- k_1^+, k_2^- k_2^+, \dots, k_n^- k_n^+\}, K_{2g} = \text{diag}\left\{\frac{k_1^- + k_1^+}{2}, \dots, \frac{k_n^- + k_n^+}{2}\right\},$$

$$K_{1h} = \text{diag}\{t_1^- t_1^+, t_2^- t_2^+, \dots, t_n^- t_n^+\}, K_{2h} = \text{diag}\left\{\frac{t_1^- + t_1^+}{2}, \dots, \frac{t_n^- + t_n^+}{2}\right\},$$

$$\Lambda_g = \text{diag}\{\Lambda_{11}^g, \Lambda_{12}^g, \dots, \Lambda_{1n}^g\}, \Lambda_h = \text{diag}\{\Lambda_{11}^h, \Lambda_{12}^h, \dots, \Lambda_{1n}^h\},$$

$$\xi_1 = E_\alpha(\tau T^\alpha), \xi_2 = e^{\lambda\tau}(E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1), \xi_3 = \gamma_1 \bar{\omega} e^{\lambda T} \frac{E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1}{\tau},$$

$$\lambda_1 = \lambda_{\max}(P) \xi_1 \sum_{j=0}^{\lfloor T/\tau \rfloor + 1} \xi_2^j, \lambda_2 = \frac{\xi_3}{\xi_1 + \xi_2 - 1} \left(\xi_1 \sum_{j=0}^{\lfloor T/\tau \rfloor + 1} \xi_2^j - 1 \right),$$

$$\bar{\gamma}_0 = (\lambda_1 \|\varphi\|^2 + \lambda_2) \tau, x_\tau(t) = x(t - \tau),$$

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{\gamma_1 e^{\lambda T} (E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1)}{\xi_1 + \xi_2 - 1} \left(\xi_1 \sum_{j=0}^{\lfloor T/\tau \rfloor + 1} \xi_2^j - 1 \right), \\
\widehat{\Xi}_{11} &= -PA - A^\top P + r_a H_a^\top H_a - K_{1g} \Lambda_g - C_1^\top \Psi_1 C_1 - \tau P, \\
\Xi_{12} &= -C_1^\top \Psi_1 C_2, \quad \Xi_{13} = PB + K_{2g} \Lambda_g - C_1^\top \Psi_1 C_3, \\
\Xi_{14} &= PW - C_1^\top \Psi_1 C_4, \quad \Xi_{15} = -C_1^\top \Psi_2 - C_1^\top \Psi_1 C_5 + PD, \\
\Xi_{22} &= -K_{1h} \Lambda_h - C_2^\top \Psi_1 C_2 - \tau P, \quad \Xi_{23} = -C_2^\top \Psi_1 C_3, \\
\Xi_{24} &= K_{2h} \Lambda_h - C_2^\top \Psi_1 C_4, \quad \Xi_{25} = -C_2^\top \Psi_2 - C_2^\top \Psi_1 C_5, \\
\Xi_{33} &= r_b H_b^\top H_b - \Lambda_g - C_3^\top \Psi_1 C_3, \quad \Xi_{34} = -C_3^\top \Psi_1 C_4, \quad \Xi_{35} = -C_3^\top \Psi_2 - C_3^\top \Psi_1 C_5, \\
\Xi_{44} &= r_w H_w^\top H_w - \Lambda_h - C_4^\top \Psi_1 C_4, \quad \Xi_{45} = -C_4^\top \Psi_2 - C_4^\top \Psi_1 C_5, \\
\Xi_{55} &= r_d H_d^\top H_d - C_5^\top \Psi_2 - \Psi_2^\top C_5 - C_5^\top \Psi_1 C_5 - \Psi_3 + \gamma I - \gamma_1 I + \gamma_2 I + Q.
\end{aligned}$$

Chứng minh. Sử dụng Bổ đề 1.6.5, lấy đạo hàm Caputo với nhân suy giảm của hàm $V(x(t)) = x^\top(t)Px(t)$ dọc theo nghiệm của hệ, ta có

$$\begin{aligned}
{}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda} V(x(t)) &\leq 2x^\top(t)P {}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda} x(t) \\
&= 2x^\top(t)[-PA]x(t) - 2x^\top(t)P\Delta A(t)x(t) \\
&\quad + 2x^\top(t)PBg(x(t)) + 2x^\top(t)P\Delta B(t)g(x(t)) \\
&\quad + 2x^\top(t)PW h(x_\tau(t)) + 2x^\top(t)P\Delta W(t)h(x_\tau(t)) \\
&\quad + 2x^\top(t)PD\omega(t) + 2x^\top(t)P\Delta D(t)\omega(t).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Từ (2.2), áp dụng bất đẳng thức ma trận Cauchy, ta thu được các ước lượng sau

$$\begin{aligned}
-2x^\top(t)P\Delta A(t)x(t) &\leq r_a^{-1}x^\top(t)PE_aE_a^\top Px(t) \\
&\quad + r_a x^\top(t)H_a^\top H_a x(t), \\
2x^\top(t)P\Delta B(t)g(x(t)) &\leq r_b^{-1}x^\top(t)PE_bE_b^\top Px(t) \\
&\quad + r_b g^\top(x(t))H_b^\top H_b g(x(t)), \\
2x^\top(t)P\Delta D(t)\omega(t) &\leq r_d^{-1}x^\top(t)PE_dE_d^\top Px(t) \\
&\quad + r_d \omega^\top(t)H_d^\top H_d \omega(t), \\
2x^\top(t)P\Delta W(t)h(x_\tau(t)) &\leq r_w^{-1}x^\top(t)PE_wE_w^\top Px(t) \\
&\quad + r_w h^\top(x_\tau(t))H_w^\top H_w h(x_\tau(t)).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Từ (2.3), dễ dàng kiểm chứng các bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} -x^\top(t)K_{1g}\Lambda_g x(t) + 2x^\top(t)K_{2g}\Lambda_g g(x(t)) - g^\top(x(t))\Lambda_g g(x(t)) &\geq 0, \\ -x_\tau^\top(t)K_{1h}\Lambda_h x_\tau(t) + 2x_\tau^\top(t)K_{2h}\Lambda_h h(x_\tau(t)) - h^\top(x_\tau(t))\Lambda_h h(x_\tau(t)) &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Bên cạnh đó, ta có

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} y(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ * & \Psi_3 - \gamma I - \gamma_2 I - Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \\ &= 2y^\top(t)\Psi_2\omega(t) + y^\top(t)\Psi_1 y(t) + \omega^\top(t)[\Psi_3 - \gamma I - \gamma_2 I - Q]\omega(t) \\ &= 2x^\top(t)C_1^\top\Psi_2\omega(t) + 2x_\tau^\top(t)C_2^\top\Psi_2\omega(t) \\ &\quad + 2g^\top(x(t))C_3^\top\Psi_2\omega(t) + 2h^\top(x_\tau(t))C_4^\top\Psi_2\omega(t) \\ &\quad + 2\omega^\top(t)C_5^\top\Psi_2\omega(t) + x^\top(t)C_1^\top\Psi_1C_1x(t) \\ &\quad + x_\tau^\top(t)C_2^\top\Psi_1C_1x(t) + g^\top(x(t))C_3^\top\Psi_1C_1x(t) \\ &\quad + h^\top(x_\tau(t))C_4^\top\Psi_1C_1x(t) + \omega^\top(t)C_5^\top\Psi_1C_1x(t) \\ &\quad + x^\top(t)C_1^\top\Psi_1C_2x_\tau(t) + x_\tau^\top(t)C_2^\top\Psi_1C_2x_\tau(t) \\ &\quad + g^\top(x(t))C_3^\top\Psi_1C_2x_\tau(t) + h^\top(x_\tau(t))C_4^\top\Psi_1C_2x_\tau(t) \\ &\quad + \omega^\top(t)C_5^\top\Psi_1C_2x_\tau(t) + x^\top(t)C_1^\top\Psi_1C_3g(x(t)) \\ &\quad + x_\tau^\top(t)C_2^\top\Psi_1C_3g(x(t)) + g^\top(x(t))C_3^\top\Psi_1C_3g(x(t)) \\ &\quad + h^\top(x_\tau(t))C_4^\top\Psi_1C_3g(x(t)) + \omega^\top(t)C_5^\top\Psi_1C_3g(x(t)) \\ &\quad + x^\top(t)C_1^\top\Psi_1C_4h(x_\tau(t)) + x_\tau^\top(t)C_2^\top\Psi_1C_4h(x_\tau(t)) \\ &\quad + g^\top(x(t))C_3^\top\Psi_1C_4h(x_\tau(t)) + h^\top(x_\tau(t))C_4^\top\Psi_1C_4h(x_\tau(t)) \\ &\quad + \omega^\top(t)C_5^\top\Psi_1C_4h(x_\tau(t)) + x^\top(t)C_1^\top\Psi_1C_5\omega(t) \\ &\quad + x_\tau^\top(t)C_2^\top\Psi_1C_5\omega(t) + g^\top(x(t))C_3^\top\Psi_1C_5\omega(t) \\ &\quad + h^\top(x_\tau(t))C_4^\top\Psi_1C_5\omega(t) + \omega^\top(t)C_5^\top\Psi_1C_5\omega(t) \\ &\quad + \omega^\top(t)[\Psi_3 - \gamma I - \gamma_2 I - Q]\omega(t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Mặt khác, ta có các đẳng thức sau

$$\begin{aligned} 0 &= -\tau x^\top(t)P x(t) - \tau x_\tau^\top(t)P x_\tau(t) + \tau V(x(t)) + \tau V(x_\tau(t)), \\ 0 &= -\gamma_1 \omega^\top(t)\omega(t) + \gamma_1 \omega^\top(t)\omega(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Từ các bất đẳng thức (2.6)–(2.10), ta thu được bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} {}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}V(x(t)) &\leq \eta^\top(t) \Xi \eta(t) + \tau V(x(t)) + \tau V(x_\tau(t)) + \gamma_1 \omega^\top(t) \omega(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} y(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ * & \Psi_3 - Q - \gamma I - \gamma_2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

trong đó

$$\eta^\top(t) = \begin{bmatrix} x^\top(t) & x_\tau^\top(t) & g^\top(x(t)) & h^\top(x_\tau(t)) & \omega^\top(t) \end{bmatrix},$$

và ma trận đối xứng $\Xi = [\Xi_{ij}]_{5 \times 5}$ được xác định bởi

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= -PA - A^\top P + r_a^{-1} P E_a E_a^\top P + r_a H_a^\top H_a + r_b^{-1} P E_b E_b^\top P \\ &\quad + r_w^{-1} P E_w E_w^\top P + r_d^{-1} P E_d E_d^\top P - K_{1g} \Lambda_g - C_1^\top \Psi_1 C_1 - \tau P, \\ \Xi_{12} &= -C_1^\top \Psi_1 C_2, \quad \Xi_{13} = PB + K_{2g} \Lambda_g - C_1^\top \Psi_1 C_3, \\ \Xi_{14} &= PW - C_1^\top \Psi_1 C_4, \quad \Xi_{15} = -C_1^\top \Psi_2 - C_1^\top \Psi_1 C_5 + PD, \\ \Xi_{22} &= -K_{1h} \Lambda_h - C_2^\top \Psi_1 C_2 - \tau P, \quad \Xi_{23} = -C_2^\top \Psi_1 C_3, \\ \Xi_{24} &= K_{2h} \Lambda_h - C_2^\top \Psi_1 C_4, \quad \Xi_{25} = -C_2^\top \Psi_2 - C_2^\top \Psi_1 C_5, \\ \Xi_{33} &= r_b H_b^\top H_b - \Lambda_g - C_3^\top \Psi_1 C_3, \quad \Xi_{34} = -C_3^\top \Psi_1 C_4, \\ \Xi_{35} &= -C_3^\top \Psi_2 - C_3^\top \Psi_1 C_5, \quad \Xi_{44} = r_w H_w^\top H_w - \Lambda_h - C_4^\top \Psi_1 C_4, \\ \Xi_{45} &= -C_4^\top \Psi_2 - C_4^\top \Psi_1 C_5, \\ \Xi_{55} &= r_d H_d^\top H_d - C_5^\top \Psi_2 - \Psi_2^\top C_5 - C_5^\top \Psi_1 C_5 - \Psi_3 + \gamma I - \gamma_1 I + \gamma_2 I + Q. \end{aligned}$$

Sử dụng Bổ đề Schur, điều kiện $\Xi < 0$ tương đương với bất đẳng thức ma trận được cho trong (2.5b). Do đó, áp dụng điều kiện (2.11), ta có

$$\begin{aligned} {}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}V(x(t)) - \tau V(x(t)) &\leq \tau V(x_\tau(t)) + \gamma_1 \omega^\top(t) \omega(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} y(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ * & \Psi_3 - Q - \gamma I - \gamma_2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Mặt khác, kết hợp (2.5a) và (2.12), ta suy ra bất đẳng thức sau

$${}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}V(x(t)) - \tau V(x(t)) \leq \tau V(x_\tau(t)) + \gamma_1 \omega^\top(t) \omega(t). \quad (2.13)$$

Đến đây, chúng tôi chia quá trình chứng minh thành hai bước:

Bước 1: Ta chứng minh rằng hệ (2.4) bị chặn vững trong thời gian hữu hạn

đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega})$.

Để thuận tiện cho các biến đổi tiếp theo, ta đặt

$$\Upsilon(t) = {}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda} V(x(t)) - \tau V(x(t)). \quad (2.14)$$

Áp dụng phép biến đổi Laplace (Bổ đề 1.1.21) cho cả hai vế của (2.14), ta thu được

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\Upsilon(t)](s) &= \mathcal{L} \left[{}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda} V(x(t)) \right] (s) - \tau \mathcal{L}[V(x(t))](s) \\ &= (s + \lambda)^\alpha \mathcal{L}[V(x(t))](s) - (s + \lambda)^{\alpha-1} V(x(0)) - \tau \mathcal{L}[V(x(t))](s) \\ &= [(s + \lambda)^\alpha - \tau] \mathcal{L}[V(x(t))](s) - (s + \lambda)^{\alpha-1} V(x(0)), \end{aligned}$$

điều này tương đương với

$$\mathcal{L}[V(x(t))](s) = \frac{1}{(s + \lambda)^\alpha - \tau} \mathcal{L}[\Upsilon(t)](s) + \frac{(s + \lambda)^{\alpha-1}}{(s + \lambda)^\alpha - \tau} V(x(0)). \quad (2.15)$$

Từ Bổ đề 1.1.20, ta có

$$\begin{aligned} \frac{(s + \lambda)^{\alpha-1}}{(s + \lambda)^\alpha - \tau} &= \mathcal{L}[E_\alpha(\tau t^\alpha)](s + \lambda) = \mathcal{L}[E_\alpha(\tau t^\alpha) e^{-\lambda t}](s), \\ \frac{1}{(s + \lambda)^\alpha - \tau} &= \mathcal{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\tau t^\alpha)](s + \lambda) = \mathcal{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\tau t^\alpha) e^{-\lambda t}](s). \end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V(x(t))](s) &= \mathcal{L}[E_\alpha(\tau t^\alpha) e^{-\lambda t}](s) V(x(0)) \\ &\quad + \mathcal{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\tau t^\alpha) e^{-\lambda t}](s) \mathcal{L}[\Upsilon(t)](s) \\ &= \mathcal{L}[E_\alpha(\tau t^\alpha) e^{-\lambda t}](s) V(x(0)) \\ &\quad + \mathcal{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\tau t^\alpha) e^{-\lambda t} * \Upsilon(t)](s) \\ &= \mathcal{L}[e^{-\lambda t} E_\alpha(\tau t^\alpha)](s) V(x(0)) \\ &\quad + \mathcal{L} \left[\int_0^t e^{-\lambda(t-\mu)} (t - \mu)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\tau(t - \mu)^\alpha) \Upsilon(\mu) d\mu \right] (s). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Sử dụng phép biến đổi Laplace ngược cho cả hai vế của (2.16), ta thu được

$$V(x(t)) = e^{-\lambda t} E_\alpha(\tau t^\alpha) V(x(0)) + \int_0^t e^{-\lambda(t-\mu)} (t - \mu)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\tau(t - \mu)^\alpha) \Upsilon(\mu) d\mu.$$

Do đó, ta thu được đẳng thức

$$e^{\lambda t}V(x(t)) = E_{\alpha}(\tau t^{\alpha})V(x(0)) + \int_0^t (t - \mu)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\tau(t - \mu)^{\alpha}) e^{\lambda \mu} \Upsilon(\mu) d\mu.$$

Với mọi $t > 0$, sử dụng Giả thiết 2.1.2 và bất đẳng thức (2.13), ta thu được ước lượng sau

$$\sup_{\theta \in [0, t]} e^{\lambda \theta} \Upsilon(\theta) \leq e^{\lambda t} \gamma_1 \bar{\omega} + \tau \sup_{\theta \in [0, t]} e^{\lambda \theta} V(x_{\tau}(\theta)). \quad (2.17)$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} & e^{\lambda t}V(x(t)) \\ & \leq E_{\alpha}(\tau t^{\alpha})V(x(0)) \\ & \quad + \sup_{\theta \in [0, t]} e^{\lambda \theta} \Upsilon(\theta) \int_0^t (t - \mu)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\tau(t - \mu)^{\alpha}) d\mu \\ & \leq E_{\alpha}(\tau t^{\alpha})V(x(0)) + \left(e^{\lambda t} \gamma_1 \bar{\omega} + \tau \sup_{\theta \in [0, t]} e^{\lambda \theta} V(x_{\tau}(\theta)) \right) \frac{E_{\alpha}(\tau t^{\alpha}) - 1}{\tau}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Bây giờ, với $t \in [0, T]$, ta ước lượng hàm Lyapunov trên hai khoảng thời gian sau:

- Với $s \in [-\tau, 0]$, do $x(s) = \varphi(s)$, suy ra rằng

$$e^{\lambda s} x^{\top}(s) P x(s) = e^{\lambda s} \varphi^{\top}(s) P \varphi(s) \leq E_{\alpha}(\tau T^{\alpha}) \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} e^{\lambda \theta} \varphi^{\top}(\theta) P \varphi(\theta),$$

trong đó bất đẳng thức được suy ra do tính đơn điệu của hàm Mittag–Leffler $E_{\alpha}(\cdot)$ trên $[0, T]$.

- Với $s \in [0, t]$, áp dụng bất đẳng thức (2.18), ta thu được

$$\begin{aligned} e^{\lambda s}V(x(s)) & \leq E_{\alpha}(\tau s^{\alpha})V(x(0)) \\ & \quad + \left(e^{\lambda s} \gamma_1 \bar{\omega} + \tau \sup_{\theta \in [0, t]} e^{\lambda \theta} V(x_{\tau}(\theta)) \right) \frac{E_{\alpha}(\tau s^{\alpha}) - 1}{\tau} \\ & \leq E_{\alpha}(\tau T^{\alpha}) \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} e^{\lambda \theta} \varphi^{\top}(\theta) P \varphi(\theta) \\ & \quad + \left(e^{\lambda T} \gamma_1 \bar{\omega} + \tau e^{\lambda \tau} \sup_{\theta \in [0, t]} e^{\lambda(\theta - \tau)} V(x_{\tau}(\theta)) \right) \frac{E_{\alpha}(\tau T^{\alpha}) - 1}{\tau}, \end{aligned}$$

trong đó ta đã sử dụng các tính chất $E_\alpha(\tau s^\alpha) \geq 1$ và hàm $E_\alpha(\cdot)$ tăng trên đoạn $[0, T]$.

Do đó, ta thu được ước lượng sau

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in [-\tau, t]} e^{\lambda\theta} V(x(\theta)) &\leq E_\alpha(\tau T^\alpha) \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} e^{\lambda\theta} \varphi^\top(\theta) P \varphi(\theta) \\ &+ \left(e^{\lambda T} \gamma_1 \bar{\omega} + \tau e^{\lambda\tau} \sup_{\theta \in [0, t]} e^{\lambda(\theta-\tau)} V(x_\tau(\theta)) \right) \frac{E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1}{\tau}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Áp dụng Bổ đề 1.6.8 với $\Pi(t) = \sup_{\theta \in [-\tau, t]} e^{\lambda\theta} V(x(\theta))$,

$$\xi_1 = E_\alpha(\tau T^\alpha), \quad \xi_2 = e^{\lambda\tau} (E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1), \quad \xi_3 = \gamma_1 \bar{\omega} e^{\lambda T} \frac{(E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1)}{\tau},$$

từ bất đẳng thức (2.19) và điều kiện $\Pi(0) \leq \lambda_{\max}(P) \|\varphi\|^2$, ta suy ra

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in [-\tau, t]} e^{\lambda\theta} V(x(\theta)) &\leq \left(\Pi(0) + \frac{\xi_3}{\xi_1 + \xi_2 - 1} \right) \xi_1 \sum_{j=0}^{[T/\tau]+1} \xi_2^j - \frac{\xi_3}{\xi_1 + \xi_2 - 1} \\ &\leq \lambda_1 \|\varphi\|^2 + \lambda_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Do đó, với mọi $t \in [0, T]$, ta có

$$\begin{aligned} \|x(t)\|^2 &\leq \frac{x(t)^\top P x(t)}{\lambda_{\min}(P)} \\ &= \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda_{\min}(P)} e^{\lambda t} V(x(t)) \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} (\lambda_1 \|\varphi\|^2 + \lambda_2). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Từ (2.21) và điều kiện (2.5c), ta có, nếu $\|\varphi\|^2 \leq c_1$ thì

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} (\lambda_1 c_1 + \lambda_2) < c_2.$$

Do đó, hệ (2.4) bị chặn vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega})$.

Bước 2: Với điều kiện ban đầu $\varphi(t) \equiv 0$ với mọi $t \in [-\tau, 0]$, ta chứng minh bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} \widehat{J}(s) ds \geq \gamma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} \omega^\top(s) \omega(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Từ (2.12), ta suy ra

$$\begin{aligned} {}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}V(x(t)) &\leq \tau V(x(t)) + \tau V(x_\tau(t)) + \gamma_1 \omega^\top(t) \omega(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} y(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ * & \Psi_3 - Q - \gamma I - \gamma_2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} {}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}V(x(t)) &\leq \tau V(x(t)) + \tau V(x_\tau(t)) + \omega^\top(t) [\gamma_1 I - Q - \gamma_2 I] \omega(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} y(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ * & \Psi_3 - \gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \\ &= \tau V(x(t)) + \tau V(x_\tau(t)) + \omega^\top(t) [\gamma_1 I - Q - \gamma_2 I] \omega(t) - \mathfrak{S}(t), \end{aligned} \tag{2.22}$$

trong đó

$$\mathfrak{S}(t) = - \begin{bmatrix} y(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ * & \Psi_3 - \gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}.$$

Từ (2.5d), ta thu được

$$\begin{aligned} Q - (\gamma_1 - \gamma_2)I &> \gamma_0(1 + e^{\lambda\tau})I > 0, \\ 0 &< [\lambda_{\min}(Q - (\gamma_1 - \gamma_2)I) - \gamma_0(1 + e^{\lambda\tau})] \|x\|^2. \end{aligned}$$

Từ đó, suy ra

$$\begin{cases} Q - (\gamma_1 - \gamma_2)I > 0, \\ \lambda_{\min}(Q - (\gamma_1 - \gamma_2)I) > \gamma_0(1 + e^{\lambda\tau}). \end{cases} \tag{2.23}$$

Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức (2.22) trên khoảng $[0, t]$ và lưu ý rằng $V(x(t)) \geq 0$, đồng thời sử dụng các bất đẳng thức (2.20) và (2.23), ta thu được

$$\begin{aligned} {}^T I_0^{\alpha,\lambda} \mathfrak{S}(t) &\leq {}^T I_0^{\alpha,\lambda} (\tau e^{-\lambda t} e^{\lambda t} V(x(t))) + {}^T I_0^{\alpha,\lambda} (\tau e^{-\lambda(t-\tau)} e^{\lambda(t-\tau)} V(x_\tau(t))) \\ &\quad + {}^T I_0^{\alpha,\lambda} (\omega^\top(t) [\gamma_1 I - Q - \gamma_2 I] \omega(t)) - {}^T I_0^{\alpha,\lambda} {}^{TC} D_0^{\alpha,\lambda} V(x(t)) \\ &\leq {}^T I_0^{\alpha,\lambda} (\tau e^{-\lambda t} [\lambda_1 \|\varphi\|^2 + \lambda_2]) + {}^T I_0^{\alpha,\lambda} (\tau e^{-\lambda(t-\tau)} [\lambda_1 \|\varphi\|^2 + \lambda_2]) \\ &\quad - {}^T I_0^{\alpha,\lambda} (\omega^\top(t) [Q - \gamma_1 I + \gamma_2 I] \omega(t)) - {}^T I_0^{\alpha,\lambda} {}^{TC} D_0^{\alpha,\lambda} V(x(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\bar{\gamma}_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{\bar{\gamma}_0 e^{\lambda\tau}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&\quad - \frac{\lambda_{\min}(Q - \gamma_1 I + \gamma_2 I) \bar{\omega}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds - V(x(t)) \\
&\quad + e^{-\lambda t} V(x(0)) \\
&\leq [\bar{\gamma}_0(1 + e^{\lambda\tau}) - \lambda_{\min}(Q - \gamma_1 I + \gamma_2 I) \bar{\omega}] \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
&\quad + \lambda_{\max}(P) \|\varphi\|^2.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Với điều kiện ban đầu $\varphi(\cdot) \equiv 0$, kết hợp (2.23) và (2.24), ta suy ra

$${}^T I_0^{\alpha, \lambda} \mathfrak{S}(t) \leq \left(\bar{\gamma}_0(1 + e^{\lambda\tau}) - \lambda_{\min}(Q - \gamma_1 I + \gamma_2 I) \bar{\omega} \right) \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \leq 0.$$

Điều này chứng tỏ rằng điều kiện tiêu hao được thỏa mãn. Do đó, chứng minh của Định lý được hoàn tất. $\square$

Nhận xét 2.1.6. Trong khi Zitane và Torres [88] nghiên cứu tính ổn định trong thời gian hữu hạn cho các lớp hệ cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có trễ bằng cách sử dụng các bất đẳng thức Hölder, Jensen và Grönwall với nhân suy giảm, thì trong mục này, chúng tôi nghiên cứu bài toán tổng quát hơn là bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn vững đối với lớp hệ nơ-ron không chắc chắn phi tuyến cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có nhiều và trễ hằng số. Chúng tôi sử dụng cách tiếp cận kết hợp giữa kỹ thuật “inf-sup”, biến đổi Laplace đối với đạo hàm Caputo với nhân suy giảm và các điều kiện dựa trên LMI nhằm thiết lập các tiêu chuẩn ít bảo thủ và dễ kiểm chứng hơn.

Các kết quả thu được không chỉ đảm bảo tính bị chặn của trạng thái hệ trong thời gian hữu hạn mà còn thiết lập được mối quan hệ năng lượng giữa nhiều đầu vào và đầu ra của hệ thông qua bất đẳng thức tiêu hao của hệ trong một khuôn khổ thống nhất. Do đó, các kết quả của chúng tôi không chỉ được thiết lập cho một lớp hệ tổng quát hơn mà còn đưa ra một hướng tiếp cận hiệu quả hơn trong việc phân tích tính tiêu hao trong thời gian hữu hạn so với các kết quả đã được công bố trước đó.

Trong trường hợp $\lambda = 0$ và với mọi $t \geq 0$, hệ (2.1) trở thành lớp hệ nơ-ron

không chắc chắn cấp phân số Caputo có trễ hằng số sau

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = -[A + E_a F_a(t) H_a]x(t) + [B + E_b F_b(t) H_b]g(x(t)) \\ \quad + [W + E_w F_w(t) H_w]h(x(t-\tau)) + [D + E_d F_d(t) H_d]\omega(t), \\ y(t) = C_1 x(t) + C_2 x(t-\tau) + C_3 g(x(t)) + C_4 h(x(t-\tau)) + C_5 \omega(t), \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2.25)$$

Từ Định lý 2.1.5, ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 2.1.7. Cho các số dương c_1, c_2, T và $\bar{\omega}$ với $c_1 < c_2$. Giả sử tồn tại các số dương $r_a, r_b, r_d, r_w, \gamma, \gamma_1, \gamma_2$, các ma trận $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ đối xứng xác định dương và các ma trận đường chéo xác định dương Λ_g, Λ_h thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ * & \Psi_3 - Q - \gamma I - \gamma_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.26a)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Xi}_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} & \Xi_{15} & PE_a & PE_b & PE_d & PE_w \\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} & \Xi_{24} & \Xi_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Xi_{33} & \Xi_{34} & \Xi_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & \Xi_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -r_a I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -r_b I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -r_d I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -r_w I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.26b)$$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}(P)} (\lambda_1 c_1 + \lambda_2) \leq c_2, \quad (2.26c)$$

$$Q - (\gamma_1 - \gamma_2)I > 2\tilde{\gamma}_0 I. \quad (2.26d)$$

Khi đó, hệ (2.25) là tiêu hao vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega})$,

trong đó

$$K_{1g} = \text{diag} \{k_1^- k_1^+, k_2^- k_2^+, \dots, k_n^- k_n^+\},$$

$$\begin{aligned}
K_{2g} &= \text{diag} \left\{ \frac{k_1^- + k_1^+}{2}, \frac{k_2^- + k_2^+}{2}, \dots, \frac{k_n^- + k_n^+}{2} \right\}, \\
K_{1h} &= \text{diag} \{ t_1^- t_1^+, t_2^- t_2^+, \dots, t_n^- t_n^+ \}, \\
K_{2h} &= \text{diag} \left\{ \frac{t_1^- + t_1^+}{2}, \frac{t_2^- + t_2^+}{2}, \dots, \frac{t_n^- + t_n^+}{2} \right\}, \\
\Lambda_g &= \text{diag} \{ \Lambda_{11}^g, \Lambda_{12}^g, \dots, \Lambda_{1n}^g \}, \quad \Lambda_h = \text{diag} \{ \Lambda_{11}^h, \Lambda_{12}^h, \dots, \Lambda_{1n}^h \}, \\
\xi_1 &= E_\alpha(\tau T^\alpha), \quad \bar{\xi}_2 = E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1, \quad \bar{\xi}_3 = \gamma_1 \bar{\omega} \frac{E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1}{\tau}, \\
\lambda_1 &= \lambda_{\max}(P) \xi_1 \sum_{j=0}^{[T/\tau]+1} \bar{\xi}_2^j, \quad \lambda_2 = \frac{\bar{\xi}_3}{\xi_1 + \bar{\xi}_2 - 1} \left(\xi_1 \sum_{j=0}^{[T/\tau]+1} \bar{\xi}_2^j - 1 \right), \\
\bar{\gamma}_0 &= (\lambda_1 \|\varphi\|^2 + \lambda_2) \tau, \quad \tilde{\gamma}_0 = \frac{\gamma_1 (E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1)}{\xi_1 + \bar{\xi}_2 - 1} \left(\xi_1 \sum_{j=0}^{[T/\tau]+1} \bar{\xi}_2^j - 1 \right), \\
\hat{\Xi}_{11} &= -PA - A^\top P + r_a H_a^\top H_a - K_{1g} \Lambda_g - C_1^\top \Psi_1 C_1 - \tau P, \\
\Xi_{12} &= -C_1^\top \Psi_1 C_2, \quad \Xi_{13} = PB + K_{2g} \Lambda_g - C_1^\top \Psi_1 C_3, \quad \Xi_{14} = PW - C_1^\top \Psi_1 C_4, \\
\Xi_{15} &= -C_1^\top \Psi_2 - C_1^\top \Psi_1 C_5 + PD, \\
\Xi_{22} &= -K_{1h} \Lambda_h - C_2^\top \Psi_1 C_2 - \tau P, \quad \Xi_{23} = -C_2^\top \Psi_1 C_3, \quad \Xi_{24} = K_{2h} \Lambda_h - C_2^\top \Psi_1 C_4, \\
\Xi_{25} &= -C_2^\top \Psi_2 - C_2^\top \Psi_1 C_5, \\
\Xi_{33} &= r_b H_b^\top H_b - \Lambda_g - C_3^\top \Psi_1 C_3, \quad \Xi_{34} = -C_3^\top \Psi_1 C_4, \quad \Xi_{35} = -C_3^\top \Psi_2 - C_3^\top \Psi_1 C_5, \\
\Xi_{44} &= r_w H_w^\top H_w - \Lambda_h - C_4^\top \Psi_1 C_4, \quad \Xi_{45} = -C_4^\top \Psi_2 - C_4^\top \Psi_1 C_5, \\
\Xi_{55} &= r_d H_d^\top H_d - C_5^\top \Psi_2 - \Psi_2^\top C_5 - C_5^\top \Psi_1 C_5 - \Psi_3 + \gamma I - \gamma_1 I + \gamma_2 I + Q.
\end{aligned}$$

Nhận xét 2.1.8. Trong trường hợp $\lambda = 0$, hệ (2.1) trở thành hệ nơ-ron cấp phân số Caputo có trễ hằng số. Đối với lớp hệ này, các công trình nghiên cứu trước đây [9, 10, 17–19, 56, 64, 72, 78, 79] chủ yếu tập trung vào bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn, nhưng chưa xem xét bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn, mà ở đó mối quan hệ năng lượng giữa tín hiệu nhiều đầu vào và đầu ra của hệ được đặc trưng bởi một bất đẳng thức tiêu hao.

Bên cạnh đó, các công trình [30, 53] đã nghiên cứu tính tiêu hao cho các hệ nơ-ron cấp phân số Caputo. Tuy nhiên, các kết quả này được thiết lập theo nghĩa Lyapunov cổ điển, tức là chỉ xét tính tiêu hao trên khoảng thời gian vô

hạn mà chưa xem xét tính tiêu hao trong thời gian hữu hạn.

Khác với các công trình nêu trên, kết quả trong mục này của luận án thiết lập các điều kiện đảm bảo tính tiêu hao trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có trễ hằng số. Các điều kiện này không chỉ đảm bảo trạng thái của hệ bị chặn trong thời gian hữu hạn mà còn mô tả mối quan hệ năng lượng giữa nhiều đầu vào và đầu ra của hệ thông qua bất đẳng thức tiêu hao. Vì vậy, ngay cả trong trường hợp đặc biệt $\lambda = 0$, các kết quả thu được của chúng tôi tạo ra một bước tiến đáng kể so với các kết quả đã được nghiên cứu trước đó.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một ví dụ số nhằm minh họa cho các kết quả lý thuyết đã thu được.

Ví dụ 2.1.9. Với mọi $t \geq 0$, xét lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có trễ hằng số

$$\begin{cases} {}^{TC}D_0^{0.1,0.1}x(t) = -[A| + E_a F_a(t) H_a]x(t) + [B + E_b F_b(t) H_b]g(x(t)) \\ \quad + [W + E_w F_w(t) H_w]h(x(t - 0.1)) \\ \quad + [D + E_d F_d(t) H_d]\omega(t), \\ y(t) = C_1 x(t) + C_2 x(t - 0.1) + C_3 g(x(t)) + C_4 h(x(t - 0.1)) + C_5 \omega(t), \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-0.1, 0], \end{cases} \quad (2.27)$$

trong đó $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$, $y(t) \in \mathbb{R}$ và $\omega(t) \in \mathbb{R}$. Các ma trận của hệ được cho bởi

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad E_a = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad H_a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad F_1(t) = \sin t, \\ B &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad E_b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad H_b = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad F_2(t) = \cos t, \\ D &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad E_d = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad H_d = \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix}, \quad F_3(t) = \sin t, \end{aligned}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad E_w = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad H_w = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad F_4(t) = \cos t,$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, C_4 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, C_5 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}.$$

Các hàm kích hoạt được cho bởi

$$g(x(t)) = (\tanh x_1(t), \tanh x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2,$$

$$h(x(t - 0.1)) = (\tanh x_1(t - 0.1), \tanh x_2(t - 0.1))^T \in \mathbb{R}^2$$

và thỏa mãn Giả thiết 2.1.1 với

$$K_{1g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K_{2g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, K_{1h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K_{2h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Chọn $c_1 = 0.2$, $c_2 = 2$, $T = 5$ và nhiễu $\omega(t) = \sqrt{0.1} \sin t$ thỏa mãn Giả thiết 2.1.2 với $\bar{\omega} = 0.1$. Các ma trận Ψ_i ($i = 1, 2, 3$) được chọn

$$\Psi_1 = [-0.2], \quad \Psi_2 = [0.1], \quad \Psi_3 = [13].$$

Bằng cách sử dụng hộp công cụ **LMI Control Toolbox** trong **MATLAB** [21], ta kiểm chứng được các dữ liệu nêu trên thỏa mãn tất cả các điều kiện của Định lý 2.1.5 với các giá trị

$$r_a = 4.7217, \quad r_b = 3.6513, \quad r_d = 4.4094, \quad r_w = 4.6454,$$

$$\gamma = 5.0986, \quad \gamma_1 = 6.5459, \quad \gamma_2 = 5.0986,$$

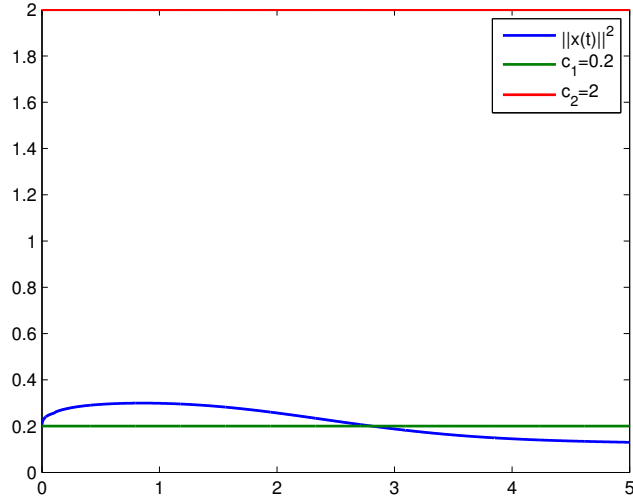
và các ma trận tương ứng là

$$P = \begin{bmatrix} 1.8791 & -0.2389 \\ -0.2389 & 1.5003 \end{bmatrix}, \quad Q = [5.0986],$$

$$\Lambda_h = \begin{bmatrix} 4.6063 & 0 \\ 0 & 4.6156 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_g = \begin{bmatrix} 3.9910 & 0 \\ 0 & 5.2308 \end{bmatrix}.$$

Theo Định lý 2.1.5, hệ được xét là tiêu hao vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(0.2, 2, 5, 0.1)$.

Kết quả mô phỏng: Với điều kiện ban đầu $x_0 = (0.4, 0.19)^T \in \mathbb{R}^2$. Hình 2.1 cho thấy quỹ đạo của $\|x(t)\|^2$ luôn bị chặn trên bởi đường $c_2 = 2$ trong khoảng thời gian $[0, 5]$.

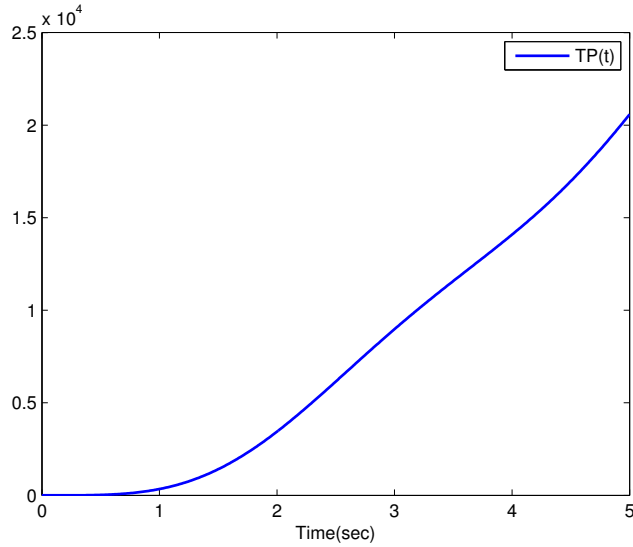


Hình 2.1: Quỹ đạo của $\|x(t)\|^2$ trong Ví dụ 2.1.9.

Để đánh giá hiệu suất tiêu hao với điều kiện ban đầu bằng không, ta định nghĩa hàm hiệu suất $TP(t)$, $t \in [0, 5]$ như sau

$$TP(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}(t-s)^{\alpha-1} \widehat{J}(s) ds - \gamma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}(t-s)^{\alpha-1} \omega^\top(s) \omega(s) ds.$$

Hình 2.2 cho thấy rằng $TP(t)$ luôn dương trên toàn bộ khoảng thời gian xem xét, qua đó xác nhận điều kiện (ii) trong Định nghĩa 2.1.4.



Hình 2.2: Quỹ đạo của hàm hiệu suất $TP(t)$ trong Ví dụ 2.1.9.

2.2 Bài toán tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo có nhiễu

Trong những năm gần đây, khái niệm *tiêu hao mở rộng* đã thu hút được nhiều sự quan tâm trong lý thuyết điều khiển và hệ động lực. Khái niệm này được B. Zhang và các cộng sự [83] đề xuất vào năm 2013 nhằm xây dựng một khuôn khổ thống nhất cho việc khảo sát các tính chất hiệu suất của hệ, bao gồm tính chất H_∞ , L_2-L_∞ và tính thụ động. Tiếp đó, H. Gao cùng các cộng sự [22] đã mở rộng khái niệm này cho trường hợp thời gian hữu hạn, qua đó cho phép xem xét đồng thời các tính chất H_∞ , L_2-L_∞ , tính thụ động và (R, T, S) -*tiêu hao* trong một khuôn khổ thống nhất.

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu bài toán tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn đối với lớp hệ nơ-ron không chắc chắn phi tuyến cấp phân số Caputo có nhiễu như sau

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [W + \Delta W(t)]g(x(t)) \\ \quad + [D + \Delta D(t)]\omega(t), \quad t \geq 0, \\ y(t) = C_1 x(t) + C_2 g(x(t)), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right. \quad (2.28)$$

trong đó $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ đầu ra, $\omega(\cdot) \in L_2([0, +\infty), \mathbb{R}^q)$ là nhiễu đầu vào và

$$g(x(t)) = (g_1(x_1(t)), \dots, g_n(x_n(t)))^T$$

là các hàm kích hoạt phi tuyến. Ma trận $A = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$ là ma trận đường chéo xác định dương, các ma trận W, D, C_1, C_2 là các ma trận thực đã biết với kích thước phù hợp.

Để phân tích tính tiêu hao của hệ, chúng tôi sử dụng các giả thiết sau.

Giả thiết 2.2.1. Các ma trận tham số $\Delta A(t)$, $\Delta D(t)$ và $\Delta W(t)$ xác định bởi

$$\Delta A(t) = E_1 F_1(t) H_1, \quad \Delta W(t) = E_2 F_2(t) H_2, \quad \Delta D(t) = E_3 F_3(t) H_3,$$

trong đó $E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3$ là các ma trận thực đã biết có kích thước phù hợp, còn $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$ là các ma trận chưa biết biến thiên theo thời gian, thỏa mãn

$$F_i^\top(t)F_i(t) \leq I, \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Giả thiết 2.2.2. Các hàm kích hoạt phi tuyến $g_i(t) (i = 1, 2, \dots, n)$ là liên tục và bị chặn với $g_i(0) = 0$, thỏa mãn

$$k_i^- \leq \frac{g_i(u) - g_i(v)}{u - v} \leq k_i^+, \quad (2.29)$$

trong đó k_i^-, k_i^+ là các số thực đã biết, $u, v \in \mathbb{R}, u \neq v$.

Khi không có véc tơ đầu ra $y(t)$, hệ (2.28) trở thành

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [W + \Delta W(t)]g(x(t)) \\ \quad + [D + \Delta D(t)]\omega(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.30)$$

Định nghĩa 2.2.3. Cho ma trận $R \in \mathbb{S}_n^+$ và các số dương $c_1, c_2, \bar{\omega}, T (c_1 < c_2)$. Hệ (2.30) được gọi là bị chặn vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega}, R)$ nếu điều kiện sau được thỏa mãn

$$x_0^\top R x_0 \leq c_1 \Rightarrow x^\top(t) R x(t) < c_2, \quad \forall t \in [0, T],$$

với mọi nhiễu đầu vào $\omega(t)$ thỏa mãn Giả thiết 2.1.2.

Định nghĩa 2.2.4. Giả sử các Giả thiết 2.1.2, 2.2.1, 2.2.2 được thỏa mãn. Hệ (2.28) được gọi là tiêu hao mở rộng vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega}, R)$, nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn

(i) Hệ (2.30) là bị chặn vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega}, R)$.

(ii) Với điều kiện ban đầu bằng không, bất đẳng thức sau đây được thỏa mãn

$${}_0 I_t^\alpha \hat{J}(t) - y^\top(t) \Psi_4 y(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.31)$$

trong đó

$$\hat{J}(t) = y^\top(t)\Psi_1 y(t) + 2y^\top(t)\Psi_2 \omega(t) + \omega^\top(t)\Psi_3 \omega(t),$$

với Ψ_1, Ψ_3, Ψ_4 là các ma trận thực đối xứng, có số chiều thích hợp thỏa mãn $\Psi_1 \leq 0, \Psi_3 \geq 0, \Psi_4 \geq 0$ và Ψ_2 là một ma trận thực có số chiều thích hợp.

Nhận xét 2.2.5. Định nghĩa 2.2.4 bao hàm nhiều chỉ số hiệu suất quan trọng như các trường hợp riêng thông qua việc lựa chọn thích hợp các ma trận Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 và Ψ_4 .

(i) Nếu chọn $\Psi_1 = -\rho I, \Psi_2 = \frac{1}{2}I, \Psi_3 = 0, \Psi_4 = 0$, với $\rho > 0$, thì ta nhận được

$${}_0I_t^\alpha (y^\top(t)\omega(t) - \rho y^\top(t)y(t)) \geq 0,$$

tương ứng với tính thụ động trong thời gian hữu hạn cho hệ cấp phân số.

(ii) Nếu chọn $\Psi_1 = -I, \Psi_2 = 0, \Psi_3 = \gamma^2 I, \Psi_4 = 0$, thì điều kiện (2.31) trở thành

$${}_0I_t^\alpha (\gamma^2 \omega^\top(t)\omega(t) - y^\top(t)y(t)) \geq 0,$$

đây chính là hiệu suất H_∞ trong thời gian hữu hạn cho hệ cấp phân số.

(iii) Nếu chọn $\Psi_1 = Q, \Psi_2 = S, \Psi_3 = R, \Psi_4 = 0$, thì Định nghĩa 2.2.4 suy biến về tính tiêu hao (Q, S, R) trong thời gian hữu hạn cho hệ cấp phân số.

Do đó, Định nghĩa 2.2.4 cung cấp một khuôn khổ tổng quát và thống nhất để khảo sát nhiều chỉ số hiệu suất khác nhau cho các hệ cấp phân số.

Đối với hệ (2.28), chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ đảm bảo tính tiêu hao mở rộng vững trong thời gian hữu hạn như sau.

Định lý 2.2.6. Cho các số dương $c_1, c_2, \bar{\omega}, T$ với $c_1 < c_2$ và ma trận $R \in \mathbb{S}_n^+$. Giả sử các giả thiết 2.1.2, 2.2.1, 2.2.2 được thỏa mãn. Hệ (2.28) là tiêu hao mở rộng vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, R, \bar{\omega})$, nếu tồn tại ba số dương $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, hai ma trận $Q, X \in \mathbb{S}_n^+$, và ma trận đường chéo xác

định dương $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & QE_1 & QE_2 & QE_3 \\ * & \Omega_{22} & -C_2^\top \Psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Omega_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon_3 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.32a)$$

$$\lambda_2 c_1 + \frac{\lambda_{\max}(\Psi_3) \bar{\omega}}{\Gamma(\alpha + 1)} T^\alpha < \lambda_1 c_2, \quad (2.32b)$$

$$\begin{bmatrix} C_1^\top \Psi_4 C_1 & C_1^\top \Psi_4 C_2 \\ * & C_2^\top \Psi_4 C_2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2.32c)$$

$$X + K^2 < Q, \quad (2.32d)$$

trong đó

$$\begin{aligned} K &= \text{diag} \{k_1^+, k_2^+, \dots, k_n^+\}, \quad K_1 = \text{diag} \{k_1^- k_1^+, k_2^- k_2^+, \dots, k_n^- k_n^+\}, \\ K_2 &= \text{diag} \left\{ \frac{k_1^- + k_1^+}{2}, \frac{k_2^- + k_2^+}{2}, \dots, \frac{k_n^- + k_n^+}{2} \right\}, \\ \bar{Q} &= R^{-\frac{1}{2}} Q R^{-\frac{1}{2}}, \quad \lambda_1 = \lambda_{\min}(\bar{Q}), \quad \lambda_2 = \lambda_{\max}(\bar{Q}), \\ \Omega_{11} &= -QA - A^\top Q + \epsilon_1 h_1^\top h_1 - C_1^\top \Psi_1 C_1 - K_1 \Lambda, \\ \Omega_{22} &= \epsilon_2 H_2^\top H_2 - C_2^\top \Psi_1 C_2 - \Lambda, \\ \Omega_{33} &= \epsilon_3 H_3^\top H_3 - \Psi_3, \quad \Omega_{12} = QW - C_1^\top \Psi_1 C_2 + K_2 \Lambda, \quad \Omega_{13} = QD - C_1^\top \Psi_2. \end{aligned}$$

Chứng minh. Xét hàm Lyapunov cho hệ (2.28) dưới dạng như sau

$$V(x(t)) = x^\top(t) Q x(t).$$

Sử dụng Bổ đề 1.6.3, ta đánh giá đạo hàm Caputo cấp α của $V(x(t))$ như sau

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) &\leq 2x^\top(t) Q {}_0^C D_t^\alpha x(t) \\ &= x^\top(t) [-QA - A^\top Q] x(t) - 2x^\top(t) QE_1 F_1(t) H_1 x(t) \\ &\quad + 2x^\top(t) QW g(x(t)) + 2x^\top(t) QE_2 F_2(t) H_2 g(x(t)) \\ &\quad + 2x^\top(t) QD \omega(t) + 2x^\top(t) QE_3 F_3(t) H_3 \omega(t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Áp dụng bất đẳng thức ma trận Cauchy, kết hợp với Giả thiết 2.2.1 ta thu được các ước lượng sau

$$\begin{aligned}
-2x^\top(t)QE_1F_1(t)H_1x(t) &\leq \epsilon_1^{-1}x^\top(t)QE_1E_1^\top Qx(t) \\
&\quad + \epsilon_1x^\top(t)H_1^\top H_1x(t), \\
2x^\top(t)QE_2F_2(t)H_2g(x(t)) &\leq \epsilon_2^{-1}x^\top(t)QE_2E_2^\top Qx(t) \\
&\quad + \epsilon_2g^\top(x(t))H_2^\top H_2g(x(t)), \\
2x^\top(t)QE_3F_3(t)H_3\omega(t) &\leq \epsilon_3^{-1}x^\top(t)QE_3E_3^\top Qx(t) \\
&\quad + \epsilon_3\omega^\top(t)H_3^\top H_3\omega(t).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Cộng các bất đẳng thức trong (2.34) vào (2.33), ta thu được

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) &\leq x^\top(t) \left[-QA - A^\top Q + \epsilon_1^{-1}QE_1E_1^\top Q + \epsilon_1H_1^\top H_1 \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_2^{-1}QE_2E_2^\top Q + \epsilon_3^{-1}QE_3E_3^\top Q \right] x(t) \\
&\quad + \epsilon_3\omega^\top(t)H_3^\top H_3\omega(t) + \epsilon_2g^\top(x(t))H_2^\top H_2g(x(t)) \\
&\quad + 2x^\top(t)QWg(x(t)) + 2x^\top(t)QD\omega(t).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
\hat{J}(t) &= y^\top(t)\Psi_1y(t) + 2y^\top(t)\Psi_2\omega(t) + \omega^\top(t)\Psi_3\omega(t) \\
&= x^\top(t)C_1^\top\Psi_1C_1x(t) + 2x^\top(t)C_1^\top\Psi_1C_2g(x(t)) \\
&\quad + g^\top(x(t))C_2^\top\Psi_1C_2g(x(t)) \\
&\quad + 2x^\top(t)C_1^\top\Psi_2\omega(t) + 2g^\top(x(t))C_2^\top\Psi_2\omega(t) \\
&\quad + \omega^\top(t)\Psi_3\omega(t).
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Kết hợp (2.35) và (2.36), ta thu được

$$\begin{aligned}
&{}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) - \hat{J}(t) \\
&\leq x^\top(t) \left[-QA - A^\top Q + \epsilon_1^{-1}QE_1E_1^\top Q + \epsilon_1H_1^\top H_1 \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_2^{-1}QE_2E_2^\top Q + \epsilon_3^{-1}QE_3E_3^\top Q - C_1^\top\Psi_1C_1 \right] x(t) \\
&\quad + \omega^\top(t) [\epsilon_3H_3^\top H_3 - \Psi_3] \omega(t) \\
&\quad + g^\top(x(t)) [\epsilon_2H_2^\top H_2 - C_2^\top\Psi_1C_2] g(x(t)) \\
&\quad + 2x^\top(t) [QW - C_1^\top\Psi_1C_2] g(x(t)) + 2x^\top(t) [QD - C_1^\top\Psi_2] \omega(t) \\
&\quad - 2g^\top(x(t))C_2^\top\Psi_2\omega(t).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Mặt khác, từ Giả thiết 2.2.2 cho ta

$$k_i^- x_i(t) \leq g_i(x_i(t)) \leq k_i^+ x_i(t).$$

Do đó, với mọi $\Lambda_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, ta suy ra

$$[g_i(x_i(t)) - k_i^- x_i(t)] \Lambda_{ii} [k_i^+ x_i(t) - g_i(x_i(t))] \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$g_i(x_i(t)) \Lambda_{ii} (k_i^- + k_i^+) x_i(t) - x_i(t) \Lambda_{ii} k_i^- k_i^+ - g_i(x_i(t)) \Lambda_{ii} g_i(x_i(t)) \geq 0.$$

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x^\top(t) & g^\top(x(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_1 \Lambda & K_2 \Lambda \\ \Lambda K_2^\top & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ g(x(t)) \end{bmatrix} \\ &= -x^\top(t) K_1 \Lambda x(t) + 2x^\top(t) K_2 \Lambda g(x(t)) - g^\top(x(t)) \Lambda g(x(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n [g_i(x_i(t)) \Lambda_{ii} \bar{k}_i x_i(t) - x_i(t) \Lambda_{ii} k_i^- k_i^+ - g_i(x_i(t)) \Lambda_{ii} g_i(x_i(t))] \geq 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

trong đó $\Lambda = \text{diag}\{\Lambda_{11}, \Lambda_{22}, \dots, \Lambda_{nn}\}$ và $\bar{k}_i = k_i^- + k_i^+$.

Kết hợp (2.37) và (2.38), ta có

$$\begin{aligned} & {}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) - \hat{J}(t) \\ & \leq x^\top(t) \left[-QA - A^\top Q + \epsilon_1^{-1} Q E_1 E_1^\top Q + \epsilon_1 H_1^\top H_1 \right. \\ & \quad \left. + \epsilon_2^{-1} Q E_2 E_2^\top Q + \epsilon_3^{-1} Q E_3 E_3^\top Q - C_1^\top \Psi_1 C_1 - K_1 \Lambda \right] x(t) \\ & \quad + \omega^\top(t) [\epsilon_3 H_3^\top H_3 - \Psi_3] \omega(t) \\ & \quad + g^\top(x(t)) [\epsilon_2 H_2^\top H_2 - C_2^\top \Psi_1 C_2 - \Lambda] g(x(t)) \\ & \quad + 2x^\top(t) [QW - C_1^\top \Psi_1 C_2 + K_2 \Lambda] g(x(t)) + 2x^\top(t) [QD - C_1^\top \Psi_2] \omega(t) \\ & \quad - 2g^\top(x(t)) C_2^\top \Psi_2 \omega(t). \end{aligned}$$

Hay, ta có

$${}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) - \hat{J}(t) \leq \eta^\top(t) \Xi \eta(t), \quad (2.39)$$

trong đó

$$\begin{aligned}\eta^\top(t) &= \begin{bmatrix} x^\top(t) & g^\top(x(t)) & \omega^\top(t) \end{bmatrix}, \\ \Xi &= \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} \\ * & \Xi_{22} & -C_2^\top \Psi_2 \\ * & * & \Xi_{33} \end{bmatrix}, \\ \Xi_{11} &= -QA - A^\top Q + \epsilon_1^{-1}QE_1E_1^\top Q + \epsilon_1 H_1^\top H_1 + \epsilon_2^{-1}QE_2E_2^\top Q \\ &\quad + \epsilon_3^{-1}QE_3E_3^\top Q - C_1^\top \Psi_1 C_1 - K_1 \Lambda, \\ \Xi_{22} &= \epsilon_2 H_2^\top H_2 - C_2^\top \Psi_1 C_2 - \Lambda, \\ \Xi_{33} &= \epsilon_3 H_3^\top H_3 - \Psi_3, \\ \Xi_{12} &= QW - C_1^\top \Psi_1 C_2 + K_2 \Lambda, \quad \Xi_{13} = QD - C_1^\top \Psi_2.\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề Schur, điều kiện $\Xi < 0$ là tương đương với (2.32a). Do đó, kết hợp với (2.39), ta suy ra được bất đẳng thức

$${}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) \leq \hat{J}(t), \forall t \geq 0. \quad (2.40)$$

Tiếp theo, chúng tôi chia quá trình chứng minh thành hai bước:

Bước 1. Ta sẽ chứng minh rằng hệ đóng (2.30) là bị chặn vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \bar{\omega}, R)$.

Trong trường hợp hệ (2.30) không có véc tơ đầu ra $y(t)$, ta có

$$\hat{J}(t) = \omega^\top(t) \Psi_3 \omega(t).$$

Khi đó, bất đẳng thức (2.40) được rút gọn thành

$${}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) \leq \omega^\top(t) \Psi_3 \omega(t) \leq \lambda_{\max}(\Psi_3) \omega^\top(t) \omega(t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.41)$$

Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức (2.41) từ 0 đến t với $0 \leq t \leq T$, ta thu được ước lượng sau

$$\begin{aligned}x^\top(t) Q x(t) &\leq x(0) Q x(0) + \frac{\lambda_{\max}(\Psi_3)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \omega^\top(s) \omega(s) ds \\ &\leq x_0^\top Q x_0 + \frac{\bar{\omega} \lambda_{\max}(\Psi_3)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq x_0^\top Q x_0 + \frac{\bar{\omega} \lambda_{\max}(\Psi_3)}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha.\end{aligned} \quad (2.42)$$

Mặt khác, với

$$x^\top(t)Qx(t) = x^\top(t)R^{\frac{1}{2}}\overline{Q}R^{\frac{1}{2}}x(t) \geq \lambda_{\min}(\overline{Q})x^\top(t)Rx(t) = \lambda_1x^\top(t)Rx(t), \quad (2.43)$$

$$x_0^\top Qx_0 = x_0^\top R^{\frac{1}{2}}\overline{Q}R^{\frac{1}{2}}x_0 \leq \lambda_{\max}(\overline{Q})x_0^\top Rx_0 = \lambda_2x_0^\top Rx_0 \leq \lambda_2c_1. \quad (2.44)$$

Từ các bất đẳng thức (2.42), (2.43) và (2.44), ta suy ra

$$\lambda_1x^\top(t)Rx(t) \leq V(x(t)) = x^\top(t)Qx(t) \leq \lambda_2c_1 + \frac{\overline{\omega}\lambda_{\max}(\Psi_3)}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha. \quad (2.45)$$

Kết hợp với điều kiện (2.32b), từ (2.45) suy ra rằng nếu điều kiện ban đầu thỏa mãn

$$x_0^\top Rx_0 \leq c_1 \Rightarrow x^\top(t)Rx(t) < c_2.$$

Do đó, hệ (2.30) là bị chặn vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, \overline{\omega}, R)$.

Bước 2. Chứng minh tính tiêu hao mở rộng vững của hệ(2.28).

Xét điều kiện đầu bằng không, tức là $x(0) = 0$. Khi đó, $V(0) = 0$. Áp dụng toán tử ${}_0I_t^\alpha$ vào hai vế của (2.40), ta thu được

$${}_0I_t^\alpha ({}_0^CD_t^\alpha V(x(t))) \leq {}_0I_t^\alpha \hat{J}(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.46)$$

Theo Bổ đề 1.1.14, ta có

$${}_0I_t^\alpha ({}_0^CD_t^\alpha V(x(t))) = V(x(t)) - V(x(0)).$$

Do đó, từ điều kiện $V(x(0)) = 0$ và bất đẳng thức (2.46), ta suy ra

$$V(x(t)) \leq {}_0I_t^\alpha \hat{J}(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.47)$$

trong đó

$${}_0I_t^\alpha \hat{J}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \hat{J}(s) ds.$$

Mặt khác, từ (2.32c), ta có

$$\begin{aligned} y^\top(t)\Psi_4y(t) &= \begin{bmatrix} x^\top(t) & g^\top(x(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^\top \Psi_4 C_1 & C_1^\top \Psi_4 C_2 \\ * & C_2^\top \Psi_4 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ g(x(t)) \end{bmatrix} \\ &< \begin{bmatrix} x^\top(t) & g^\top(x(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ g(x(t)) \end{bmatrix} \\ &= x^\top(t)Xx(t) + g^\top(x(t))g(x(t)). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Từ Giả thiết 2.2.2, ta có

$$g^\top(x(t))g(x(t)) \leq x^\top(t)K^2x(t).$$

Từ đó, suy ra

$$y^\top(t)\Psi_4y(t) < x^\top(t)(X + K^2)x(t). \quad (2.49)$$

Kết hợp với (2.32d), ta có

$$y^\top(t)\Psi_4y(t) < x^\top(t)Qx(t) = V(x(t)). \quad (2.50)$$

Từ (2.47) và (2.50), ta suy ra

$$y^\top(t)\Psi_4y(t) < {}_0I_t^\alpha \hat{J}(t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.51)$$

Kết hợp Bước 1 và Bước 2, ta kết luận rằng hệ (2.28) là tiêu hao mở rộng vững trong thời gian hữu hạn đối với $(c_1, c_2, T, \bar{\omega}, R)$. Định lý được chứng minh. $\square$

Nhận xét 2.2.7. Trong lĩnh vực hệ nơ-ron cấp phân số, bài toán phân tích tiêu hao đã được nghiên cứu trong [59]. Công trình này xem xét bài toán dưới góc độ ổn định tiệm cận theo nghĩa Lyapunov, trong đó tập trung vào quỹ đạo của véc tơ trạng thái khi thời gian tiến tới vô cùng. Trong khi đó, tính bị chặn trong thời gian hữu hạn liên quan đến việc ràng buộc quỹ đạo trạng thái trong một khoảng thời gian hữu hạn xác định. Nghiên cứu này của chúng tôi là công trình đầu tiên nghiên cứu bài toán phân tích tiêu hao cho lớp hệ nơ-ron cấp phân số theo nghĩa bị chặn trong thời gian hữu hạn.

Bằng cách chọn các ma trận $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = I$, $\Psi_3 = \gamma I$ và $\Psi_4 = 0$, trong đó γ là một hằng số dương, từ Định lý 2.2.6 ta suy ra các tiêu chí thụ động cho hệ (2.28) như sau.

Hệ quả 2.2.8. Cho các số dương $c_1, c_2, \bar{\omega}, T$ với $c_1 < c_2$ và một ma trận $R \in \mathbb{S}_n^+$. Giả sử các giả thiết 2.1.2, 2.2.1 và 2.2.2 được thoả mãn. Hệ (2.28) là thụ động vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, R, \bar{\omega})$ nếu tồn tại các số dương $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \gamma$, hai ma trận $Q, X \in \mathbb{S}_n^+$ và một ma trận đường chéo xác

định dương $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} & \mathcal{M}_{13} & QE_1 & QE_2 & QE_3 \\ * & \mathcal{M}_{22} & -C_2^\top & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \mathcal{M}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon_3 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.52a)$$

$$\lambda_2 c_1 + \frac{\gamma \bar{\omega}}{\Gamma(\alpha + 1)} T^\alpha < \lambda_1 c_2, \quad (2.52b)$$

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (2.52c)$$

$$X + K^2 < Q, \quad (2.52d)$$

trong đó

$$K = \text{diag}\{k_1^+, k_2^+, \dots, k_n^+\}, \quad K_1 = \text{diag}\{k_1^- k_1^+, k_2^- k_2^+, \dots, k_n^- k_n^+\},$$

$$K_2 = \text{diag}\left\{\frac{k_1^- + k_1^+}{2}, \frac{k_2^- + k_2^+}{2}, \dots, \frac{k_n^- + k_n^+}{2}\right\},$$

$$\bar{Q} = R^{-1/2} Q R^{-1/2}, \quad \lambda_1 = \lambda_{\min}(\bar{Q}), \quad \lambda_2 = \lambda_{\max}(\bar{Q}),$$

$$\mathcal{M}_{11} = -QA - A^\top Q + \epsilon_1 H_1^\top H_1 - K_1 \Lambda,$$

$$\mathcal{M}_{22} = \epsilon_2 H_2^\top H_2 - \Lambda, \quad \mathcal{M}_{33} = \epsilon_3 H_3^\top H_3 - \gamma I,$$

$$\mathcal{M}_{12} = QW + K_2 \Lambda, \quad \mathcal{M}_{13} = QD - C_1^\top.$$

Tiếp theo, ta xét một trường hợp đặc biệt của hệ (2.28) khi các thành phần bất định bị triệt tiêu, tức là

$$\Delta A(t) = 0, \Delta W(t) = 0 \text{ và } \Delta D(t) = 0.$$

Khi đó, hệ (2.28) suy biến về mạng nơ-ron dưới đây

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = -Ax(t) + Wg(x(t)) + D\omega(t), \quad t \geq 0, \\ y(t) = C_1 x(t) + C_2 g(x(t)), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.53)$$

Từ Định lý 2.2.6, ta thu được hệ quả về tính tiêu hao như sau.

Hệ quả 2.2.9. Cho các số dương $c_1, c_2, \bar{\omega}, T$ với $c_1 < c_2$ và một ma trận $R \in \mathbb{S}_n^+$. Giả sử các giả thiết 2.2.2–2.1.2 được thoả mãn. Hệ (2.53) là tiêu hao vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, R, \bar{\omega})$, nếu tồn tại hai ma trận $Q, X \in \mathbb{S}_n^+$ và một ma trận đường chéo xác định dương $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sao cho các điều kiện sau được thoả mãn

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & QD - C_1^\top \Psi_2 \\ * & -C_2^\top \Psi_1 C_2 - \Lambda & -C_2^\top \Psi_2 \\ * & * & -\Psi_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.54a)$$

$$\lambda_2 c_1 + \frac{\lambda_{\max}(\Psi_3) \bar{\omega}}{\Gamma(\alpha + 1)} T^\alpha < \lambda_1 c_2, \quad (2.54b)$$

$$\begin{bmatrix} C_1^\top \Psi_4 C_1 & C_1^\top \Psi_4 C_2 \\ * & C_2^\top \Psi_4 C_2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2.54c)$$

$$X + K^2 < Q, \quad (2.54d)$$

trong đó

$$\Phi_{11} = -QA - A^\top Q - C_1^\top \Psi_1 C_1 - K_1 \Lambda, \quad \Phi_{12} = QW - C_1^\top \Psi_1 C_2 + K_2 \Lambda.$$

Để so sánh với các kết quả đã có trước đó, ta xét trường hợp đặc biệt sau, trong đó hệ đang xét trở thành một hệ cấp phân số tuyến tính sau

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + D\omega(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.55)$$

trong đó $\alpha \in (0, 1)$ là cấp phân số của hệ, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ là véc tơ nhiễu đầu vào thoả mãn Giả thiết 2.1.2, và $x_0 \in \mathbb{R}^n$ là điều kiện ban đầu. Các ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ và $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$ là các ma trận thực đã biết.

Từ Hệ quả 2.2.9, ta thu được kết quả cho tính bị chặn trong thời gian hữu hạn như sau.

Hệ quả 2.2.10. Cho các số dương $c_1, c_2, \bar{\omega}, T$ với $c_1 < c_2$ và một ma trận $R \in \mathbb{S}_n^+$. Giả sử giả thiết 2.1.2 được thoả mãn. Hệ (2.55) là bị chặn trong thời

gian hữu hạn đối với bộ tham số $(c_1, c_2, T, R, \bar{\omega})$, nếu tồn tại hai ma trận đối xứng xác định dương Q, P sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} QA + A^\top Q & QD \\ D^\top Q & -P \end{bmatrix} < 0, \quad (2.56a)$$

$$\lambda_2 c_1 + \frac{\lambda_{\max}(P) \bar{\omega}}{\Gamma(\alpha + 1)} T^\alpha < \lambda_1 c_2, \quad (2.56b)$$

trong đó

$$\lambda_1 = \lambda_{\min}(\bar{Q}), \lambda_2 = \lambda_{\max}(\bar{Q}), \bar{Q} = R^{-\frac{1}{2}} Q R^{-\frac{1}{2}}.$$

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một ví dụ số nhằm minh họa cho các kết quả lý thuyết đã thu được.

Ví dụ 2.2.11. Xét hệ nơ-ron cấp phân số (2.28) với

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t))^\top \in \mathbb{R}^2,$$

cấp phân số $\alpha = 0.5$ và các tham số sau

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}, F_1(t) = \sin t, \\ W &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}, F_2(t) = \cos t, \\ D &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} 0.1 \end{bmatrix}, F_3(t) = \cos t, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Hàm kích hoạt được chọn

$$g(x(t)) = (\tanh x_1(t), \tanh x_2(t))^\top \in \mathbb{R}^2,$$

thỏa mãn Giả thiết 2.2.2 với

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Chọn $c_1 = 1$, $c_2 = 4.9$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $T = 10$, và véc tơ nhiễu $\omega(t) = \sin t$.

Dễ thấy rằng Giả thiết 2.1.2 được thỏa mãn với $\bar{\omega} = 1$ và các ma trận Ψ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) được chọn như sau

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_3 = [10], \quad \Psi_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

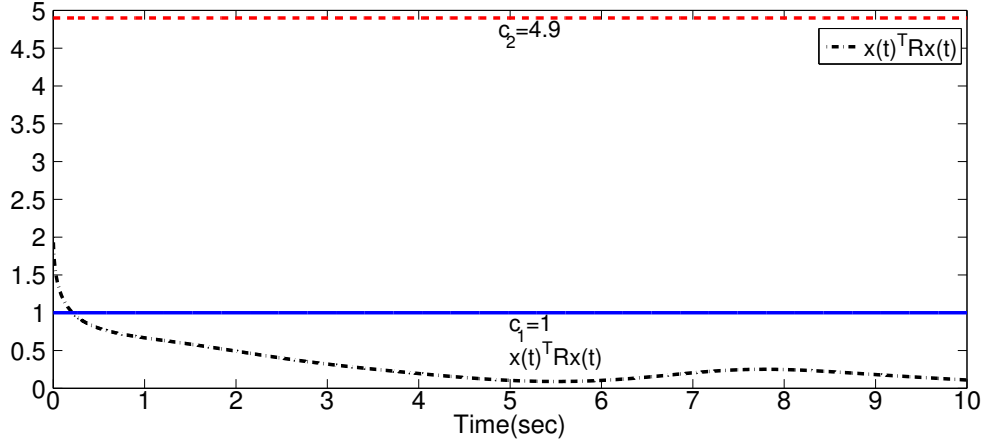
Bằng cách sử dụng Hộp công cụ Điều khiển LMI trong MATLAB [21], ta thấy rằng các điều kiện trong Định lý 2.2.6 được thỏa mãn với

$$\epsilon_1 = 5.3550, \quad \epsilon_2 = 4.9576, \quad \epsilon_3 = 21.9482,$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10.9993 & -0.3774 \\ -0.3774 & 9.6456 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 6.1501 & -0.0119 \\ -0.0119 & 5.6736 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 23.1580 & 0 \\ 0 & 21.3563 \end{bmatrix}.$$

Do đó, theo Định lý 2.2.6, hệ được xét là bị chặn vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(1, 4.9, 10, I, 1)$.

Với điều kiện ban đầu được chọn là $x_0 = (0.7, 0.7)^\top \in \mathbb{R}^2$. Hình 2.3 thể hiện quỹ đạo của $x^\top(t)Rx(t)$ của hệ đang xét là bị chặn vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(1, 4.9, 10, I, 1)$.

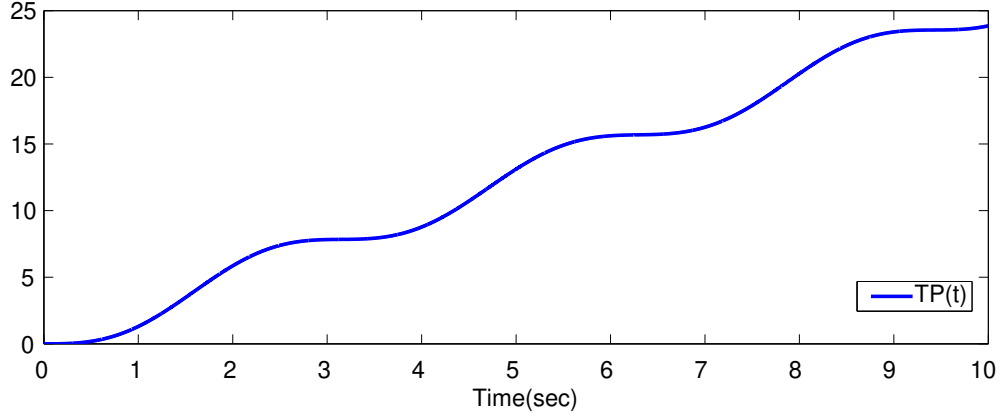


Hình 2.3: Quỹ đạo của $x^\top(t)Rx(t)$ trong Ví dụ 2.2.11

Để kiểm tra hiệu suất tiêu hao trong thời gian hữu hạn, chúng tôi định nghĩa hàm hiệu suất tiêu hao như sau

$$TP(t) := {}_0I_t^\alpha \hat{J}(t) - y^\top(t)\Psi_4 y(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad t \in [0, 10].$$

Hình 2.4 cho thấy rằng hàm hiệu suất tiêu hao $TP(t)$ luôn dương, điều này cho thấy điều kiện (ii) trong Định nghĩa 2.2.4 được thoả mãn.



Hình 2.4: Quỹ đạo của hàm $TP(t)$ trong Ví dụ 2.2.11

Để so sánh với các nghiên cứu đã trước đó, ta xét trường hợp đặc biệt của hệ (2.56) dưới dạng hệ cấp phân số tuyến tính sau.

Ví dụ 2.2.12. Xét hệ tuyến tính cấp phân số sau

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^{0.4} x(t) = Ax(t) + D\omega(t), & t \geq 0, \\ x(0) = (x_1(0), x_2(0))^T \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (2.57)$$

trong đó

$$x(t) \in \mathbb{R}^2, \quad \omega(t) = \begin{pmatrix} 0.1 \sin t \\ 0.1 \cos t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sau đây, ta xét hai trường hợp nhằm so sánh với kết quả trong [46].

Trường hợp I. Giả sử $c_1 = 1$, $T = 10$, $R = I$ và $\bar{\omega} = 0.01$. Ta nhận thấy rằng các điều kiện (2.56a) và (2.56b) trong Hệ quả 2.2.10 được thoả mãn với

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2601 & 0.0692 \\ 0.0692 & 0.5574 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1.1161 & 0 \\ 0 & 1.1161 \end{bmatrix},$$

và với mọi $c_2 \geq 2.5$. Do đó, theo Hệ quả 2.2.10, hệ (2.57) là bị chặn trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(1, c_2, 10, I, 0.01)$ với mọi $c_2 \geq 2.5$.

Sử dụng Định lý 3 trong [46], ta có thể xác minh rằng hệ thống là bị chặn trong thời gian hữu hạn với bộ tham số $(1, c_2, 10, I, 0.01)$ với mọi $c_2 \geq 10.2957$. Do

đó, kết quả của chúng tôi thể hiện sự cải thiện rõ rệt về giới hạn đánh giá so với kết quả trong [46].

Trường hợp II. Giả sử $c_1 = 1$, $c_2 = 5.7$, $R = I$ và $\bar{\omega} = 0.01$. Theo Bổ đề 2.2.10, hệ (2.57) là bị chặn trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(1, 5.7, T, I, 0.01)$ với mọi $0 < T \leq T_{\max} = 20$.

Lưu ý rằng trong [46], giá trị lớn nhất của T được đảm bảo là $T_{\max} = 1$. Do đó, kết quả của chúng tôi mang lại miền khả thi lớn hơn so với kết quả trong [46].

2.3 Kết luận chương 2

Chương này đã nghiên cứu bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn đối với một số lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số. Đối với lớp hệ Caputo với nhân suy giảm, việc xây dựng các đánh giá Lyapunov gặp khó khăn do cấu trúc của toán tử khác với trường hợp Caputo cổ điển. Để xử lý vấn đề này, luận án đã thiết lập các Bổ đề 1.6.4 và 1.6.5, kết hợp với phương pháp hàm Lyapunov và kỹ thuật bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Các kết quả chính đạt được như sau:

- Đối với lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm, có nhiều ngoài và trễ hằng số, luận án đã thiết lập các điều kiện đủ đảm bảo tính tiêu hao trong thời gian hữu hạn dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính, trên cơ sở sử dụng phương pháp hàm Lyapunov.
- Đối với lớp hệ nơ-ron không chắc chắn cấp phân số Caputo có nhiều, luận án đã thiết lập các điều kiện đủ đảm bảo tính tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính, trên cơ sở sử dụng phương pháp hàm Lyapunov.
- Các ví dụ số và mô phỏng được xây dựng nhằm minh họa tính khả thi của các điều kiện đủ đã thiết lập. Kết quả mô phỏng cho thấy các điều kiện lý thuyết thu được có thể được kiểm chứng bằng tính toán số.

Chương 3

Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho một số lớp hệ phương trình vi phân cấp phân số

Tiếp theo, luận án chuyển từ việc phân tích tính ổn định và các chỉ số hiệu năng trong thời gian hữu hạn sang bài toán thiết kế điều khiển. Cụ thể, Chương 3 nghiên cứu bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho một số lớp hệ phương trình vi phân cấp phân số có trễ. Mục tiêu là thiết lập các điều kiện đủ dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính nhằm xây dựng luật điều khiển phản hồi trạng thái, bảo đảm hệ đóng ổn định trong thời gian hữu hạn và hàm chi phí không vượt quá một chặn trên cho trước.

Nội dung của chương được xây dựng dựa trên hai bài báo [CT2, CT3] trong danh mục các công trình khoa học đã công bố của tác giả liên quan đến luận án.

3.1 Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ tổ hợp lỗi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên

Xét hệ không chắc chắn tổ hợp lỗi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên như sau

$$\begin{cases} {}^C_0 D^\alpha x(t) = A(\xi)x(t) + D(\xi)x(t - h(t)) + B(\xi)u(t), & t > 0, \\ x(\eta) = \varphi(\eta), & \forall \eta \in [-h_2, 0], \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó $0 < \alpha < 1$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là luật điều

khiến và các ma trận chưa biết $A(\xi), B(\xi), D(\xi)$ của hệ thuộc tổ hợp lồi Ω được cho bởi

$$\Omega := \left\{ [A, B, D](\xi) = \sum_{i=1}^s \xi_i [A_i, B_i, D_i] \mid \sum_{i=1}^s \xi_i = 1, \xi_i > 0, i \in \{1, \dots, s\} \right\},$$

trong đó $A_i, D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, ($i = 1, 2, \dots, s$, $s > 1$) là các ma trận thực, hàm trễ $h(t)$ thỏa mãn $0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2$, $\forall t > 0$, hàm điều kiện ban đầu

$$\varphi(t) \in C([-h_2, 0], \mathbb{R}^n) \text{ với } \|\varphi\| = \sup_{s \in [-h_2, 0]} \|\varphi(s)\|.$$

Cho số $T > 0$. Liên kết với hệ (3.1) là hàm chi phí toàn phương sau

$$J = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} [x^\top(s) M x(s) + u^\top(s) R u(s)] ds, \quad (3.2)$$

trong đó M và R là các ma trận đối xứng xác định dương.

Khi không có điều khiển $u(t)$, hệ (3.1) trở thành

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = A(\xi)x(t) + D(\xi)x(t-h(t)), & t > 0, \\ x(\eta) = \varphi(\eta), & \forall \eta \in [-h_2, 0]. \end{cases} \quad (3.3)$$

Định nghĩa 3.1.1. Cho $c_2 > c_1 > 0$, $T > 0$. Hệ (3.3) được gọi là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) nếu điều kiện sau được thỏa mãn

$$\|\varphi\|^2 \leq c_1 \Rightarrow \|x(t)\|^2 < c_2, \quad \forall t \in [0, T].$$

Định nghĩa 3.1.2. Cho $c_2 > c_1 > 0$, $T > 0$. Hệ (3.1) được gọi là ổn định hóa vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) nếu tồn tại một điều khiển phản hồi trạng thái dạng $u(t) = Kx(t)$ sao cho hệ đóng

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = [A(\xi) + B(\xi)K]x(t) + D(\xi)x(t-h(t)), \\ x(\eta) = \varphi(\eta), & \forall \eta \in [-h_2, 0], \end{cases} \quad (3.4)$$

là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) .

Định nghĩa 3.1.3. Đối với hệ (3.1) và hàm chi phí (3.2), nếu tồn tại một điều khiển phản hồi trạng thái $u^*(t)$ và một hằng số dương J^* sao cho hệ đóng (3.4)

là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) và hàm chi phí thỏa mãn $J \leq J^*$, thì $u^*(t)$ được gọi là luật điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn và J^* được gọi là chi phí đảm bảo.

Để xây dựng các điều kiện LMI trong quá trình thiết kế điều khiển, chúng tôi xét các chỉ số $i, j = 1, 2, \dots, s$ với $i \neq j$ và định nghĩa ma trận

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

trong đó S là một ma trận đối xứng xác định dương chưa biết. Các biểu thức sau được sử dụng trong quá trình thiết kế điều kiện LMI

$$W_{ii} = A_i P + B_i Y + (A_i P + B_i Y)^\top - h_2 P + S,$$

$$W_{jj} = A_i P + B_i Y + A_j P + B_j Y + (A_i P + B_i Y + A_j P + B_j Y)^\top - 2h_2 P - \frac{2S}{s-1},$$

$$q = E_\alpha(h_2 T^\alpha) \sum_{j=0}^{[T/h_1]+1} (E_\alpha(h_2 T^\alpha) - 1)^j, \beta = \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}, \quad \beta_0 = \frac{\frac{2h_2 q T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 1}{\lambda_{\min}(P)}.$$

Định lý 3.1.4. Cho $c_2 > c_1 > 0$, $T > 0$. Xét hệ (3.1) với hàm chi phí (3.2). Giả sử tồn tại các ma trận $P, S \in \mathbb{S}_n^+$ và ma trận thực Y với kích thước phù hợp sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} W_{ii} & D_i P & P M & Y^\top R \\ * & -h_2 P & 0 & 0 \\ * & * & -M & 0 \\ * & * & * & -R \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i \in \overline{1, s}, \quad (3.5a)$$

$$\begin{bmatrix} W_{jj} & D_i P + D_j P & P M & Y^\top R \\ * & -2h_2 P & 0 & 0 \\ * & * & -\frac{1}{2}M & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{2}R \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i \neq j, i, j \in \overline{1, s}, \quad (3.5b)$$

$$E_\alpha(h_2 T^\alpha) \sum_{j=0}^{[T/h_1]+1} (E_\alpha(h_2 T^\alpha) - 1)^j \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \leq \frac{c_2}{c_1}, \quad (3.5c)$$

thì $u(t) = YP^{-1}x(t)$ là luật điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn và chi phí đảm bảo được xác định bởi

$$J^* = \frac{\frac{2h_2qT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 1}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2.$$

Chứng minh. Chúng tôi chia chứng minh định lý thành hai bước như sau:

Bước 1: Chứng minh Hệ (3.1) là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) .

Xét hàm Lyapunov sau

$$V(x(t)) = x(t)^\top P^{-1}x(t).$$

Áp dụng Bổ đề 1.6.3, lấy đạo hàm Caputo theo t của $V(x(t))$ dọc theo nghiệm của hệ, ta có

$$\begin{aligned} {}^C_0D_t^\alpha V(x(t)) &\leq 2x(t)^\top P^{-1} {}^C_0D_t^\alpha x(t) \\ &\leq 2x(t)^\top P^{-1} \left([A(\xi) + B(\xi)K]x(t) + D(\xi)x(t-h(t)) \right) \\ &\quad - h_2x(t-h(t))^\top P^{-1}x(t-h(t)) + h_2V(x(t-h(t))) \\ &\quad - h_2x(t)^\top P^{-1}x(t) + h_2V(x(t)) + x(t)^\top Hx(t) - x(t)^\top Hx(t) \quad (3.6) \\ &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(t)) \end{bmatrix}^\top \Omega(\xi) \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(t)) \end{bmatrix} \\ &\quad + h_2V(x(t-h(t))) + h_2V(x(t)) - x(t)^\top Hx(t), \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} H &= M + K^\top RK, \quad K = YP^{-1}, \quad \Omega(\xi) = [\Omega_{ij}]_{2 \times 2}, \\ \Omega_{11} &= P^{-1}[A(\xi) + B(\xi)K] + [A(\xi) + B(\xi)K]^\top P^{-1} - h_2P^{-1} + M + K^\top RK, \\ \Omega_{12} &= P^{-1}D(\xi), \quad \Omega_{22} = -h_2P^{-1}. \end{aligned}$$

Nhân cả hai phía trái và phải của $\Omega(\xi)$ với $\mathcal{P} = \text{diag}\{P, P\}$, ta thu được

$$\bar{\Omega}(\xi) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \Omega(\xi) \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A(\xi)P + B(\xi)Y + (A(\xi)P + B(\xi)Y)^\top - h_2P + PMP + Y^\top RY & D(\xi)P \\ * & -h_2P \end{bmatrix}.$$

Lưu ý rằng các ma trận $A(\xi)$, $B(\xi)$, $D(\xi)$ thuộc tổ hợp lồi với hệ số ξ_i , nên ta có thể biểu diễn $\bar{\Omega}(\xi)$ dưới dạng

$$\bar{\Omega}(\xi) = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11} & \sum_{i=1}^s \xi_i D_i P \\ * & -h_2 \left(\sum_{i=1}^s \xi_i \right) P \end{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^s \xi_i \right),$$

trong đó

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{11} &= \sum_{i=1}^s \xi_i (A_i P + B_i Y) + \left(\sum_{i=1}^s \xi_i (A_i P + B_i Y) \right)^\top \\ &\quad - h_2 \left(\sum_{i=1}^s \xi_i \right) P + \left(\sum_{i=1}^s \xi_i \right) PMP + \left(\sum_{i=1}^s \xi_i \right) Y^\top RY. \end{aligned}$$

Từ đó, ta có

$$\bar{\Omega}(\xi) = \sum_{i=1}^s \xi_i^2 \begin{bmatrix} \bar{W}_{ii} & D_i P \\ * & -h_2 P \end{bmatrix} + \sum_{i < j} \xi_i \xi_j \begin{bmatrix} \bar{W}_{ij} & D_i P + D_j P \\ * & -2h_2 P \end{bmatrix},$$

trong đó

$$\begin{aligned} \bar{W}_{ii} &= A_i P + B_i Y + (A_i P + B_i Y)^\top - h_2 P + PMP + Y^\top RY, \\ \bar{W}_{ij} &= A_i P + B_i Y + (A_i P + B_i Y)^\top + A_j P + B_j Y + (A_j P + B_j Y)^\top \\ &\quad - 2h_2 P + 2PMP + 2Y^\top RY. \end{aligned}$$

Hay, ta có

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}(\xi) &= \sum_{i=1}^s \xi_i^2 \begin{bmatrix} W_{ii} + PMP + Y^\top RY - S & D_i P \\ * & -h_2 P \end{bmatrix} \\ &\quad + \sum_{i < j} \xi_i \xi_j \begin{bmatrix} W_{ij} + 2PMP + 2Y^\top RY + \frac{2S}{s-1} & D_i P + D_j P \\ * & -2h_2 P \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^s \xi_i^2 \begin{bmatrix} W_{ii} + PMP + Y^\top RY & D_i P \\ * & -h_2 P \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^s \xi_i^2 \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i < j} \xi_i \xi_j \begin{bmatrix} W_{ij} + 2PMP + 2Y^\top RY & D_i P + D_j P \\ * & -2h_2 P \end{bmatrix} \\
& + \frac{2}{s-1} \sum_{i < j} \xi_i \xi_j \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Từ các điều kiện (3.5a) và (3.5b), áp dụng Bổ đề Schur, ta thu được

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} W_{ii} + PMP + Y^\top RY & D_i P \\ * & -h_2 P \end{bmatrix} < 0, \\
& \begin{bmatrix} W_{ij} + 2PMP + 2Y^\top RY & D_i P + D_j P \\ * & -2h_2 P \end{bmatrix} < 0.
\end{aligned}$$

Từ đó, suy ra

$$\bar{\Omega}(\xi) < -\sum_{i=1}^s \xi_i^2 \mathbb{S} + \frac{2}{s-1} \mathbb{S} \sum_{i < j} \xi_i \xi_j = -\frac{\mathbb{S}}{s-1} \sum_{i < j} (\xi_i - \xi_j)^2 \leq 0.$$

Điều này tương đương với $\Omega(\xi) < 0$. Vì vậy, từ (3.6), ta có

$${}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) - h_2 V(x(t)) \leq h_2 V(x(t-h(t))) - x(t)^\top H x(t). \quad (3.7)$$

Mặt khác, vì $H = M + K^\top R K > 0$, ta suy ra

$${}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) - h_2 V(x(t)) \leq h_2 V(x(t-h(t))). \quad (3.8)$$

Để thuận tiện cho việc trình bày, ta đặt $\Psi(t) = {}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) - h_2 V(x(t))$.

Sử dụng Bổ đề 1.1.20, áp dụng phép biến đổi Laplace hai vế của biểu thức

$$\Psi(t) = {}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) - h_2 V(x(t)),$$

ta có

$$\mathcal{L}[\Psi(t)](s) = s^\alpha \mathcal{L}[V(x(t))](s) - s^{\alpha-1} V(x(0)) - h_2 \mathcal{L}[V(x(t))](s).$$

Điều này tương đương với

$$(s^\alpha - h_2) \mathcal{L}[V(x(t))](s) = s^{\alpha-1} V(x(0)) + \mathcal{L}[\Psi(t)](s).$$

Từ đó, suy ra

$$\mathcal{L}[V(x(t))](s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - h_2} V(x(0)) + \frac{\mathcal{L}[\Psi(t)](s)}{s^\alpha - h_2}. \quad (3.9)$$

Mặt khác, từ phần (ii) của Bổ đề 1.1.20, ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - h_2} &= \mathcal{L}[E_{\alpha,1}(h_2 t^\alpha)](s), \\ \frac{1}{s^\alpha - h_2} &= \mathcal{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(h_2 t^\alpha)](s). \end{aligned}$$

Thay các biểu thức trên vào (3.9), ta suy ra

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V(x(t))](s) &= \mathcal{L}[E_{\alpha,1}(h_2 t^\alpha)](s) \cdot V(x(0)) \\ &\quad + \mathcal{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(h_2 t^\alpha)](s) \cdot \mathcal{L}[\Psi(t)](s) \\ &= \mathcal{L}[E_{\alpha,1}(h_2 t^\alpha)](s) \cdot V(x(0)) \\ &\quad + \mathcal{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(h_2 t^\alpha) * \Psi(t)](s). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Từ phần (iii) của Bổ đề 1.1.20, ta có

$$t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(h_2 t^\alpha) * \Psi(t) = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(h_2 (t - \tau)^\alpha) \Psi(\tau) d\tau.$$

Thay biểu thức trên vào (3.10), ta được

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V(x(t))](s) &= \mathcal{L}[E_{\alpha,1}(h_2 t^\alpha)](s) \cdot V(x(0)) \\ &\quad + \mathcal{L}\left[\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(h_2 (t - \tau)^\alpha) \Psi(\tau) d\tau\right](s). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sử dụng phép biến đổi Laplace ngược hai vế của biểu thức (3.11), ta thu được

$$V(x(t)) = E_{\alpha,1}(h_2 t^\alpha) V(x(0)) + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(h_2 (t - \tau)^\alpha) \Psi(\tau) d\tau. \quad (3.12)$$

Mặt khác, vì $(t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(h_2 (t - \tau)^\alpha) \geq 0$ với mọi $\tau \in [0, t]$, nên từ (3.8), ta có

$$\sup_{\tau \in [0, t]} \left({}^C D_t^\alpha V(x(\tau)) - h_2 V(x(\tau)) \right) \leq h_2 \sup_{\tau \in [0, t]} V(x(\tau - h(\tau))).$$

Điều này tương đương với

$$\sup_{\tau \in [0, t]} \Psi(\tau) \leq h_2 \sup_{\tau \in [0, t]} V(x(\tau - h(\tau))). \quad (3.13)$$

Từ (3.12) và (3.13), suy ra được

$$V(x(t)) \leq E_{\alpha,1}(h_2 t^\alpha) V(x(0)) + h_2 \sup_{\tau \in [0,t]} V(x(\tau - h(\tau))) \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(h_2(t - \tau)^\alpha) d\tau. \quad (3.14)$$

Đến đây, với hàm Mittag–Leffler $E_{\alpha,\alpha}(h_2(t - \tau)^\alpha)$ được xác định bởi

$$E_{\alpha,\alpha}(h_2(t - \tau)^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[h_2(t - \tau)^\alpha]^n}{\Gamma(n\alpha + \alpha)},$$

ta dễ dàng tính được

$$\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(h_2(t - \tau)^\alpha) d\tau = \frac{E_\alpha(h_2 t^\alpha) - 1}{h_2}. \quad (3.15)$$

Từ (3.14) và (3.15), ta suy ra

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq E_\alpha(h_2 t^\alpha) V(x(0)) + (E_\alpha(h_2 t^\alpha) - 1) \sup_{\tau \in [0,t]} V(x(\tau - h(\tau))) \\ &\leq E_\alpha(h_2 t^\alpha) V(x(0)) + (E_\alpha(h_2 t^\alpha) - 1) \sup_{\eta \in [-h_2, t-h_1]} V(x(\eta)), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bây giờ, ta cần đánh giá giá trị của $V(x(t))$ trên $[-h_2, t]$, $\forall t \in [0, T]$.

Đầu tiên, lưu ý rằng theo Bổ đề 1.6.6, hàm Mittag–Leffler $E_\alpha(h_2 t^\alpha) \geq 1$, với mọi $t > 0$. Khi đó, với mọi $\tau \in [-h_2, 0]$, và từ điều kiện ban đầu của hệ (3.1), ta có

$$x^\top(\tau) P^{-1} x(\tau) = \varphi^\top(\tau) P^{-1} \varphi(\tau) \leq \sup_{\eta \in [-h_2, 0]} \varphi^\top(\eta) P^{-1} \varphi(\eta) \cdot E_\alpha(h_2 t^\alpha). \quad (3.17)$$

Hơn nữa, vì $E_\alpha(\cdot)$ là hàm không giảm, nên từ (3.16) và (3.17), với mọi $0 \leq \tau \leq t$, ta có

$$\begin{aligned} V(x(\tau)) &\leq E_\alpha(h_2 \tau^\alpha) \sup_{\eta \in [-h_2, 0]} \varphi^\top(\eta) P^{-1} \varphi(\eta) \cdot E_\alpha(h_2 t^\alpha) \\ &\quad + (E_\alpha(h_2 \tau^\alpha) - 1) \sup_{\eta \in [-h_2, t-h_1]} V(x(\eta)). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Từ (3.17) và (3.18), với mọi $\tau \in [-h_2, t]$, ta suy ra

$$\begin{aligned} V(x(\tau)) &\leq E_\alpha(h_2 \tau^\alpha) \sup_{\eta \in [-h_2, 0]} \varphi^\top(\eta) P^{-1} \varphi(\eta) \cdot E_\alpha(h_2 t^\alpha) \\ &\quad + (E_\alpha(h_2 \tau^\alpha) - 1) \sup_{\eta \in [-h_2, t-h_1]} V(x(\eta)). \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng

$$\begin{aligned}
\sup_{\eta \in [-h_2, t]} V(x(\eta)) &\leq E_\alpha(h_2 \tau^\alpha) \sup_{\eta \in [-h_2, 0]} \varphi^\top(\eta) P^{-1} \varphi(\eta) \cdot E_\alpha(h_2 t^\alpha) \\
&\quad + (E_\alpha(h_2 \tau^\alpha) - 1) \sup_{\eta \in [-h_2, t-h_1]} V(x(\eta)) \\
&\leq E_\alpha(h_2 T^\alpha) \sup_{\eta \in [-h_2, 0]} \varphi^\top(\eta) P^{-1} \varphi(\eta) \cdot E_\alpha(h_2 T^\alpha) \\
&\quad + (E_\alpha(h_2 T^\alpha) - 1) \sup_{\eta \in [-h_2, t-h_1]} V(x(\eta)), \forall t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Đặt

$$\Pi(t) = \sup_{\eta \in [-h_2, t]} V(x(\eta)), \quad a = E_\alpha(h_2 T^\alpha), \quad b = E_\alpha(h_2 T^\alpha) - 1, \quad \forall t \in [0, T].$$

Khi đó, bất đẳng thức (3.19) tương đương với

$$\Pi(t) \leq a\Pi(0) + b\Pi(t - h_1). \tag{3.20}$$

Dễ thấy rằng $\Pi(t)$ là hàm không giảm với mọi $t \in [0, T]$, nên áp dụng Bổ đề 1.6.7, ta thu được

$$x^\top(t) P^{-1} x(t) \leq \Pi(t) \leq a \sum_{j=0}^{[T/h_1]+1} b^j \Pi(0) = q \Pi(0) = q \sup_{\eta \in [-h_2, 0]} V(x(\eta)), \tag{3.21}$$

trong đó

$$q = a \sum_{j=0}^{[T/h_1]+1} b^j.$$

Mặt khác, vì P^{-1} là ma trận đối xứng xác định dương, nên ta có

$$\lambda_{\min}(P^{-1})I \leq P^{-1} \leq \lambda_{\max}(P^{-1})I.$$

Do đó, suy ra

$$\begin{aligned}
\sup_{\eta \in [-h_2, 0]} V(x(\eta)) &= \sup_{\eta \in [-h_2, 0]} \varphi^\top(\eta) P^{-1} \varphi(\eta) \\
&\leq \lambda_{\max}(P^{-1}) \sup_{\eta \in [-h_2, 0]} \varphi^\top(\eta) \varphi(\eta) \\
&= \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \sup_{\eta \in [-h_2, 0]} \|\varphi(\eta)\|^2 = \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Từ (3.21) và (3.22), ta thu được

$$\Pi(t) = \sup_{\eta \in [-h_2, t]} V(x(\eta)) \leq \frac{q}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2. \quad (3.23)$$

Hơn nữa, với mọi $t \in [0, T]$, ta có

$$x^\top(t)P^{-1}x(t) \geq \lambda_{\min}(P^{-1})\|x(t)\|^2 = \frac{1}{\lambda_{\max}(P)}\|x(t)\|^2.$$

Vì vậy, ta có

$$\begin{aligned} \|x(t)\|^2 &\leq \lambda_{\max}(P)x^\top(t)P^{-1}x(t) \\ &\leq \lambda_{\max}(P) \sup_{\eta \in [-h_2, t]} V(x(\eta)) \\ &\leq \frac{q\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 = q\beta \|\varphi\|^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Từ (3.5c) và (3.24) suy ra $q\beta \leq \frac{c_2}{c_1}$. Như vậy, khi $\|\varphi\|^2 \leq c_1$, ta có

$$\|x(t)\|^2 \leq q\beta c_1 < c_2.$$

Điều này chứng tỏ rằng hệ (3.1) là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) .

Bước 2: Để xác định giá trị chi phí đảm bảo, từ (3.7) và (3.22), ta có

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^\alpha V(x(t)) &\leq h_2 V(x(t)) + h_2 V(x(t-h(t))) - x^\top(t)Hx(t) \\ &\leq 2h_2 \sup_{\eta \in [-h_2, t]} V(x(\eta)) - x^\top(t)Hx(t) \\ &\leq \frac{2h_2 q}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 - x^\top(t)Hx(t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Khi đó, với mọi $t \in [0, T]$, tích phân Riemann–Liouville cấp $\alpha > 0$ hai vế của (3.25), ta thu được

$$\begin{aligned} {}_0 I_t^\alpha [{}^C_0 D_t^\alpha V(x(t))] &\leq {}_0 I_t^\alpha \left[\frac{2h_2 q}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 \right] - {}_0 I_t^\alpha [x^\top(t)Hx(t)] \\ &= \frac{2h_2 q}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds - {}_0 I_t^\alpha [x^\top(t)Hx(t)] \\ &= \frac{2h_2 q}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - {}_0 I_t^\alpha [x^\top(t)Hx(t)]. \end{aligned}$$

Từ đó, suy ra

$$\begin{aligned} {}_0I_t^\alpha [x^\top(t)Hx(t)] &\leq \frac{2h_2q}{\lambda_{\min}(P)}\|\varphi\|^2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - {}_0I_t^\alpha [{}_0^C D_t^\alpha V(x(t))] \\ &= \frac{2h_2q}{\lambda_{\min}(P)}\|\varphi\|^2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + V(x(0)) - V(x(t)). \end{aligned}$$

Hơn nữa, do $V(x(t)) > 0$ với mọi $t \in [0, T]$, nên ta có

$${}_0I_t^\alpha [x^\top(t)Hx(t)] \leq \frac{2h_2q}{\lambda_{\min}(P)}\|\varphi\|^2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + V(x(0)).$$

Mặt khác, từ (3.22), ta có

$$V(x(0)) \leq \sup_{\eta \in [-h_2, 0]} V(x(\eta)) \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(P)}\|\varphi\|^2.$$

Do đó, với mọi $t \in [0, T]$, ta thu được

$$\begin{aligned} {}_0I_t^\alpha [x^\top(t)Hx(t)] &\leq \frac{2h_2q}{\lambda_{\min}(P)}\|\varphi\|^2 \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\lambda_{\min}(P)}\|\varphi\|^2 \\ &= \left(\frac{2h_2qT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 1 \right) \frac{1}{\lambda_{\min}(P)}\|\varphi\|^2 = J^*. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Từ đó, suy ra

$${}_0I_t^\alpha [x^\top(t)Hx(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} [x^\top(s)Mx(s) + u^\top(s)Ru(s)] ds = J \leq J^*.$$

Điều này hoàn tất việc chứng minh Định lý 3.1.4. $\square$

Nhận xét 3.1.5. Các kết quả hiện tại về bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn chủ yếu tập trung vào các hệ cấp số nguyên [39, 49, 55, 76, 89], trong khi chỉ có một số ít công trình nghiên cứu các hệ cấp phân số [43, 44, 60, 67]. Tuy nhiên, các công trình này mới chỉ nghiên cứu cho các hệ cấp phân số không có trễ. Cho đến nay, vẫn chưa có công trình nào nghiên cứu bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho các hệ dạng tổ hợp lỗi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên.

Phương pháp phổ biến được sử dụng trong các tài liệu nêu trên là phương pháp hàm Lyapunov–Krasovskii. Tuy nhiên, việc mở rộng phương pháp này cho các hệ không chắc chắn cấp phân số có trễ biến thiên gặp nhiều khó khăn đáng

kể. Cụ thể, việc xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii phù hợp cho các hệ cấp phân số có thể là một vấn đề phức tạp. Bên cạnh đó, việc tính đạo hàm cấp phân số của hàm này cũng gặp nhiều trở ngại do quy tắc Leibniz không còn đúng đối với đạo hàm cấp phân số. Những khó khăn này, cùng với việc thiếu các bất đẳng thức tích phân thích hợp và chưa có các kỹ thuật thay thế hữu hiệu, đã hạn chế sự phát triển của hướng nghiên cứu này đối với các hệ cấp phân số có trễ.

Dựa trên biến đổi Laplace, phương pháp “inf-sup” kết hợp với kỹ thuật LMI, Định lý 3.1.4 thiết lập các điều kiện đủ cho bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn đối với các hệ không chắc chắn dạng tổ hợp lỗi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên.

Xét trường hợp đặc biệt của hệ (3.1) khi các ma trận của hệ không phụ thuộc tham số bất định. Khi $s = 2$ và các ma trận của hệ thỏa mãn

$$A_i = A, D_i = D, B_i = B, \forall i \in \{1, 2\},$$

thì hệ (3.1) trở thành hệ cấp phân số Caputo với trễ biến thiên như sau

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Dx(t - h(t)) + Bu(t), \\ x(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [-h_2, 0], \end{cases} \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.27)$$

trong đó $0 < \alpha < 1$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là tín hiệu điều khiển, và các ma trận $A, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ là ma trận cho trước.

Hàm trễ $h(t)$ là một hàm bị chặn, thỏa mãn

$$0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2, \quad \forall t \geq 0.$$

Hàm điều kiện ban đầu $\varphi(t) \in C([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$ liên tục trên đoạn $[-h_2, 0]$, với chuẩn được xác định bởi

$$\|\varphi\| = \sup_{\theta \in [-h_2, 0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Từ Định lý 3.1.4, ta suy ra hệ quả sau.

Hệ quả 3.1.6. Cho các số dương c_1, c_2, T với $c_1 < c_2$. Xét hệ (3.27) với hàm chi phí (3.2). Giả sử tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương $P, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ và một ma trận $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ có kích thước phù hợp, sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} W & DP & PM & Y^\top R \\ * & -h_2 P & 0 & 0 \\ * & * & -M & 0 \\ * & * & * & -R \end{bmatrix} < 0, \quad (3.28a)$$

$$\begin{bmatrix} W_1 & 2DP & 2PM & 2Y^\top R \\ * & -2h_2 P & 0 & 0 \\ * & * & -\frac{1}{2}M & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{2}R \end{bmatrix} < 0, \quad (3.28b)$$

$$E_\alpha(h_2 T^\alpha) \sum_{j=0}^{\lceil T/h_1 \rceil + 1} (E_\alpha(h_2 T^\alpha) - 1)^j \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \leq \frac{c_2}{c_1}, \quad (3.28c)$$

khi đó,

$$u(t) = Y P^{-1} x(t)$$

là luật điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn và chi phí đảm bảo tương ứng được xác định bởi

$$J^* = \left(\frac{2h_2 q T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + 1 \right) \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2,$$

trong đó

$$W = [AP + BY] + [AP + BY]^\top - h_2 P + S,$$

$$W_1 = 2[AP + BY] + 2[AP + BY]^\top - 2h_2 P - 2S,$$

$$q = E_\alpha(h_2 T^\alpha) \sum_{j=0}^{\lceil T/h_1 \rceil + 1} (E_\alpha(h_2 T^\alpha) - 1)^j,$$

$$\beta = \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}, \quad \beta_0 = \frac{\left(\frac{2h_2 q T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + 1 \right)}{\lambda_{\min}(P)}.$$

Để minh họa cho các kết quả đạt được trong phần lý thuyết, dưới đây chúng tôi xét ví dụ số cho lớp hệ đã nghiên cứu.

Ví dụ 3.1.7. Xem xét hệ cấp phân số có điều khiển (3.1) và hàm chi phí (3.2) với cấp $\alpha = 0.1$ và các ma trận tham số sau

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ 0.0 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hàm trễ biến thiên theo thời gian được chọn là $h(t) = 0.1 + 0.1 \sin t$, dễ thấy rằng hàm này thỏa mãn điều kiện $0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2$, với $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.2$. Bằng cách sử dụng LMI Toolbox trong MATLAB, ta thu được nghiệm thỏa mãn các điều kiện LMI (3.28a) và (3.28b) với các ma trận

$$P = \begin{bmatrix} 0.3801 & -0.1624 \\ -0.1624 & 0.5038 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0.2209 & 0.0217 \\ 0.0217 & 0.2502 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -0.7370 & 0.0323 \\ -0.2645 & -0.6318 \end{bmatrix}.$$

Với các giá trị được chọn trước $c_1 = 1$, $c_2 = 5$ và $T = 10$, ta thu được

$$c_1 E_\alpha(h_2 T^\alpha) \sum_{j=0}^{\lfloor T/h_2 \rfloor + 1} (E_\alpha(h_2 T^\alpha) - 1)^j \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} = 4.8503 \leq c_2 = 5.$$

Do đó, điều kiện (3.28c) được thỏa mãn.

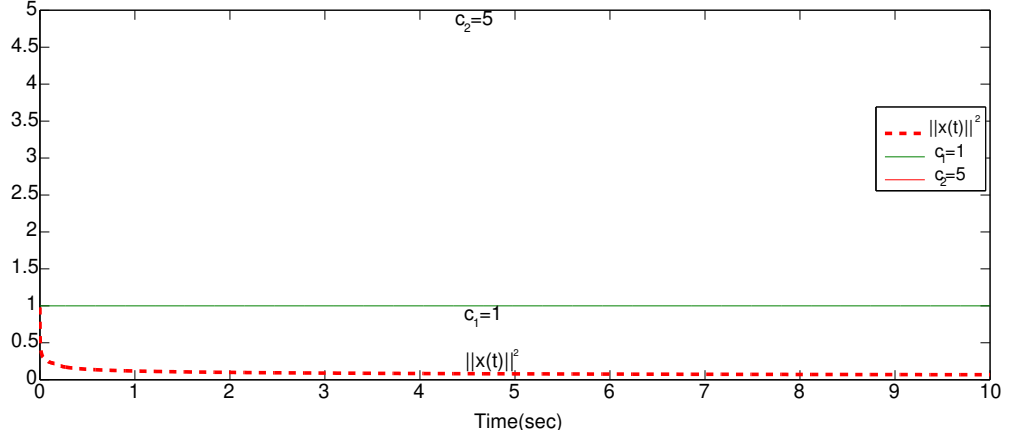
Theo Định lý 3.1.4, hệ đóng (3.4) là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (1, 5, 10). Luật điều khiển đảm bảo chi phí tương ứng được xác định bởi

$$u(t) = Y P^{-1} x(t) = \begin{bmatrix} -2.2163 & -0.6500 \\ -1.4279 & -1.7141 \end{bmatrix} x(t).$$

Với chi phí đảm bảo là

$$J^* = \left(\frac{2h_2 q T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + 1 \right) \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 = 7.8976 \|\varphi\|^2.$$

Hình 3.1 mô tả quỹ đạo của $\|x(t)\|^2$ của hệ được khảo sát với điều kiện ban đầu $\varphi(t) = (0.7, 0.7)^\top \in \mathbb{R}^2$ và các hệ số lỗi $\xi_1 = 0.3$, $\xi_2 = 0.7$. Có thể quan sát thấy



Hình 3.1: Quỹ đạo của $\|x(t)\|^2$ trong Ví dụ 3.1.7

rằng $\|x(t)\|^2$ trên đoạn $[0, 10]$ bị chặn bởi hằng số $c_2 = 5$. Điều này phù hợp với kết quả phân tích trong Định lý 3.1.4, và khẳng định tính ổn định vững trong thời gian hữu hạn của hệ dưới tác dụng của luật điều khiển $u(t)$ đã thiết kế.

Tiếp theo, chúng tôi xét một ví dụ về hệ mô tả chuyển động của robot Newcastle như sau.

Ví dụ 3.1.8. Xét hệ tuyến tính cấp phân số có điều khiển với trễ biến thiên mô tả chuyển động của robot Newcastle ([37]) khi sử dụng luật điều khiển PD^α như sau

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^{0.15} x(t) = Ax(t) + Dx(t - h(t)) + Bu(t), & t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), & \forall t \in [-0.15, 0], \end{cases} \quad (3.29)$$

trong đó $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T \in \mathbb{R}^4$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}$ là tín hiệu điều khiển, và các ma trận của hệ được cho bởi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 17.8 & 0 & 12.8 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.04 & -0.04 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Hàm trễ biến thiên được chọn là

$$h(t) = 0.1 + 0.05|\cos t|.$$

Rõ ràng, hàm trễ $h(t)$ thỏa mãn điều kiện

$$0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2, \quad \text{với } h_1 = 0.1, \quad h_2 = 0.15.$$

Hàm chi phí liên kết với hệ (3.29) được cho bởi (3.2), với các ma trận

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [1].$$

Chọn $c_1 = 1$, $c_2 = 22.5$ và $T = 10$, ta nhận thấy rằng các điều kiện (3.28a), (3.28b) trong Hệ quả 3.1.6 được thỏa mãn với các ma trận

$$P = \begin{bmatrix} 0.2002 & 0.1055 & -0.1302 & 0.2735 \\ 0.1055 & 0.4621 & -0.0574 & 0.1196 \\ -0.1302 & -0.0574 & 0.2800 & -0.3351 \\ 0.2735 & 0.1196 & -0.3351 & 0.9718 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.2772 & 0.0687 & 0.2124 & -0.0093 \\ 0.0687 & 0.0735 & 0.0431 & 0.0226 \\ 0.2124 & 0.0431 & 0.3049 & -0.0557 \\ -0.0093 & 0.0226 & -0.0557 & 0.5604 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -0.2030 & -0.1438 & -0.0761 & -0.4863 \end{bmatrix}.$$

Theo Hệ quả 3.1.6, hệ đóng (3.29) là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(1, 22.5, 10)$, với luật điều khiển đảm bảo chi phí tương ứng được xác định bởi

$$u(t) = \begin{bmatrix} -0.9804 & -0.0921 & -1.7058 & -0.8014 \end{bmatrix} x(t), \quad t \in [0, 10].$$

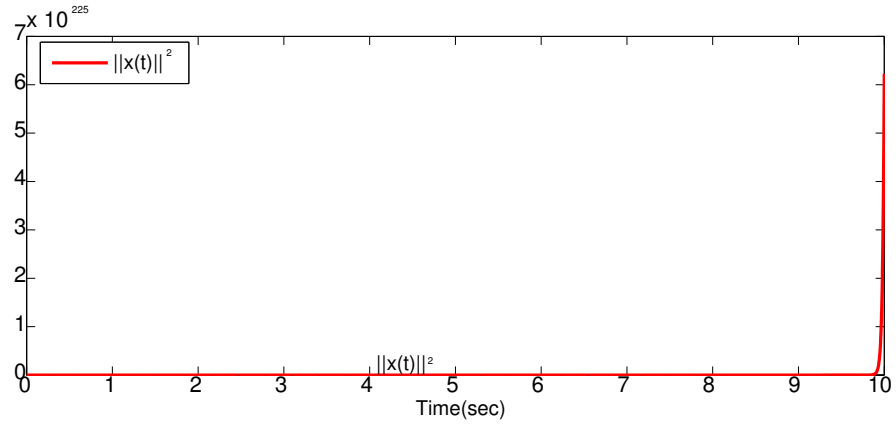
và giá trị chi phí đảm bảo được cho bởi

$$J^* = \left(\frac{2h_2qT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 1 \right) \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 = 19.7449 \|\varphi\|^2.$$

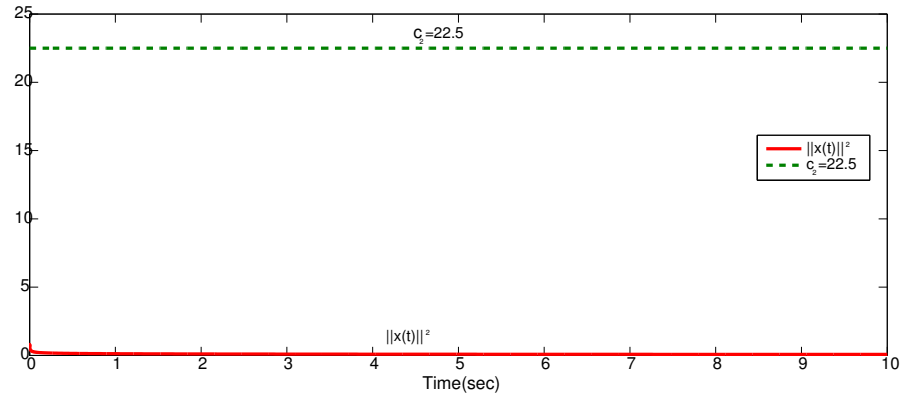
Hình 3.2 minh họa quỹ đạo trạng thái $\|x(t)\|^2$ của hệ mở, với điều kiện ban đầu

$$\varphi(t) = (0.4, 0.4, 0.4, 0.4)^\top \in \mathbb{R}^4,$$

ta có thể thấy rằng khi không có điều khiển $u(t) = Kx(t)$ thì hệ không đạt tính ổn định.



Hình 3.2: Quỹ đạo của $\|x(t)\|^2$ của hệ mở trong Ví dụ 3.1.8



Hình 3.3: Quỹ đạo của $\|x(t)\|^2$ của hệ đóng trong Ví dụ 3.1.8

Hình 3.3 minh họa quỹ đạo trạng thái $\|x(t)\|^2$ của hệ đóng, với điều kiện ban đầu

$$\varphi(t) = (0.4, 0.4, 0.4, 0.4)^\top \in \mathbb{R}^4.$$

ta thấy rằng hệ đóng (3.29) đạt được tính ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số $(1, 22.5, 10)$.

3.2 Bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho hệ phi tuyến cấp phân số với nhân suy giảm có trễ

Xét lớp hệ phi tuyến cấp phân số Caputo với nhân suy giảm không chắc chắn, với trễ hằng số sau

$$\begin{cases} {}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}x(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (D + \Delta D(t))x(t - \tau) \\ \quad + f(t, x(t)) + g(t, x(t - \tau)) + (B + \Delta B(t))u(t), \quad t \geq 0, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (3.30)$$

trong đó $\lambda \geq 0$, $\alpha \in (0, 1)$ là cấp của hệ, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển, $\varphi(\cdot) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu với chuẩn

$$\|\varphi\| = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|,$$

các ma trận thực cho trước A , B , D có kích thước phù hợp, các ma trận phụ thuộc tham số $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ và $\Delta D(t)$ thỏa mãn Giả thiết 3.2.1, còn f và g là các hàm kích hoạt phi tuyến thỏa mãn Giả thiết 3.2.2.

Trong mục này, chúng tôi sử dụng các giả thiết sau.

Giả thiết 3.2.1. Các ma trận $\Delta A(t)$, $\Delta D(t)$ và $\Delta B(t)$ có dạng

$$\Delta A(t) = E_a F_1(t) H_a, \quad \Delta D(t) = E_d F_2(t) H_d, \quad \Delta B(t) = E_b F_3(t) H_b,$$

trong đó E_a , E_d , E_b , H_a , H_d , H_b là các ma trận thực đã biết có kích thước phù hợp và $F_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, là các ma trận biến thiên theo thời gian thỏa mãn

$$F_i^\top(t) F_i(t) \leq I, \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Giả thiết 3.2.2. Các hàm $f, g : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} f^\top(t, x) f(t, x) &\leq x^\top Q x, \\ g^\top(t, x) g(t, x) &\leq x^\top G x, \end{aligned} \quad (3.31)$$

với mọi $(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, trong đó Q và G là các ma trận đối xứng xác định dương.

Khi không có điều khiển $u(t)$, hệ (3.30) trở thành

$$\begin{cases} {}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}x(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (D + \Delta D(t))x(t - \tau) \\ \quad + f(t, x(t)) + g(t, x(t - \tau)), \quad t \geq 0, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (3.32)$$

Định nghĩa 3.2.3. Cho các số dương c_1, c_2, T với $c_1 < c_2$. Hệ (3.32) được gọi là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) nếu điều kiện sau được thỏa mãn

$$\|\varphi\|^2 \leq c_1 \Rightarrow \|x(t)\|^2 < c_2, \quad \forall t \in [0, T].$$

Định nghĩa 3.2.4. Cho các số dương c_1, c_2, T thỏa mãn $c_2 > c_1$. Hệ (3.30) được gọi là ổn định hoá vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) nếu tồn tại một điều khiển phản hồi trạng thái $u(t) = Kx(t)$ sao cho hệ đóng

$$\begin{cases} {}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}x(t) = (A + \Delta A(t) + BK + \Delta B(t))x(t) \\ \quad + (D + \Delta D(t))x(t - \tau) + f(t, x(t)) + g(t, x(t - \tau)), \quad t \geq 0, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (3.33)$$

là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) .

Với số dương $T > 0$, hàm chi phí liên quan đến hệ (3.30) được xác định bởi

$$J(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} [x^\top(s)Mx(s) + u^\top(s)Ru(s)] ds, \quad (3.34)$$

với mọi $t \in [0, T]$ và M, R là các ma trận đối xứng xác định dương cho trước.

Định nghĩa 3.2.5. Đối với hệ (3.30) và hàm chi phí (3.34), nếu tồn tại luật điều khiển phản hồi trạng thái $u^*(t)$ và một hằng số dương J^* sao cho hệ đóng (3.33) là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) và hàm chi phí thỏa mãn $J \leq J^*$, thì $u^*(t)$ được gọi là luật điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn và J^* được gọi là chi phí đảm bảo.

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho hệ (3.30) thông qua luật điều khiển phản hồi trạng thái $u(t) = Kx(t)$. Kết quả chính được trình bày trong Định lý sau.

Định lý 3.2.6. *Cho các số dương c_1, c_2, T với $c_1 < c_2$. Giả sử tồn tại các số dương $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, ma trận đối xứng xác định dương $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, và ma trận $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & DP & I & I & PQ & PM & Y^\top R & PH_a^\top & Y^\top H_b^\top & 0 & 0 \\ * & -\tau P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & PH_d^\top & PG \\ * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon_2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon_3 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -G \end{bmatrix} < 0, \quad (3.35a)$$

$$E_\alpha(\tau T^\alpha) \sum_{j=0}^{\lceil T/\tau \rceil + 1} e^{\lambda_{\tau j}} (E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1)^j \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} < \frac{c_2}{c_1}, \quad (3.35b)$$

Khi đó, $u(t) = YP^{-1}x(t)$ là luật điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho hệ (3.30) và giá trị chi phí đảm bảo tương ứng được xác định bởi

$$J^* = \|\varphi\|^2 \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} + \frac{2\gamma\tau}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 \cdot \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)},$$

trong đó

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \epsilon_1 E_a E_a^\top + \epsilon_3 E_d E_d^\top + \epsilon_2 E_b E_b^\top - \tau P, \\ \gamma &= E_\alpha(\tau T^\alpha) \sum_{j=0}^{\lceil T/\tau \rceil + 1} e^{\lambda_{\tau j}} (E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1)^j. \end{aligned}$$

Chứng minh. Xét hàm Lyapunov sau

$$V(x(t)) = x^\top(t)P^{-1}x(t).$$

Lấy đạo hàm Caputo với nhân suy giảm của $V(x(t))$ theo biến thời gian t dọc theo nghiệm của hệ. Theo Bổ đề 1.6.5, ta có

$$\begin{aligned} {}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}V(x(t)) &\leq 2x^\top(t)P^{-1} {}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}x(t) \\ &= 2x^\top(t)P^{-1} [A + BK] x(t) + 2x^\top(t)P^{-1}Dx(t - \tau) \\ &\quad + 2x^\top(t)P^{-1}f(t, x(t)) + 2x^\top(t)P^{-1}g(t, x(t - \tau)) \quad (3.36) \\ &\quad + 2x^\top(t)P^{-1}\Delta A(t)x(t) + 2x^\top(t)P^{-1}\Delta B(t)Kx(t) \\ &\quad + 2x^\top(t)P^{-1}\Delta D(t)x(t - \tau). \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 1.6.1 và Giả thiết 3.2.1, ta thu được các đánh giá sau

$$\begin{aligned} 2x^\top(t)P^{-1}\Delta A(t) x(t) &\leq \varepsilon_1 x^\top(t)P^{-1}E_a E_a^\top P^{-1}x(t) \\ &\quad + \varepsilon_1^{-1}x^\top(t)H_a^\top H_a x(t), \\ 2x^\top(t)P^{-1}\Delta B(t) K x(t) &\leq \varepsilon_2 x^\top(t)P^{-1}E_b E_b^\top P^{-1}x(t) \\ &\quad + \varepsilon_2^{-1}x^\top(t)K^\top H_b^\top H_b K x(t), \quad (3.37) \\ 2x^\top(t)P^{-1}\Delta D(t)x(t - \tau) &\leq \varepsilon_3 x^\top(t)P^{-1}E_d E_d^\top P^{-1}x(t) \\ &\quad + \varepsilon_3^{-1}x^\top(t - \tau)H_d^\top H_d x(t - \tau). \end{aligned}$$

Mặt khác, từ điều kiện (3.31) của Giả thiết 3.2.2, suy ra

$$\begin{aligned} 0 &\leq x^\top(t)Qx(t) - f^\top(t, x(t))f(t, x(t)), \\ 0 &\leq x^\top(t - \tau)Gx(t - \tau) - g^\top(t, x(t - \tau))g(t, x(t - \tau)). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} 0 &= -\tau x^\top(t)P^{-1}x(t) + \tau x^\top(t)P^{-1}x(t), \\ 0 &= -\tau x^\top(t - \tau)P^{-1}x(t - \tau) + \tau x^\top(t - \tau)P^{-1}x(t - \tau), \quad (3.39) \\ 0 &= x^\top(t)[M + K^\top RK]x(t) - x^\top(t)[M + K^\top RK]x(t). \end{aligned}$$

Do đó, từ các biểu thức (3.36)–(3.39), ta thu được đánh giá sau

$$\begin{aligned} {}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}V(x(t)) &\leq \eta(t)\Omega\eta^\top(t) + \tau x^\top(t - \tau)P^{-1}x(t - \tau) \\ &\quad + \tau x^\top(t)P^{-1}x(t) - x^\top(t)[M + K^\top RK]x(t), \end{aligned} \quad (3.40)$$

trong đó $\eta(t) = [x(t), x(t - \tau), f(t, x(t)), g(t, x(t - \tau))]$, $\Omega = [\Omega_{ij}]_{4 \times 4}$,

$$\begin{aligned}\Omega_{11} &= P^{-1}A + A^\top P^{-1} + P^{-1}BK + K^\top B^\top P^{-1} + Q - \tau P^{-1} + M + K^\top RK \\ &\quad + \varepsilon_1 P^{-1}E_a E_a^\top P^{-1} + \varepsilon_1^{-1} H_a^\top H_a + \varepsilon_2 P^{-1}E_b E_b^\top P^{-1} + \varepsilon_2^{-1} K^\top H_b^\top H_b K \\ &\quad + \varepsilon_3 P^{-1}E_d E_d^\top P^{-1}, \\ \Omega_{12} &= P^{-1}D, \quad \Omega_{13} = P^{-1}, \quad \Omega_{14} = P^{-1}, \\ \Omega_{22} &= \varepsilon_3^{-1} H_d^\top H_d + G - \tau P^{-1}, \quad \Omega_{23} = 0, \quad \Omega_{24} = 0, \\ \Omega_{33} &= -I, \quad \Omega_{34} = 0, \quad \Omega_{44} = -I.\end{aligned}$$

Điều kiện $\Omega < 0$ tương đương với

$$\bar{\Omega} = \text{diag}\{P, P, I, I\} \Omega \text{diag}\{P, P, I, I\} < 0,$$

trong đó

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= [\bar{\Omega}_{ij}]_{4 \times 4}, \quad K = YP^{-1}, \\ \bar{\Omega}_{11} &= AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \varepsilon_1 E_a E_a^\top + \varepsilon_2 E_b E_b^\top + \varepsilon_3 E_d E_d^\top \\ &\quad - \tau P + PQP + PMP + Y^\top RY + \varepsilon_1^{-1} P H_a^\top H_a P + \varepsilon_2^{-1} Y^\top H_b^\top H_b Y, \\ \bar{\Omega}_{12} &= DP, \quad \bar{\Omega}_{13} = I, \quad \bar{\Omega}_{14} = I, \\ \bar{\Omega}_{22} &= \varepsilon_3^{-1} P H_d^\top H_d P + PGP - \tau P, \quad \bar{\Omega}_{23} = 0, \quad \bar{\Omega}_{24} = 0, \\ \bar{\Omega}_{33} &= -I, \quad \bar{\Omega}_{34} = 0, \quad \bar{\Omega}_{44} = -I.\end{aligned}$$

Theo Bổ đề 1.6.9 (Bổ đề Schur), bất đẳng thức $\bar{\Omega} < 0$ tương đương với điều kiện (3.35a). Do đó, từ (3.40), ta suy ra

$$\begin{aligned}{}^{\text{TC}}D_0^{\alpha, \lambda} V(x(t)) &\leq \tau x^\top(t - \tau) P^{-1} x(t - \tau) + \tau x^\top(t) P^{-1} x(t) \\ &\quad - x^\top(t) [M + K^\top RK] x(t).\end{aligned}\tag{3.41}$$

Vì M và R là các ma trận đối xứng xác định dương, nên $M + K^\top RK$ cũng xác định dương, do đó

$${}^{\text{TC}}D_0^{\alpha, \lambda} V(x(t)) - \tau V(x(t)) \leq \tau V(x(t - \tau)).\tag{3.42}$$

Đến đây, chúng tôi chia quá trình chứng minh thành hai bước:

Bước 1: Chứng minh hệ đóng (3.33) là ổn định vững trong thời gian hữu hạn

đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) .

Để thuận tiện cho việc trình bày, ta đặt

$$\Upsilon(t) = {}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda} V(x(t)) - \tau V(x(t)). \quad (3.43)$$

Áp dụng biến đổi Laplace (như đã nêu trong Bổ đề 1.1.21) cho hai vế của (3.43), ta thu được biểu thức sau

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\Upsilon(t)](s) &= \mathcal{L} \left[{}^{TC}D_0^{\alpha, \lambda} V(x(t)) \right] (s) - \tau \mathcal{L}[V(x(t))](s) \\ &= (s + \lambda)^\alpha \mathcal{L}[V(x(t))](s) - (s + \lambda)^{\alpha-1} V(x(0)) - \tau \mathcal{L}[V(x(t))](s) \\ &= [(s + \lambda)^\alpha - \tau] \mathcal{L}[V(x(t))](s) - (s + \lambda)^{\alpha-1} V(x(0)). \end{aligned}$$

Từ đó, ta có

$$\mathcal{L}[V(x(t))](s) = \frac{1}{(s + \lambda)^\alpha - \tau} \mathcal{L}[\Upsilon(t)](s) + \frac{(s + \lambda)^{\alpha-1}}{(s + \lambda)^\alpha - \tau} V(x(0)). \quad (3.44)$$

Áp dụng Bổ đề 1.1.20, ta có

$$\begin{aligned} \frac{(s + \lambda)^{\alpha-1}}{(s + \lambda)^\alpha - \tau} &= \mathcal{L}[E_\alpha(\tau t^\alpha)](s + \lambda) = \mathcal{L}[E_\alpha(\tau t^\alpha) e^{-\lambda t}](s), \\ \frac{1}{(s + \lambda)^\alpha - \tau} &= \mathcal{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\tau t^\alpha)](s + \lambda) = \mathcal{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\tau t^\alpha) e^{-\lambda t}](s). \end{aligned}$$

Do đó, ta thu được

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V(x(t))](s) &= \mathcal{L}[E_\alpha(\tau t^\alpha) e^{-\lambda t}](s) V(x(0)) \\ &\quad + \mathcal{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\tau t^\alpha) e^{-\lambda t}](s) \cdot \mathcal{L}[\Upsilon(t)](s) \\ &= \mathcal{L}[E_\alpha(\tau t^\alpha) e^{-\lambda t}](s) V(x(0)) \\ &\quad + \mathcal{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\tau t^\alpha) e^{-\lambda t} * \Upsilon(t)](s) \\ &= \mathcal{L}[e^{-\lambda t} E_\alpha(\tau t^\alpha)](s) V(x(0)) \\ &\quad + \mathcal{L} \left[\int_0^t e^{-\lambda(t-\mu)} (t - \mu)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\tau(t-\mu)^\alpha) \Upsilon(\mu) d\mu \right] (s). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Áp dụng phép biến đổi Laplace ngược cho hai vế của phương trình (3.45), ta

thu được

$$\begin{aligned}
V(x(t)) &= e^{-\lambda t} E_\alpha(\tau t^\alpha) V(x(0)) + \int_0^t e^{-\lambda(t-\mu)} (t-\mu)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\tau(t-\mu)^\alpha) \Upsilon(\mu) d\mu \\
&= e^{-\lambda t} E_\alpha(\tau t^\alpha) V(x(0)) \\
&\quad + \int_0^t e^{-\lambda(t-\mu)} (t-\mu)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\tau(t-\mu)^\alpha) e^{-\lambda(\mu-\tau)} \left[e^{\lambda(\mu-\tau)} \Upsilon(\mu) \right] d\mu \\
&\leq e^{-\lambda t} E_\alpha(\tau t^\alpha) V(x(0)) \\
&\quad + e^{-\lambda(t-\tau)} \int_0^t (t-\mu)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\tau(t-\mu)^\alpha) \left[e^{\lambda(\mu-\tau)} \Upsilon(\mu) \right] d\mu \\
&\leq e^{-\lambda t} E_\alpha(\tau t^\alpha) V(x(0)) \\
&\quad + e^{-\lambda(t-\tau)} \tau \sup_{\theta \in [0, t]} \left[e^{\lambda(\theta-\tau)} V(x(\theta-\tau)) \right] \int_0^t (t-\mu)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\tau(t-\mu)^\alpha) d\mu \\
&= e^{-\lambda t} E_\alpha(\tau t^\alpha) V(x(0)) \\
&\quad + e^{-\lambda(t-\tau)} \sup_{\theta \in [0, t]} \left[e^{\lambda(\theta-\tau)} V(x(\theta-\tau)) \right] (E_\alpha(\tau t^\alpha) - 1), \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned}
e^{\lambda t} V(x(t)) &\leq E_\alpha(\tau t^\alpha) V(x(0)) \\
&\quad + e^{\lambda \tau} \sup_{\theta \in [0, t]} \left[e^{\lambda(\theta-\tau)} V(x(\theta-\tau)) \right] (E_\alpha(\tau t^\alpha) - 1), \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Mặt khác, từ Bổ đề 1.6.6, do hàm Mittag-Leffler $E_\alpha(\tau t^\alpha)$ không giảm và $E_\alpha(\tau t^\alpha) \geq 1$ với mọi $t \geq 0$. Do đó, với mọi $\theta \in [-\tau, 0]$ và $t \in [0, T]$, ta có

$$e^{\lambda \theta} x^\top(\theta) P^{-1} x(\theta) = e^{\lambda \theta} \varphi^\top(\theta) P^{-1} \varphi(\theta) \leq E_\alpha(\tau t^\alpha) \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \varphi^\top(\theta) P^{-1} \varphi(\theta). \tag{3.47}$$

Kết hợp hai bất đẳng thức (3.46) và (3.47), với $-\tau \leq \theta \leq t$ và $t \in [0, T]$, ta thu được đánh giá sau

$$\begin{aligned}
e^{\lambda t} V(x(t)) &\leq E_\alpha(\tau t^\alpha) \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \varphi^\top(\theta) P^{-1} \varphi(\theta) \\
&\quad + e^{\lambda \tau} \sup_{\theta \in [0, t]} \left[e^{\lambda(\theta-\tau)} V(x(\theta-\tau)) \right] (E_\alpha(\tau t^\alpha) - 1).
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Từ đó, suy ra

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in [-\tau, t]} e^{\lambda t} V(x(\theta)) &\leq E_\alpha(\tau t^\alpha) \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \varphi^\top(\theta) P^{-1} \varphi(\theta) \\ &\quad + e^{\lambda \tau} (E_\alpha(\tau t^\alpha) - 1) \sup_{\theta \in [-\tau, t-\tau]} e^{\lambda \theta} V(x(\theta)). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Áp dụng Bổ đề 1.6.7 cho bất đẳng thức (3.49), với

$$\Pi(t) = \sup_{\theta \in [-\tau, t]} e^{\lambda \theta} V(x(\theta)), \quad \varsigma_1 = E_\alpha(\tau t^\alpha), \quad \varsigma_2 = e^{\lambda \tau} (E_\alpha(\tau t^\alpha) - 1),$$

ta thu được

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in [-\tau, t]} e^{\lambda \theta} V(x(\theta)) &\leq E_\alpha(\tau t^\alpha) \sum_{j=0}^{\lfloor T/\tau \rfloor + 1} e^{\lambda \tau j} (E_\alpha(\tau t^\alpha) - 1)^j \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} V(x(\theta)) \\ &\leq E_\alpha(\tau T^\alpha) \sum_{j=0}^{\lfloor T/\tau \rfloor + 1} e^{\lambda \tau j} (E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1)^j \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} V(x(\theta)) \quad (3.50) \\ &= \gamma \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} V(x(\theta)) = \gamma \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} x^\top(\theta) P^{-1} x(\theta) \\ &\leq \gamma \lambda_{\max}(P^{-1}) \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|^2 = \frac{\gamma}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2, \end{aligned}$$

Từ đó, suy ra

$$\begin{aligned} \|x(t)\|^2 &\leq \frac{x(t)^\top P^{-1} x(t)}{\lambda_{\min}(P^{-1})} \\ &= \lambda_{\max}(P) e^{-\lambda t} e^{\lambda t} x(t)^\top P^{-1} x(t) \\ &\leq \lambda_{\max}(P) e^{-\lambda t} \sup_{\theta \in [-\tau, t]} e^{\lambda \theta} V(x(\theta)) \\ &\leq e^{-\lambda t} \frac{\gamma \lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Từ (3.50) kết hợp với điều kiện (3.35b), suy ra nếu

$$\|\varphi\|^2 \leq c_1, \text{ thì } \|x(t)\|^2 \leq \frac{\gamma \lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} c_1 < c_2.$$

Do đó, hệ đóng (3.33) ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (c_1, c_2, T) .

Bước 2: Để xác định giá trị chi phí đảm bảo của hệ (3.30). Từ bất đẳng thức (3.41) và (3.50), ta suy ra

$$\begin{aligned}
{}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}V(x(t)) &\leq \tau x^\top(t-\tau)P^{-1}x(t-\tau) + \tau x^\top(t)P^{-1}x(t) \\
&\quad - x^\top(t)[M + K^\top RK]x(t) \\
&\leq e^{-\lambda t} \frac{2\gamma\tau}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 - x^\top(t)[M + K^\top RK]x(t).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Lấy tích phân cấp phân số Caputo với nhân suy giảm cấp α cho hai vế của bất đẳng thức (3.51), ta thu được

$$\begin{aligned}
V(x(t)) - e^{-\lambda t}V(x(0)) &= {}^T I_0^{\alpha,\lambda} \left[{}^{TC}D_0^{\alpha,\lambda}V(x(t)) \right] \\
&\leq {}^T I_0^{\alpha,\lambda} \left[e^{-\lambda t} \frac{2\gamma\tau}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 \right] - {}^T I_0^{\alpha,\lambda} [x^\top(t)[M + K^\top RK]x(t)] \\
&= \frac{2\gamma\tau}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}(t-s)^{\alpha-1} e^{-\lambda s} ds - J(t) \\
&\leq e^{-\lambda t} \frac{2\gamma\tau}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds - J(t) \\
&\leq e^{-\lambda t} \frac{2\gamma\tau}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - J(t), \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Mặt khác, do $V(x(t)) \geq 0$, ta suy ra

$$\begin{aligned}
J(t) &\leq e^{-\lambda t}V(x(0)) - V(x(t)) + e^{-\lambda t} \frac{2\gamma\tau}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\leq \|\varphi\|^2 \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} + \frac{2\gamma\tau}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2 \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = J^*, \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Điều này kết thúc phần chứng minh Định lý 3.2.6. □

Nhận xét 3.2.7. Các kết quả thu được trong Mục 3.2 đề xuất một hướng tiếp cận mới cho bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn đối với lớp hệ phi tuyến không chắc chắn cấp phân số với nhân suy giảm có trễ. Khác với các công trình trước đó như [43, 44, 54, 60, 65, 67] và các nghiên cứu gần đây [24, 88] chủ yếu tập trung vào bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn hoặc thiết kế điều khiển mà chưa xét đến ràng buộc hiệu suất, nghiên cứu này thiết lập được một chặn trên cho hàm chi phí trong một khoảng thời gian hữu hạn, ngay cả khi tồn tại tham số không chắc chắn và trễ. Đây là một đóng góp đáng kể so với các phương pháp hiện có.

Ví dụ số sau được sử dụng để kiểm chứng các kết quả lý thuyết thu được.

Ví dụ 3.2.8. Xét hệ động lực được mô tả bởi phương trình

$$\begin{cases} {}^{TC}D_0^{0.1, 0.1}x(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (D + \Delta D(t))x_\tau(t) \\ \quad + f(t, x(t)) + g(t, x_\tau(t)) + (B + \Delta B(t))u(t), \quad t \geq 0, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-0.5, 0], \end{cases} \quad (3.52)$$

với $x_\tau(t) = x(t - \tau)$ và véc tơ trạng thái $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2$. Các ma trận liên quan đến hệ được cho bởi

$$A = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Các ma trận liên quan đến cấu trúc không chắc chắn được cho bởi

$$E_a = E_b = E_d = H_a = H_b = H_d = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}.$$

Các hàm kích hoạt phi tuyến $f(t, x(t))$ và $g(t, x(t))$ có dạng

$$\begin{aligned} f(t, x(t)) &= 0.01 \begin{pmatrix} x_1(t) & \sqrt{x_1^2(t) + 2x_2^2(t)} \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2, \\ g(t, x(t - 0.5)) &= 0.01 \begin{pmatrix} \sqrt{2x_1^2(t - 0.5) + x_2^2(t - 0.5)} & x_2(t - 0.5) \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

thỏa mãn điều kiện (3.31) của Giả thiết 3.2.2 với

$$Q = G = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}.$$

Các ma trận của hàm chi phí toàn phương (3.34) liên quan đến hệ (3.52) được cho như sau

$$M = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}.$$

Sử dụng LMI Toolbox trong MATLAB, điều kiện LMI (3.35a) được thỏa mãn với

$$P = \begin{bmatrix} 2.6266 & -0.2599 \\ -0.2599 & 2.6003 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0.5910 & -0.1082 \\ -0.1395 & -4.9204 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_1 = 1.4564, \quad \varepsilon_2 = 1.4563, \quad \varepsilon_3 = 1.4570.$$

Hơn nữa, khi chọn các giá trị

$$c_1 = 0.1, \quad c_2 = 0.5, \quad \tau = 0.5, \quad T = 5,$$

thì điều kiện bất đẳng thức (3.35b) trong Định lý 3.2.6 được thỏa mãn, vì

$$c_1 E_\alpha(\tau T^\alpha) \sum_{j=0}^{[T/\tau]+1} e^{\lambda \tau j} (E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1)^j \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} = 0.4332 < c_2 = 0.5.$$

Vậy, theo Định lý 3.2.6, hệ (3.52) là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (0.1, 0.5, 5) dưới tác động của luật điều khiển phản hồi trạng thái

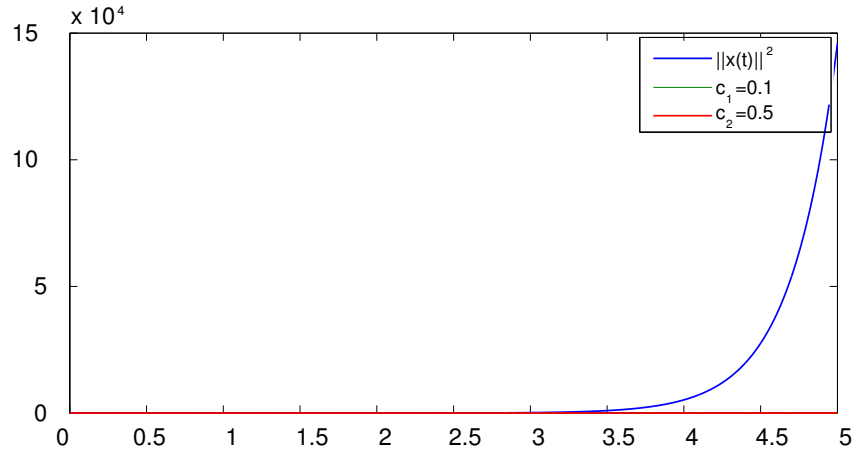
$$u(t) = \begin{bmatrix} 0.2231 & -0.0193 \\ -0.2427 & -1.9165 \end{bmatrix} x(t).$$

Với chi phí đảm bảo cho hệ đóng là

$$J^* = \frac{\|\varphi\|^2}{\lambda_{\min}(P)} \left(1 + \frac{2\gamma\tau T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) = 0.2058.$$

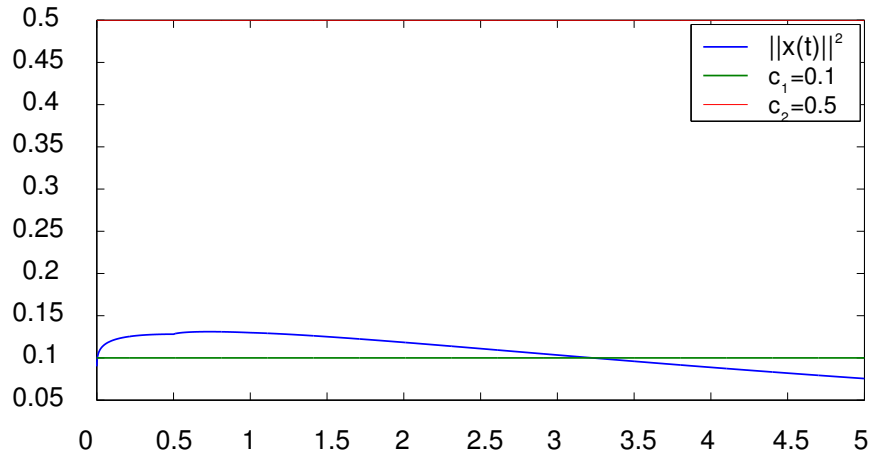
Kết quả mô phỏng cho thấy rằng, với điều kiện ban đầu

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in [-0.5, 0].$$



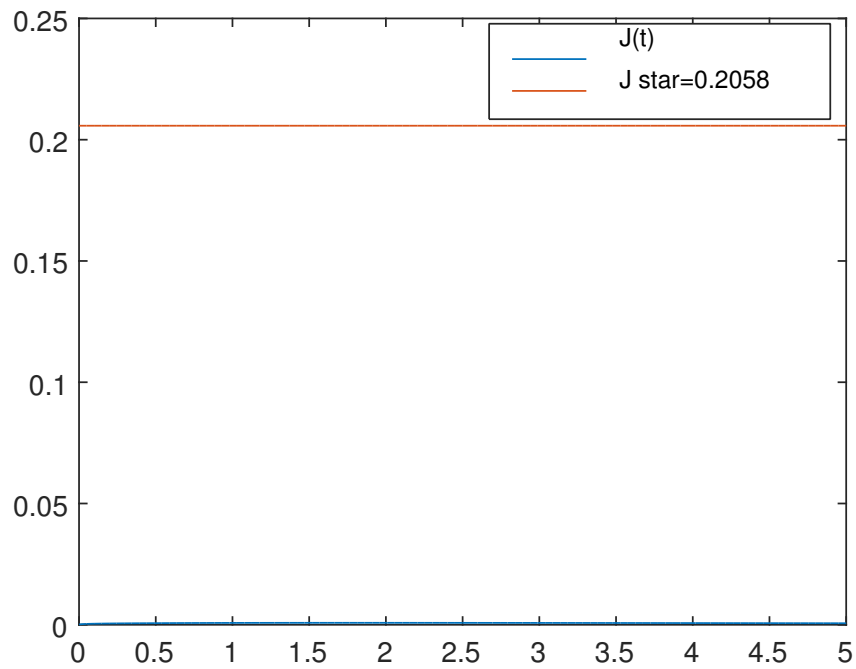
Hình 3.4: Quỹ đạo của $\|x(t)\|^2$ khi không có điều khiển trong Ví dụ 3.2.8.

Hình 3.4 thể hiện quỹ đạo của $\|x(t)\|^2$ trong trường hợp không áp dụng điều khiển, cho thấy rằng hệ không ổn định vững trong thời gian hữu hạn.



Hình 3.5: Quỹ đạo của $\|x(t)\|^2$ khi có điều khiển $u(t)$ trong Ví dụ 3.2.8.

Hình 3.5 minh họa hiệu quả của luật điều khiển được thiết kế, qua đó khẳng định rằng hệ đóng ổn định vững trong thời gian hữu hạn.



Hình 3.6: Quỹ đạo của $J(t)$ với $J^* = 0.2058$ trong Ví dụ 3.2.8.

Hình 3.6 biểu diễn hàm chi phí $J(t)$ luôn nhỏ hơn hằng số cho trước

$$J^* = 0.2058.$$

Tiếp theo, chúng tôi xét một ví dụ thực tiễn sau đây liên quan đến mô hình hệ nơ-ron cấp phân số với nhân suy giảm với trễ hằng số.

Ví dụ 3.2.9. Với mọi $t \geq 0$, xét hệ sau

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{TC}D_0^{0.1, 0.1}x(t) = (A + E_a F_1(t) H_a)x(t) + (D + E_d F_3(t) H_d)x(t-0.5) \\ \quad + f(t, x(t)) + g(t, x(t-0.5)) \\ \quad + (B + E_b F_2(t) H_b)u(t), \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-0.5, 0], \end{array} \right. \quad (3.53)$$

trong đó $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2$ là véc tơ trạng thái của hệ nơ-ron và các ma trận liên quan đến hệ được xác định như sau

$$A = \begin{bmatrix} -1.2 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1.21 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0.1 \\ 0.1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$E_a = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}, H_a = E_b = E_d = H_b = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$F_1(t) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos t \end{bmatrix}, F_2(t) = \cos t, F_3(t) = \sin t.$$

Các hàm kích hoạt phi tuyến $f(t, x(t))$ và $g(t, x(t))$ được cho bởi

$$f(t, x(t)) = \begin{bmatrix} |x_1(t) + 1| - |x_1(t) - 1| \\ |x_2(t) + 1| - |x_2(t) - 1| \end{bmatrix},$$

$$g(t, x(t-0.5)) = \begin{bmatrix} \tanh x_1(t-0.5) \\ \tanh x_2(t-0.5) \end{bmatrix},$$

thỏa mãn điều kiện (3.31) của Giả thiết 3.2.2 với

$$Q = G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Các ma trận của hàm chi phí toàn phương (3.34) liên quan đến hệ (3.53) được cho bởi

$$M = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}.$$

Sử dụng LMI Toolbox trong MATLAB, điều kiện LMI (3.35a) trong Định lý 3.2.6 cho nghiệm như sau

$$P = \begin{bmatrix} 0.2230 & 0 \\ 0 & 0.2373 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -2.1290 & 0.0705 \\ 0.0705 & -1.4511 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_1 = 7.3979, \quad \varepsilon_2 = 7.3980, \quad \varepsilon_3 = 7.3980.$$

Tiếp theo, với các số dương được chọn $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.5$, $T = 5$, điều kiện (3.35b) trong Định lý 3.2.6 được thỏa mãn với

$$c_1 E_\alpha(\tau T^\alpha) \sum_{j=0}^{[T/\tau]+1} e^{\lambda \tau j} (E_\alpha(\tau T^\alpha) - 1)^j \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} = 0.3776 < c_2 = 0.5.$$

Như vậy, theo Định lý 3.2.6, hệ (3.53) là ổn định vững trong thời gian hữu hạn đối với bộ tham số (0.1, 0.5, 5) dưới tác động của luật điều khiển phản hồi trạng thái

$$u(t) = \begin{bmatrix} -9.5477 & 0.2970 \\ 0.3241 & -6.1140 \end{bmatrix} x(t).$$

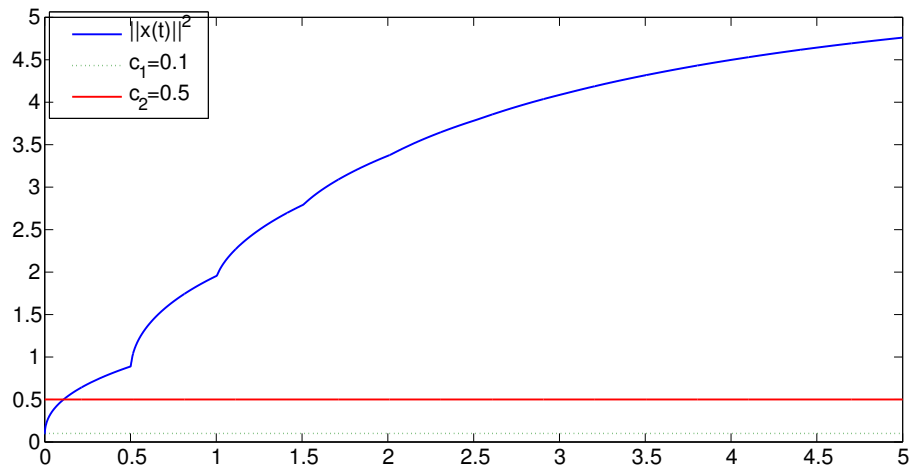
Với giá trị đảm bảo chi phí điều khiển là

$$J^* = \frac{\|\varphi\|^2}{\lambda_{\min}(P)} \left(1 + \frac{2\gamma\tau T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) = 2.1713.$$

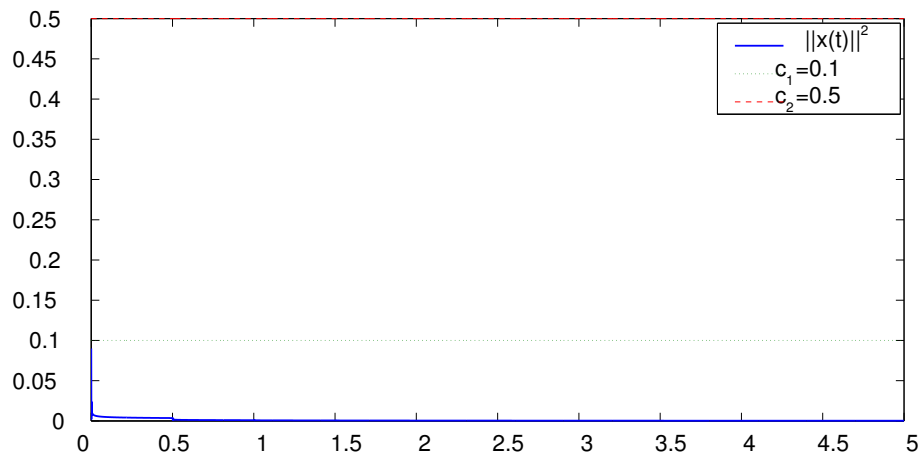
Kết quả mô phỏng cho thấy, với điều kiện ban đầu được chọn là

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in [-0.5, 0].$$

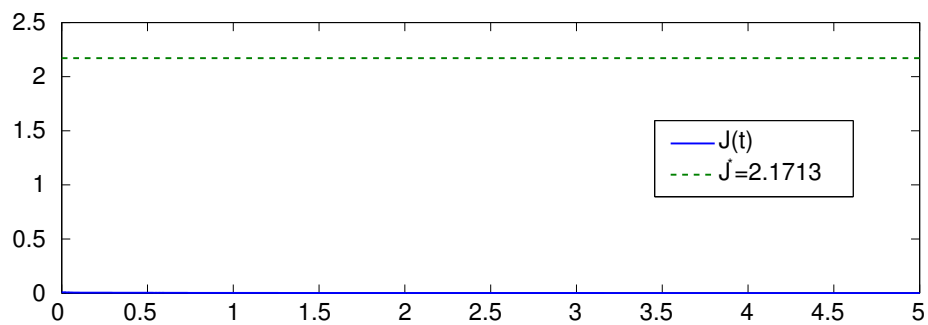
- Hình 3.7 minh họa quỹ đạo của $\|x(t)\|^2$ đối với hệ (3.53) khi không có điều khiển, cho thấy rằng hệ không ổn định vững trong thời gian hữu hạn.
- Hình 3.8, có thể thấy rằng hệ điều khiển được thiết kế đạt tính ổn định vững trong thời gian hữu hạn.
- Hình 3.9 biểu diễn quỹ đạo của hàm chi phí $J(t)$, từ đó cho thấy rằng $J(t)$ luôn nhỏ hơn $J^* = 2.1713$.



Hình 3.7: Quỹ đạo của $\|x(t)\|^2$ khi không có điều khiển trong Ví dụ 3.2.9.



Hình 3.8: Quỹ đạo của $\|x(t)\|^2$ khi có điều khiển $u(t)$ trong Ví dụ 3.2.9.



Hình 3.9: Quỹ đạo của hàm chi phí $J(t)$ với $J^* = 2.1713$ trong Ví dụ 3.2.9.

3.3 Kết luận chương 3

Trong chương này, luận án đã nghiên cứu bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho hai lớp hệ cấp phân số. Đầu tiên, chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ tổ hợp lồi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên. Tiếp theo, luận án nghiên cứu bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phi tuyến không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có trễ hằng số. Các kết quả chính đạt được như sau:

- Đối với lớp hệ tổ hợp lồi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên, luận án đã thiết lập các điều kiện đủ cho sự tồn tại của luật điều khiển phản hồi trạng thái đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính, trên cơ sở sử dụng phương pháp hàm Lyapunov.
- Đối với lớp hệ phi tuyến không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có trễ hằng số, luận án đã sử dụng Bổ đề 1.6.5 về đạo hàm Caputo với nhân suy giảm của dạng toàn phương để thiết lập các điều kiện đủ cho sự tồn tại của luật điều khiển phản hồi trạng thái đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính, trên cơ sở sử dụng phương pháp hàm Lyapunov.
- Các ví dụ số và mô phỏng được xây dựng nhằm minh họa tính khả thi của các điều kiện đủ đã thiết lập. Kết quả mô phỏng cho thấy các điều kiện lý thuyết thu được có thể được kiểm chứng bằng tính toán số.

KẾT LUẬN

Luận án nghiên cứu tính ổn định trong thời gian hữu hạn của một số lớp hệ phương trình vi phân cấp phân số và một số bài toán liên quan.

Các kết quả chính của luận án

- Đưa ra một số điều kiện đủ cho bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn đối với lớp hệ nơ-ron phi tuyến không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có nhiều và trễ hằng số (Định lý 2.1.5), cũng như bài toán tiêu hao mở rộng trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron phi tuyến không chắc chắn cấp phân số Caputo có nhiều (Định lý 2.2.6).
- Đưa ra một số điều kiện đủ cho bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn đối với lớp hệ tổ hợp lỗi cấp phân số Caputo có trễ biến thiên (Định lý 3.1.4), cũng như lớp hệ phi tuyến không chắc chắn cấp phân số Caputo với nhân suy giảm có trễ hằng số (Định lý 3.2.6).

Bên cạnh các kết quả nêu trên, một khó khăn đáng chú ý trong quá trình nghiên cứu xuất phát từ tính phi địa phương của các toán tử đạo hàm cấp phân số, ảnh hưởng của trạng thái trễ và đặc biệt là sự xuất hiện của nhân suy giảm trong đạo hàm Caputo với nhân suy giảm. Để xử lý những khó khăn này, luận án đã thiết lập các bổ đề bổ trợ thích hợp cho đạo hàm Caputo với nhân suy giảm, đồng thời kết hợp phương pháp hàm Lyapunov, phép biến đổi Laplace, các tính chất của hàm Mittag–Leffler và kỹ thuật bất đẳng thức ma trận tuyến tính để xây dựng các điều kiện đủ cho các bài toán được nghiên cứu.

Hướng nghiên cứu tiếp theo

Từ các kết quả nghiên cứu của luận án, có thể tiếp tục phát triển các hướng nghiên cứu về ổn định trong thời gian hữu hạn, tiêu hao, thụ động, điều khiển đảm bảo chi phí và điều khiển H_∞ cho một số lớp hệ động lực cấp phân số khác, chẳng hạn như hệ hai pha, hệ quy mô lớn và hệ chuyển mạch. Các bài toán này có thể được tiếp cận theo phương pháp hàm Lyapunov kết hợp với các công cụ giải tích cấp phân số và bất đẳng thức ma trận.

Danh mục các công trình của tác giả đã công bố liên quan đến đề tài luận án

- [CT1] T.N. Tuan, N.T. Thanh, M.V. Thuan (2023), “New results on robust finite-time extended dissipativity for uncertain fractional-order neural networks”, *Neural Processing Letters*, **55**, pp 9635–9650 (Q3/WoS, Q2/Scimago).
- [CT2] N.T. Thanh, M.V. Thuan, T.N. Tuan (2023), “New results on finite-time guaranteed cost control of uncertain polytopic fractional-order systems with time-varying delays”, *Optimal Control Applications and Methods*, **44**(5) pp 2504-2516 (Q2/WoS, Q2/Scimago).
- [CT3] T.N. Tuan, M.V. Thuan, N.T. Thanh (2025), “Finite-time guaranteed cost control for tempered nonlinear fractional-order systems with delays: A novel stability approach”, *Computational and Applied Mathematics*, **44**, Article 335(Q1/WoS, Q2/Scimago).
- [CT4] T.N. Tuan, N.T. Thanh, M.V. Thuan, N.T.T. Huyen (2026), “Finite-time dissipativity analysis of uncertain tempered fractional-order neural networks with delays via LMI approach”, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **72**, Article 59 (Q1/WoS, Q2/Scimago).

Tài liệu tham khảo

- [1] F. Amato, R. Ambrosino, M. Ariola, C. Cosentino, G. De Tommasi (2014), “Finite-time stability and control”, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, **453**, Springer, London.
- [2] M. Bahreini, J. Zarei (2020), “Robust finite-time fault-tolerant control for networked control systems with random delays: A Markovian jump system approach”, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **36**, Article 100873.
- [2] K. Balachandran (2019), “An introduction to fractional differential equations”, *Industrial and Applied Mathematics*, Springer, Cham.
- [3] D. Baleanu, O.G. Mustafa (2010), “On the global existence of solutions to a class of fractional differential equations”, *Computers and Mathematics with Applications*, **59**(5), pp. 1835–1841.
- [4] A. Boroomand, M.B. Menhaj (2009), “Fractional-order Hopfield neural networks”, *Lecture Notes in Computer Science*, **5506**, pp. 883–890.
- [5] S. Boyd, L. El Ghaoui, V. Balakrishnan (1994), “Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory”, *SIAM*, Philadelphia.
- [6] R.G. Buschman (1972), “Decomposition of an integral operator by use of Mikusinski calculus”, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **3**, pp. 83–85.
- [7] M. Caputo, F. Mainardi (1971), “A new dissipation model based on memory mechanism”, *Pure and Applied Geophysics*, **91**(8), pp. 134–147.
- [8] S.S.L. Chang, T.K.C. Peng (1972), “Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **17**(4), pp. 474–483.
- [9] C. Chen, S. Zhu, Y. Wei (2018), “Finite-time stability of delayed memristor-based fractional-order neural networks”, *IEEE Transactions on Cybernetics*, **50**(4), pp. 1607–1616.

- [10] L. Chen, C. Liu, R. Wu, Y. He, Y. Chai (2016), “Finite-time stability criteria for a class of fractional-order neural networks with delay”, *Neural Computing and Applications*, **27**, pp. 549–556.
- [11] L. Chen, R. Wu, L. Yuan, L. Yin, Y. Chen, S. Xu (2021), “Guaranteed cost control of fractional-order linear uncertain systems with time-varying delay”, *Optimal Control Applications and Methods*, **42**(4), pp. 1102–1118.
- [12] K. Diethelm (2010), “The analysis of fractional differential equations. An application oriented exposition using differential operators of Caputo type”, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, Berlin.
- [13] Z. Ding, Z. Zeng, L. Wang (2017), “Robust finite-time stabilization of fractional-order neural networks with discontinuous and continuous activation functions under uncertainty”, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **29**(5), pp. 1477–1490.
- [14] Z. Ding, Z. Zeng, H. Zhang, L. Wang, L. Wang (2019), “New results on passivity of fractional-order uncertain neural networks”, *Neurocomputing*, **351**, pp. 51–59.
- [15] Z. Ding, G. Cheng, Y. Ju (2022), “Finite time extended dissipative control for a class of linear neutral semi-Markovian jumping systems under event-triggering scheme”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **45**(9), pp. 5341–5359.
- [16] P. Dorato (1961), “Short time stability in linear time-varying systems”, *Proceedings of the IRE International Convention Record*, **4**, pp. 83–87.
- [17] F. Du, J.G. Lu (2020), “New criteria on finite-time stability of fractional-order Hopfield neural networks with time delays”, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **32**(9), pp. 3858–3866.
- [18] F. Du, J.G. Lu (2022), “Finite-time stability of fractional-order fuzzy cellular neural networks with time delays”, *Fuzzy Sets and Systems*, **438**, pp. 107–120.
- [19] F. Du, J.G. Lu (2022), “New results on finite-time stability of fractional-order Cohen–Grossberg neural networks with time delays”, *Asian Journal of Control*, **24**(5), pp. 2328–2337.
- [20] T. Feng, B. Wu, L. Liu, Y.E. Wang (2019), “Finite-time stability and stabilization of fractional-order switched singular continuous-time systems”, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **38**, pp. 5528–5548.

- [21] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, M. Chilali (1995), “LMI control toolbox for use with MATLAB”, *The MathWorks*, Natick, MA.
- [22] H. Gao, J. Xia, G. Zhuang (2018), “Robust finite-time extended dissipative control for a class of uncertain switched delay systems”, *International Journal of Control, Automation and Systems*, **16**(3), pp. 1459–1468.
- [23] X. Gao, L. Lian, W. Qi (2017), “Finite-time dissipativity analysis and design for stochastic Markovian jump systems with generally uncertain transition rates and time-varying delay”, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, **39**(6), pp. 807–819.
- [24] H. Gassara, M. Tlija, L. Mchiri, A.B. Makhoulf (2024), “Finite time stability analysis and feedback control for Takagi–Sugeno fuzzy time delay fractional-order systems”, *Symmetry*, **16**(10), Article 1344.
- [25] C.Y. Gu, F.X. Zheng, B. Shiri (2021), “Mittag–Leffler stability analysis of tempered fractional neural networks with short memory and variable-order”, *Fractals*, **29**(8), Article 2140029.
- [26] X. Han, Y. Ma (2019), “Finite-time extended dissipative control for fuzzy systems with nonlinear perturbations via sampled-data and quantized controller”, *ISA Transactions*, **89**, pp. 31–44.
- [27] X. Han, Y. Ma, L. Fu (2020), “Finite-time dynamic output-feedback dissipative control for singular uncertainty T–S fuzzy systems with actuator saturation and output constraints”, *Journal of the Franklin Institute*, **357**(8), pp. 4543–4573.
- [28] D.J. Hill, P.J. Moylan (1976), “The stability of nonlinear dissipative systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **21**(5), pp. 708–711.
- [29] D.T. Hong, N.H. Sau, M.V. Thuan (2021), “Output feedback finite-time dissipative control for uncertain nonlinear fractional-order systems”, *Asian Journal of Control*, **24**(5), pp. 2284–2293.
- [30] D.T. Hong, N.H. Sau, M.V. Thuan (2022), “New criteria for dissipativity analysis of fractional-order static neural networks”, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **41**(4), pp. 2221–2243.
- [31] T. Kaczorek (2011), *Selected Problems of Fractional Systems Theory*, Springer.

- [32] G. Kamenkov (1953), “On stability of motion over a finite interval of time”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **17**, pp. 529–540.
- [33] T.D. Ke and L.T.P. Thuy, “Dissipativity and stability for semilinear anomalous diffusion equations involving delays”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **43**(15), pp. 1–17.
- [34] A.A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo (2006), “Theory and applications of fractional differential equations”, Elsevier, Amsterdam.
- [35] S. Krim, A. Salim, M. Benchohra (2023), “Nonlinear contractions and Caputo tempered implicit fractional differential equations in b -metric spaces with infinite delay”, *Filomat*, **37**(22), pp. 7491–7503.
- [36] S. Krim, A. Salim, M. Benchohra (2023), “On implicit Caputo tempered fractional boundary value problems with delay”, *Letters in Nonlinear Analysis: Applied*, **1**(1), pp. 12–29.
- [37] M.P. Lazarevic (2006), “Finite time stability analysis of PD^α fractional control of robotic time-delay systems”, *Mechanics Research Communications*, **33**, pp. 269–279.
- [38] B.K. Lenka (2019), “Time-varying Lyapunov functions and Lyapunov stability of nonautonomous fractional order systems”, *International Journal of Applied Mathematics*, **32**(1), pp. 111–130.
- [39] B. Li, S. Wo, J. Zhao, X. Ren (2019), “Finite-time guaranteed cost controller design for uncertain linear continuous-time singular systems”, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, **41**(12), pp. 3507–3515.
- [40] C. Li, W. Deng, L. Zhao (2019), “Well-posedness and numerical algorithm for the tempered fractional ordinary differential equations”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems–Series B*, **24**(4), pp. 1989–2015.
- [41] M. Li, X. Yang, Q. Song, X. Chen (2022), “Robust asymptotic stability and projective synchronization of time-varying delayed fractional neural networks under parametric uncertainty”, *Neural Processing Letters*, **54**, pp. 4661–4680.
- [42] S. Li, Y. Ma (2018), “Finite-time dissipative control for singular Markovian jump systems via quantizing approach”, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **27**, pp. 323–340.

- [43] L. Liu, X. Cao, Z. Fu, S. Song, H. Xing (2019), “Guaranteed cost finite-time control of fractional-order nonlinear positive switched systems with D-perturbations via MDADT”, *Journal of Systems Science and Complexity*, **32**(3), pp. 857–874.
- [44] L. Liu, Y. Di, Y. Shang, Z. Fu, B. Fan (2021), “Guaranteed cost and finite-time non-fragile control of fractional-order positive switched systems with asynchronous switching and impulsive moments”, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **40**(7), pp. 3143–3160.
- [45] Y. Liu, A. Arunkumar, R. Sakthivel, V. Nithya, F. Alsaadi (2020), “Finite-time event-triggered non-fragile control and fault detection for switched networked systems with random packet losses”, *Journal of the Franklin Institute*, **357**(16), pp. 11394–11420.
- [46] Y.J. Ma, B.W. Wu, Y.E. Wang (2016), “Finite-time stability and finite-time boundedness of fractional order linear systems”, *Neurocomputing*, **173**, pp. 2076–2082.
- [47] M. Meerschaert, F. Sabzikar, M. Phanikumar, A. Zeleke (2014), “Tempered fractional time series model for turbulence in geophysical flows”, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, pp. P09023.
- [48] M.M. Meerschaert, Y. Zhang, B. Baeumer (2008), “Tempered anomalous diffusion in heterogeneous systems”, *Geophysical Research Letters*, **35**, Article L17403.
- [49] P. Niamsup, K. Ratchagit, V.N. Phat (2015), “Novel criteria for finite-time stabilization and guaranteed cost control of delayed neural networks”, *Neurocomputing*, **160**, pp. 281–286.
- [50] K.B. Oldham, J. Spanier (1974), “The fractional calculus”, Academic Press, London.
- [51] X. Peng, H. Wu (2018), “Robust Mittag-Leffler synchronization for uncertain fractional-order discontinuous neural networks via non-fragile control strategy”, *Neural Processing Letters*, **48**(3), pp. 1521–1542.
- [52] I.R. Petersen, D.C. Macfarlane (1994), “Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**(9), pp. 1971–1977.

- [53] N.T. Phuong, N.T.T. Huyen, N.T.H. Thu, N.H. Sau, M.V. Thuan (2023), “New criteria for dissipativity analysis of Caputo fractional-order neural networks with non-differentiable time-varying delays”, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **24**(7), pp. 2649–2661.
- [54] N.T. Phuong, M.V. Thuan, N.H. Sau, N.H. Muoi (2024), “Non-fragile finite-time guaranteed cost control for a class of singular Caputo fractional-order systems with uncertainties”, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **43**(2), pp. 795–820.
- [55] Y. Qi, Y. Liu, W. Bao, X. Li, J. Cui, L. Zhu (2018), “Event-triggered and guaranteed cost finite-time H_∞ control for uncertain switched linear systems”, *Optimal Control Applications and Methods*, **39**(4), pp. 1337–1353.
- [56] C. Rajivganthi, F.A. Rihan, S. Lakshmanan, P. Muthukumar (2018), “Finite-time stability analysis for fractional-order Cohen–Grossberg BAM neural networks with time delays”, *Neural Computing and Applications*, **29**, pp. 1309–1320.
- [57] A. Salim, S. Krim, J.E. Lazreg, M. Benchohra (2023), “On Caputo tempered implicit fractional differential equations in b -metric spaces”, *Analysis*, **43**(2), pp. 129–139.
- [58] A. Salim, S. Krim, M. Benchohra (2023), “Three-point boundary value problems for implicit Caputo tempered fractional differential equations in b -metric spaces”, *European Journal of Mathematics and Applications*, **3**, Article 16.
- [59] M. Shafiya, G. Nagamani (2022), “Extended dissipativity criterion for fractional-order neural networks with time-varying parameter and interval uncertainties”, *Computational and Applied Mathematics*, **41**, Article 95.
- [60] Y. Shang, L. Liu, Y. Di, Z. Fu, B. Fan (2021), “Guaranteed cost and finite-time event-triggered control of fractional-order switched systems”, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, **43**(12), pp. 2724–2733.
- [61] M. Shen, S. Yan, G. Zhang, J.H. Park (2016), “Finite-time H_∞ static output control of Markov jump systems with an auxiliary approach”, *Applied Mathematics and Computation*, **273**, pp. 553–561.

- [62] Q. Song, Y. Chen, Z. Zhao, Y. Liu, F.E. Alsaadi (2021), “Robust stability of fractional-order quaternion-valued neural networks with neutral delays and parameter uncertainties”, *Neurocomputing*, **420**, pp. 70–81.
- [63] N.T. Thanh, V.N. Phat (2018), “Improved approach for finite-time stability of nonlinear fractional-order systems with interval time-varying delay”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, **66**(8), pp. 1356–1360.
- [64] N.T. Thanh, P. Niamsup, V.N. Phat (2021), “New results on finite-time stability of fractional-order neural networks with time-varying delay”, *Neural Computing and Applications*, **33**, pp. 17489–17496.
- [65] N.T. Thanh, M.V. Thuan, T.N. Tuan (2023), “New results on finite-time guaranteed cost control of uncertain polytopic fractional-order systems with time-varying delays”, *Optimal Control Applications and Methods*, **44**(5), pp. 2504–2516.
- [66] M.V. Thuan, D.C. Huong, D.T. Hong (2019), “New results on robust finite-time passivity for fractional-order neural networks with uncertainties”, *Neural Processing Letters*, **50**(2), pp. 1065–1078.
- [67] M.V. Thuan, T.N. Binh, D.C. Huong (2020), “Finite-time guaranteed cost control of Caputo fractional-order neural networks”, *Asian Journal of Control*, **22**(2), pp. 696–705.
- [68] Y. Tian, Z. Wang (2022), “Finite-time extended dissipative filtering for singular T–S fuzzy systems with nonhomogeneous Markov jumps”, *IEEE Transactions on Cybernetics*, **52**(6), pp. 4574–4584.
- [69] H.T. Tuan, H. Trinh (2020), “A qualitative theory of time delay nonlinear fractional-order systems”, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **58**(3), pp. 1491–1518.
- [70] T. Wang, T. Li (2014), “Stability analysis of fractional-order nonlinear systems with delay”, *Mathematical Problems in Engineering*, Article. 301235.
- [71] J.C. Willems (1972), “Dissipative dynamical systems part I: General theory”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **45**(5), pp. 321–351.
- [72] R. Wu, Y. Lu, L. Chen (2015), “Finite-time stability of fractional delayed neural networks”, *Neurocomputing*, **149**, pp. 700–707.

- [73] X. Wu, L. Huang (2019), “Pinning adaptive and exponential synchronization of fractional-order uncertain complex neural networks with time-varying delays”, *Neural Processing Letters*, **50**(3), pp. 2373–2388.
- [74] J. Xia, H. Gao, M. Liu, G. Zhuang, B. Zhang (2018), “Non-fragile finite-time extended dissipative control for a class of uncertain discrete time switched linear systems”, *Journal of the Franklin Institute*, **355**(6), pp. 3031–3049.
- [75] C. Xu, P. Li (2019), “On finite-time stability for fractional-order neural networks with proportional delays”, *Neural Processing Letters*, **50**(2), pp. 1241–1256.
- [76] Z. Yan, G. Zhang, J. Wang, W. Zhang (2015), “State and output feedback finite-time guaranteed cost control of linear Itô stochastic systems”, *Journal of Systems Science and Complexity*, **28**(4), pp. 813–829.
- [77] Y. Yang, G. Chen (2015), “Finite-time stability of fractional order impulsive switched systems”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **25**(13), pp. 2207–2222.
- [78] Z. Yang, J. Zhang, J. Hu, J. Mei (2021), “New results on finite-time stability for fractional-order neural networks with proportional delay”, *Neurocomputing*, **442**, pp. 327–336.
- [79] X. You, Q. Song, Z. Zhao (2020), “Existence and finite-time stability of discrete fractional-order complex-valued neural networks with time delays”, *Neural Networks*, **123**, pp. 248–260.
- [80] L. Yu, J. Chu (1999), “An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems”, *Automatica*, **35**(6), pp. 1155–1159.
- [81] J. Yuan, C. Huang (2020), “Quantitative analysis in delayed fractional-order neural networks”, *Neural Processing Letters*, **51**(2), pp. 1631–1651.
- [82] C. Zamart, T. Botmart, W. Weera, S. Charoensin (2022), “New delay-dependent conditions for finite-time extended dissipativity based non-fragile feedback control for neural networks with mixed interval time-varying delays”, *Mathematics and Computers in Simulation*, **201**, pp. 684–713.
- [83] B. Zhang, W.X. Zheng, S. Xu (2013), “Filtering of Markovian jump delay systems based on a new performance index”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, **60**(5), pp. 1250–1263.

- [84] F. Zhang, T. Huang, Q. Wu, Z. Zeng (2021), “Multistability of delayed fractional-order competitive neural networks”, *Neural Networks*, **140**, pp. 325–335.
- [85] H. Zhang, H. Zhang, W. Zhang, J. Cao (2022), “LMI-based synchronization conditions to R–L fractional time-varying delayed neural networks with parametric uncertainty”, *Neural Processing Letters*.
- [86] J. Zhang, X.D. Zhao, Y. Chen (2016), “Finite-time stability and stabilization of fractional-order positive switched systems”, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **35**, pp. 2450–2470.
- [87] S. Zhang, Y. Yu, J. Yu (2016), “LMI conditions for global stability of fractional-order neural networks”, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **28**(10), pp. 2423–2433.
- [88] H. Zitane, D.F. Torres (2023), “Finite-time stability of tempered fractional systems with time delays”, *Chaos, Solitons & Fractals*, **177**, Article 114265.
- [89] G. Zong, H. Ren (2019), “Guaranteed cost finite-time control for semi-Markov jump systems with event-triggered scheme and quantization input”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **29**(15), pp. 5251–5273.