

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG

TÍNH CHẤT ĐỊNH TÍNH CỦA MỘT SỐ
LỚP HỆ SUY BIẾN VỚI ĐẠO HÀM
BẬC NGUYÊN VÀ BẬC PHÂN THỨ

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2025

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG

TÍNH CHẤT ĐỊNH TÍNH CỦA MỘT SỐ
LỚP HỆ SUY BIẾN VỚI ĐẠO HÀM
BẬC NGUYÊN VÀ BẬC PHÂN THỨ

Ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 9 46 01 12

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Tập thể hướng dẫn khoa học:
PGS.TS. Mai Viết Thuận
TS. Nguyễn Hữu Sáu

Thái Nguyên – 2025

Lời cam đoan

Tôi xin khẳng định rằng đây là công trình nghiên cứu của riêng cá nhân tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Mai Viết Thuận và TS. Nguyễn Hữu Sáu. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự đồng thuận của đồng tác giả trước khi đưa vào luận án. Luận án đưa ra những kết quả hoàn toàn mới, chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình nghiên cứu nào trước đó.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2025

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Thị Phương

Lời cảm ơn

Luận án được thực hiện tại Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TS. Mai Viết Thuận và TS. Nguyễn Hữu Sáu.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc đến PGS. TS. Mai Viết Thuận, người đã tận tâm hướng dẫn và chỉ bảo tôi ngay từ những bước đầu trong quá trình nghiên cứu. Thầy đã giúp tôi định hướng bài toán nghiên cứu, lựa chọn phương pháp phù hợp để giải quyết vấn đề, tìm kiếm tài liệu tham khảo, viết bài báo khoa học và tìm tòi mở rộng phạm vi nghiên cứu. Sự chỉ dạy tận tình cùng những lời động viên khích lệ của Thầy đã truyền cho tôi niềm đam mê khoa học và thúc đẩy tôi không ngừng nỗ lực để phát triển trong môi trường nghiên cứu.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến thầy TS. Nguyễn Hữu Sáu đã tận tình hướng dẫn những kiến thức quan trọng liên quan đến luận án và hỗ trợ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thiện công trình này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn sự giúp đỡ của các thầy cô Khoa Toán-Tin, các anh chị nghiên cứu sinh trong Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học và các thành viên trong nhóm seminar Tối ưu và Điều khiển tại Viện Toán học. Các thầy cô đã quan tâm, đóng góp những ý kiến quý báu, tạo môi trường học tập tốt để tôi nghiên cứu. Các anh chị em trong nhóm nghiên cứu cũng như các thành viên trong nhóm seminar luôn quan tâm, hỗ trợ để tôi học hỏi và bồi đắp kiến thức.

Trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu, tôi đã rất may mắn nhận được sự hỗ trợ và tạo điều kiện thuận lợi từ Ban Giám hiệu cùng Ban Chủ nhiệm Khoa Khoa học Cơ bản và Ứng dụng, trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin trân trọng cảm ơn cơ hội được đi học từ Nhà trường và sự giúp đỡ của các thầy cô. Tôi xin cảm ơn các thầy cô đồng nghiệp trong Khoa Khoa học cơ bản và Ứng dụng, Bộ môn Toán đã luôn tạo điều kiện thuận lợi về giảng dạy, động viên tinh thần để tôi tập trung học tập.

Đặc biệt, tôi xin gửi lời tri ân sâu sắc đến gia đình thân yêu: bố mẹ, anh chị em, chồng và hai con của tôi. Họ luôn đồng hành, sẻ chia mọi khó khăn và động viên, trở thành nguồn động lực lớn lao giúp tôi nỗ lực học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Thị Phương

Mục lục

Lời cam đoan	ii
Lời cảm ơn	iii
Danh mục các ký hiệu	vii
Danh mục các hình vẽ	ix
Mở đầu	1
Chương 1 Cơ sở toán học	12
1.1 Một số kiến thức cơ bản về tích phân và đạo hàm phân thứ	12
1.2 Bài toán ổn định của hệ phương trình vi phân suy biến rời rạc có trễ	16
1.2.1 Bài toán ổn định của hệ rời rạc có trễ	16
1.2.2 Bài toán ổn định hóa của hệ rời rạc có trễ	17
1.2.3 Hệ suy biến rời rạc có trễ	17
1.3 Hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến	19
1.4 Bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn	22
1.4.1 Bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn	22
1.4.2 Bài toán bị chặn trong thời gian hữu hạn	24
1.5 Bài toán tiêu hao của hệ động lực	26
1.6 Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển	28
1.7 Một số bổ đề bổ trợ	31
Chương 2 Bài toán ổn định và ổn định hóa được dạng mũ cho hệ suy biến dương rời rạc có xung với trễ hằng	34
2.1 Tính ổn định dạng mũ cho hệ suy biến dương rời rạc có xung với trễ theo thời gian	34

2.2	Tính ổn định hóa được dạng mũ cho hệ suy biến dương rời rạc có xung với trễ theo thời gian	46
2.3	Ví dụ minh họa	48
Chương 3 Tính tiêu hao hóa trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía		56
3.1	Phát biểu bài toán và một số định nghĩa	56
3.2	Tính bị chặn trong thời gian hữu hạn của hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía	60
3.3	Tính tiêu hao hóa trong thời gian hữu hạn của hệ phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía	65
3.4	Ví dụ minh họa	74
Chương 4 Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến có nhiễu		80
4.1	Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn	80
4.2	Ví dụ minh họa	94
Kết luận		101
Các công trình đã công bố liên quan đến luận án		102
Tài liệu tham khảo		103

Danh mục các ký hiệu

$\mathbb{N} (\mathbb{N}^*)$	tập hợp các số tự nhiên (số tự nhiên khác 0)
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian véc tơ Euclide thực n chiều
$\mathbb{R}^{m \times n}$	không gian các ma trận cỡ $m \times n$
$\mathbb{R}_{0,+}^n (\mathbb{R}_+^n)$	không gian các véc tơ không âm (dương)
	tương ứng của không gian $\mathbb{R}^n$
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
I	ma trận đơn vị có số chiều thích hợp
I_k	ma trận đơn vị kích thước $k \times k$
$\lambda(A)$	tập hợp tất cả các giá trị riêng của A
$\lambda_{\max} A$	$\max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\lambda_{\min} A$	$\min\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$*$	các phần tử dưới đường chéo chính của ma trận đối xứng
$x \succeq 0$	$x \in \mathbb{R}^n$, có tất cả các thành phần không âm
$A \geq 0$	ma trận A là nửa xác định dương
$A > 0$	ma trận A là xác định dương
$A > B$	nghĩa là $A - B > 0$
$K \succ 0$	mọi phần tử của ma trận K dương
$K \succeq 0$	mọi phần tử của ma trận K không âm
$\operatorname{rank}(A)$	hạng của ma trận A
$\det(A)$	định thức của ma trận A
$\operatorname{sym}(A)$	$A + A^T$

$R^{\frac{1}{2}}$	căn bậc hai của ma trận đối xứng xác định dương R
$\text{diag}(S_1, S_2, \dots, S_n)$	ma trận chéo với các khối ma trận $S_1, S_2, \dots, S_n$
$\langle x, y \rangle = x^T y$	tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$, $x^T y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$
$\ x\ $	chuẩn Euclide của véc tơ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$
$\ x\ _{\infty}^{\lambda}$	$\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{ x_i }{\lambda_i} \right\}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$
$C([a, b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm liên tục trên $[a, b]$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
$C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
$C^n([0, \infty), \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp n trên $[0, \infty)$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
$AC^n[a, b]$	không gian các hàm liên tục tuyệt đối cấp n trên $[a, b]$
$L^2([0, \infty), \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm $\omega(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mà $\int_0^{\infty} \ \omega(t)\ ^2 dt < \infty$
LMI	bất đẳng thức ma trận tuyến tính (linear matrix inequality)
GCC	đảm bảo chi phí điều khiển (guaranteed cost control)
FTGCC	đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn (finite-time guaranteed cost control)
FTDC	tiêu hao trong thời gian hữu hạn (finite-time dissipative control)

Danh sách hình vẽ

2.1 Quỹ đạo của trạng thái $x(t)$ trong Ví dụ 2.3.1 khi không có xung. . .	49
2.2 Quỹ đạo của trạng thái $x(t)$ trong Ví dụ 2.3.1 khi $t_m - t_{m-1} = 4$. . .	50
2.3 Quỹ đạo của trạng thái $x(t)$ trong Ví dụ 2.3.1 khi $t_m - t_{m-1} = 2$. . .	50
2.4 Quỹ đạo của trạng thái $x(t)$ trong Ví dụ 2.3.2 khi không có xung. . .	51
2.5 Quỹ đạo của trạng thái $x(t)$ trong Ví dụ 2.3.2 khi $t_m - t_{m-1} = 4$. . .	51
2.6 Quỹ đạo của trạng thái $x(t)$ trong Ví dụ 2.3.3 khi $t_m - t_{m-1} = 1$. . .	52
2.7 Quỹ đạo của trạng thái $x(t)$ trong Ví dụ 2.3.3 khi $t_m - t_{m-1} = 3$. . .	52
2.8 Quỹ đạo của $x(t)$ của hệ mở trong Ví dụ 2.3.4 khi $t_m - t_{m-1} = 3$. . .	53
2.9 Quỹ đạo của $x(t)$ của hệ đóng trong Ví dụ 2.3.4 khi $t_m - t_{m-1} = 3$. .	54
3.1 Quỹ đạo của véc tơ $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ mở trong Ví dụ 3.4.1. . .	76
3.2 Quỹ đạo của véc tơ $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ đóng trong Ví dụ 3.4.1. .	76
3.3 Quỹ đạo của hàm chỉ số tiêu hao $\gamma(t)$ trong Ví dụ 3.4.1.	77
3.4 Quỹ đạo của véc tơ $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ mở trong Ví dụ 3.4.2 . .	78
3.5 Quỹ đạo của $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ đóng trong Ví dụ 3.4.2.	78
3.6 Quỹ đạo của hàm chỉ số tiêu hao $\gamma(t)$ của hệ đóng trong Ví dụ 3.4.2. .	78
4.1 Quỹ đạo của $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ mở trong Ví dụ 4.2.1	97
4.2 Quỹ đạo của $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ đóng trong Ví dụ 4.2.1	97
4.3 Quỹ đạo của $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ mở trong Ví dụ 4.2.2	99
4.4 Quỹ đạo của $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ đóng trong Ví dụ 4.2.2	99

Mở đầu

1. Tổng quan về hướng nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Giải tích phân thứ, với hai phép toán cơ bản là đạo hàm và tích phân bậc thực hoặc phức tùy ý, được xem như một sự mở rộng và tổng quát hóa các khái niệm trong giải tích cổ điển. Lịch sử của giải tích phân thứ khởi nguồn gần như đồng thời với sự phát triển của phép toán vi tích phân cổ điển. Ý tưởng về đạo hàm bậc không nguyên được đề cập lần đầu tiên vào năm 1695, trong thư từ trao đổi giữa M.D. L'Hospital và G.W. Leibniz. Sau đó, các kiến thức cơ bản của giải tích bậc phân thứ được đặt nền tảng vững chắc từ kết quả của nhiều nhà toán học nổi tiếng như L. Euler, J. Liouville, B. Riemann, J.L. Lagrange, A. Grünwald, A. Letnikov ... qua các thế kỷ. Từ những năm 1970, lý thuyết về phép tính phân thứ đã có những bước phát triển vượt bậc, trở thành một công cụ mạnh mẽ để giải quyết các bài toán liên quan đến phân tích và điều khiển các hệ thống phức tạp mà các phương pháp cổ điển còn nhiều hạn chế. Đặc biệt, lý thuyết này hữu ích trong việc mô tả quá trình động lực học, mô hình hóa tính chất của vật liệu có đặc tính nhớ, mạch điện [39, 76], các quá trình sinh học và hóa học phức tạp, [10, 13, 41, 54], phân tích các chu kỳ kinh tế, dự đoán xu hướng thị trường của tài chính [18], các vấn đề của ngành Khoa học xã hội ... Có nhiều loại đạo hàm phân thứ khác nhau đã được xây dựng tùy thuộc vào cách người ta tổng quát hóa đạo hàm bậc n cho trường hợp n không nguyên như đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, đạo hàm Caputo, đạo hàm Hadamard, đạo hàm Grünwald–Letnikov, đạo hàm Marchaud, ... Cùng với hệ phương trình vi phân cổ điển, hệ phương trình vi phân phân thứ có khả năng mô tả chính xác sự biến đổi theo thời gian của các hệ thống thực tế, đồng thời được ứng dụng rộng rãi trong khoa học và kỹ thuật.

Để thiết lập một mô hình trạng thái biểu diễn một quá trình hoặc hiện tượng vật lý, ta cần xây dựng mối liên hệ giữa các biến đặc trưng của hệ thống và biểu diễn chúng thông qua hệ phương trình vi phân. Các biến đặc trưng này thường

là những đại lượng phản ánh đầy đủ và chính xác trạng thái của hệ thống, chẳng hạn như tốc độ, khối lượng, nhiệt độ, hay gia tốc. Chúng không chỉ thỏa mãn các phương trình vi phân mà đôi khi còn phải tuân theo các ràng buộc đại số. Kết quả thu được khi mô hình hóa kết hợp cả phương trình vi phân và phương trình đại số là một hệ phương trình vi phân suy biến. Hệ phương trình vi phân suy biến (bao gồm cả bậc nguyên và bậc phân thứ) còn được biết với tên gọi hệ phương trình vi phân đại số hay hệ trạng thái tổng quát, là một lĩnh vực nghiên cứu quan trọng của toán học ứng dụng. Trong 15 năm qua, các hệ động lực được biểu diễn qua hệ phương trình vi phân suy biến đã thu hút sự chú ý mạnh mẽ từ giới nghiên cứu khoa học nhờ vào tầm quan trọng và ứng dụng rộng rãi của chúng. Nhiều bài toán thực tiễn và kỹ thuật được mô hình hóa bằng hệ phương trình vi phân suy biến với đạo hàm bậc nguyên như mạng lưới điện [12], hệ thống cơ học [58], quá trình hóa học, hệ thống xã hội, hệ thống kinh tế [53], ... và được biểu diễn bởi các hệ suy biến với đạo hàm bậc phân thứ như hệ thống sinh học [13, 41, 54], hệ thống năng lượng [76], hệ thống tài chính [18] và các lĩnh vực khác [39].

Tính ổn định là một trong những đặc tính định tính quan trọng, luôn được chú trọng khi nghiên cứu và phân tích các hệ động lực. Trong bài toán ổn định của hệ phương trình suy biến, hai hướng nghiên cứu chính thường được đề cập là tính ổn định theo nghĩa Lyapunov và tính ổn định trong thời gian hữu hạn. Đây là hai khái niệm độc lập với nhau, có những tiêu chuẩn và ý nghĩa riêng trong thực tế và các bài toán kỹ thuật. Tính ổn định theo nghĩa Lyapunov nghiên cứu quỹ đạo của véc tơ trạng thái trong thời gian vô hạn, tập trung đưa ra các điều kiện để đảm bảo hệ thống quay về trạng thái cân bằng trong thời gian vô hạn. Trong khi đó, tính ổn định trong thời gian hữu hạn nhấn mạnh đến việc hệ thống duy trì trạng thái ổn định trong một khoảng thời gian cụ thể. Một hệ thống có thể đạt trạng thái ổn định trong một khoảng thời gian hữu hạn mà không nhất thiết phải ổn định tiệm cận. Ngược lại, tính ổn định tiệm cận của một hệ thống không đảm bảo rằng hệ thống sẽ duy trì trạng thái ổn định trong một khoảng thời gian nhất định.

Việc nghiên cứu các tính chất định tính của hệ phương trình vi phân suy biến gặp nhiều thách thức hơn so với hệ phương trình vi phân thường. Trước hết, nghiệm của hệ suy biến không phải lúc nào cũng tồn tại, ngay cả khi xét trường hợp hệ tuyến tính. Phương pháp thường được các nhà nghiên cứu áp dụng cho các hệ với đạo hàm bậc nguyên chủ yếu dựa trên việc xây dựng các hàm Lyapunov-Krasovskii

thích hợp. Tuy nhiên, khi mở rộng sang hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến, phương pháp này gặp nhiều thách thức do khó khăn trong việc xây dựng hàm Lyapunov phù hợp cũng như tính toán đạo hàm phân thứ của nó, đòi hỏi các kỹ thuật phân tích phức tạp hơn. Trường hợp hệ suy biến liên tục, tính chất không có xung (impulse-free) đảm bảo rằng với các điều kiện tương thích ban đầu, hệ sẽ không xuất hiện các thành phần dạng xung. Điều này có ý nghĩa đặc biệt quan trọng trong việc đảm bảo tính khả thi vật lý của mô hình. Đối với hệ suy biến rời rạc, tính nhân quả (causal) được hiểu là: đầu ra tại một thời điểm xác định chỉ phụ thuộc vào các giá trị của đầu vào tại hiện tại và quá khứ, hoàn toàn không bị ảnh hưởng bởi các giá trị đầu vào trong tương lai. Điều này đảm bảo hệ thống có tính thực tế, vì việc dự đoán chính xác tương lai là không khả thi trong các ứng dụng thực tiễn [21]. Trong bài toán ổn định hóa, quá trình thiết kế hàm điều khiển cho hệ suy biến cần đảm bảo hệ đóng tương ứng không chỉ ổn định mà còn thỏa mãn tính chính quy (regular) đồng thời đáp ứng không chứa thành phần xung đối với hệ liên tục hoặc điều kiện nhân quả đối với hệ rời rạc.

Lý thuyết ổn định theo nghĩa Lyapunov là phương pháp phổ biến để phân tích tính ổn định của hệ động lực. Theo đó, một hệ ổn định nếu hệ thống không chỉ giữ được gần trạng thái cân bằng (nghiệm không) mà còn quay về trạng thái cân bằng theo thời gian (ổn định tiệm cận). Điều này được kiểm tra thông qua hàm Lyapunov, một hàm năng lượng mà nếu hàm đó giảm theo thời gian và có giá trị không âm, hệ sẽ ổn định. Phương pháp Lyapunov cho phép đánh giá tính ổn định của một hệ mà không cần phải biết chính xác nghiệm. Ổn định mũ (exponential stability) là một khái niệm cơ bản trong lý thuyết ổn định của hệ động lực, miêu tả mức độ nhanh chóng mà một hệ thống quay trở lại trạng thái cân bằng sau khi hệ chịu các tác động từ nhiễu bên trong hoặc thay đổi đột ngột của môi trường bên ngoài. Do đó, so với ổn định tiệm cận (hội tụ chậm hơn, không định lượng tốc độ), ổn định mũ cung cấp một cách định lượng để đo lường mức độ ổn định thông qua tốc độ giảm, có lợi thế hơn so với ổn định tiệm cận.

Trong lý thuyết điều khiển, ta thường gặp hệ dương, hệ mà trạng thái và đầu ra luôn không âm khi điều kiện ban đầu không âm [8, 17, 27, 31, 59, 64, 66]. Hệ động lực dương được xây dựng để đáp ứng nhu cầu mô hình hóa các hệ thống thực tế của nhiều lĩnh vực như hóa học [16], sinh thái học [45] và y sinh học [11], khi các đại lượng như lưu lượng, nồng độ, quần thể hay năng lượng luôn mang giá trị

không âm. Khi hệ có sự thay đổi trạng thái đột ngột tại những thời điểm cụ thể, thường được gây ra bởi các nhiễu hoặc xung tức thời ta thu được hệ dương có xung. Gần đây, các hệ dương có xung đã thu hút được nhiều sự chú ý từ các nhà nghiên cứu. Hệ được sử dụng để biểu diễn một số lớp mô hình trong dịch tễ học [70], các mô hình dân số [51] và hệ sinh thái [4]. Trong [88], lần đầu tiên J.Zhang cùng đồng tác giả đã đề xuất các tiêu chuẩn mới cho các hệ dương tuyến tính có xung không có trễ theo thời gian. Như đã biết, độ trễ theo thời gian là một yếu tố xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật và chúng thường là nguyên nhân làm suy giảm hiệu suất hoặc gây mất ổn định cho hệ thống. Vì vậy, cần thiết phải phân tích tính ổn định cho các hệ dương có xung với trễ theo thời gian. Bằng cách kết hợp hàm Lyapunov-Krasovskii cải tiến và phương pháp khoảng thời gian xung trung bình, Y. Wang và các cộng sự [77] đã thiết lập một tiêu chuẩn đủ độc lập với trễ để đảm bảo tính ổn định mũ toàn cục thông qua bài toán lập trình tuyến tính cho các hệ dương có xung với trễ theo thời gian. Ổn định và ổn định hóa theo thời gian duy trì cho các hệ dương tuyến tính có xung và chuyển mạch được nghiên cứu trong [9]. Trong [49], các tác giả đề xuất một cách tiếp cận mới dựa trên hàm Lyapunov cải tiến cùng với phương pháp thời gian xung trung bình để nghiên cứu bài toán bị chặn trong thời gian hữu hạn đối với hệ dương có xung và chuyển mạch rời rạc cùng vẫn đề đảm bảo chi phí.

Cần lưu ý rằng, đối với các kết quả hiện tại về tính ổn định của các hệ xung và hệ suy biến, có rất ít công trình nghiên cứu về các hệ dương có xung, đặc biệt đối với các hệ suy biến dương có xung. Theo hiểu biết của chúng tôi, bài toán ổn định mũ cho hệ suy biến dương có xung rời rạc với trễ theo thời gian vẫn chưa được quan tâm và nghiên cứu sâu rộng. Trong kỷ nguyên số hiện đại, các hệ rời rạc được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực như xử lý ảnh và nhận dạng hệ thống. Sự ổn định của các hệ rời rạc có xung đã thu hút sự chú ý của cộng đồng nghiên cứu [49, 59, 64]. Nghiên cứu các hệ suy biến dương có xung rời rạc với trễ theo thời gian đặt ra một số thách thức quan trọng, bao gồm các khía cạnh chính sau: Trước hết, ma trận của hệ là suy biến, dẫn đến hệ có thể không chính quy hoặc không nhân quả, cần phân tích các điều kiện đảm bảo nghiệm tồn tại và duy nhất. Ngoài ra, trong các hệ có xung, các biến trạng thái có thể trải qua các bước nhảy đột ngột hoặc thay đổi do các tác động xung, việc đảm bảo rằng tất cả các biến trạng thái của hệ thống luôn không âm theo thời gian là một thách thức không

nhỏ. Tiếp đến là các yêu cầu kỹ thuật toán học, các phương pháp truyền thống để phân tích hệ không suy biến hoặc hệ rời rạc có thể không áp dụng trực tiếp cho các hệ suy biến có xung với trễ theo thời gian.

Khái niệm ổn định trong thời gian hữu hạn (finite-time stability) cho hệ phương trình vi phân với đạo hàm bậc nguyên được giới thiệu lần đầu tiên bởi các nhà toán học người Nga vào những năm 50 của thế kỷ XX. Trong thực tế, việc giám sát và điều chỉnh đáng điều của véc tơ trạng thái được mô tả bởi hệ phương trình vi phân trong một khoảng thời gian cụ thể là quan trọng. Việc đảm bảo véc tơ trạng thái duy trì trong giới hạn cho phép trong một khoảng thời gian nhất định có tác động đến sự ổn định và hiệu suất của hệ thống. Đến năm 1961, P. Dorato đã công bố một vài kết quả nghiên cứu bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn [24] và sau đó vấn đề này đã nhận được sự chú ý rộng rãi từ giới nghiên cứu lý thuyết điều khiển [5, 25, 26]. Khái niệm bị chặn trong thời gian hữu hạn (finite-time boundedness) được F. Amato và cộng sự hệ thống hóa trong [5]. Một hệ phương trình vi phân có nhiễu được gọi là bị chặn trong thời gian hữu hạn nếu với điều kiện ban đầu không vượt quá một ngưỡng nhất định và nhiễu nằm trong một miền xác định thì véc tơ trạng thái của hệ luôn duy trì trong một phạm vi giới hạn khác trong một khoảng thời gian hữu hạn. Khái niệm này thường được nghiên cứu trong các bài toán điều khiển và tối ưu hóa như điều khiển robot, mạng điện, hoặc hệ thống cơ học, khi mà đảm bảo tính an toàn và hiệu quả ngắn hạn là rất quan trọng. Việc khai thác bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMI) trong thiết kế hàm điều khiển nhằm đảm bảo tính ổn định và giới hạn trạng thái trong một khoảng thời gian hữu hạn mang lại một hướng tiếp cận hiệu quả, tận dụng được các công cụ toán học hiện đại. Năm 2005, M.P. Lazarevic và D.Lj. Debeljkovic đã xét các vấn đề trên đối với hệ có trễ [43]. Một số kết quả về vấn đề bị chặn trong thời gian hữu hạn cho các hệ suy biến rời rạc đã được công bố [47, 85].

Hiệu suất của hệ động lực được biểu thị qua mối tương quan giữa các tham số đầu vào và đầu ra, giúp đánh giá khả năng tối ưu hóa của hệ thống trong việc đáp ứng các yêu cầu vận hành. Từ đây, một số bài toán định tính quan trọng khác cho hệ phương trình vi phân bậc nguyên và bậc phân thứ suy biến được đề xuất nghiên cứu như bài toán tiêu hao, bài toán đảm bảo chi phí điều khiển (GCC), bài toán điều khiển hỗn hợp H_∞ và thụ động, v.v.

Lần đầu tiên được giới thiệu bởi J.C. Willems vào năm 1972 [78], lý thuyết tiêu

hao đã trở thành một công cụ hiệu quả trong phân tích tính ổn định và thiết kế hệ điều khiển, thông qua việc khai thác mối quan hệ giữa năng lượng cung cấp từ bên ngoài và năng lượng tích lũy bên trong hệ thống. Một trong những tính chất quan trọng của hệ động lực tiêu hao là năng lượng tổng chứa trong hệ luôn giảm theo thời gian. Phần năng lượng bị mất đi thường được tỏa ra bên ngoài, như dưới dạng nhiệt hoặc ma sát. Bài toán tiêu hao cho các hệ thống điều khiển đã trở thành hướng nghiên cứu được nhiều nhà toán học quan tâm. Với công cụ là lý thuyết hàm Lyapunov cùng sự hỗ trợ của kỹ thuật bất đẳng thức ma trận tuyến tính, đã có nhiều công bố đáng chú ý về bài toán tiêu hao cho các loại hệ động lực khác nhau. Năm 2011, Z. Feng, J. Lam và H. Gao đã nghiên cứu về hệ suy biến tiêu hao có trễ với đạo hàm bậc nguyên [28]. Đối với hệ phân thứ, năm 2022 trong [33], D.T. Hong, N.H. Sau và M.V. Thuan đã thiết lập một số điều kiện mới để phân tích mức tiêu hao của mạng nơron phân thứ tĩnh với trễ biến thiên. Các công bố vừa được nêu ở trên đều tập trung vào vấn đề ổn định theo nghĩa Lyapunov. Gần đây, phương pháp ổn định trong thời gian hữu hạn đã được các nhà nghiên cứu áp dụng vào lý thuyết tiêu hao. Nhiều kết quả thú vị về tính tiêu hao hóa trong thời gian hữu hạn cho các hệ khác nhau đã được công bố. Trong [55], Y. Ma và M. Chen đã đề xuất hàm điều khiển tiêu hao bền vững để đảm bảo hệ đóng không chỉ bị chặn trong thời gian hữu hạn mà còn thỏa mãn chỉ số hiệu suất tiêu hao cho hệ mờ không chắc chắn với trễ biến thiên. Thông qua việc xây dựng hàm Lyapunov-Krasovskii kết hợp với các kỹ thuật LMI, Y. Ma, X. Jia và D. Liu đã đề xuất một số điều kiện đủ nhằm giải quyết bài toán tiêu hao trong thời gian hữu hạn (FTDC) đối với hệ bước nhảy Markovian suy biến rời rạc [56]. Trong [20], bài toán FTDC cho lớp hệ chuyển mạch Markovian có trễ ngẫu nhiên rời rạc đã được nghiên cứu bởi G. Chen, J. Yang và X. Zhou dựa trên phương pháp hàm Lyapunov-Krasovskii. Đối với hệ phương trình vi phân phân thứ, năm 2022, trong [34], D.T. Hong, N.H. Sau và M.V. Thuan đã xem xét bài toán FTDC đối với hệ phân thứ Caputo có nhiễu phi tuyến. Nhóm tác giả đã xây dựng hàm điều khiển phản hồi đầu ra để hệ đóng bị chặn trong thời gian hữu hạn và thỏa mãn chỉ số hiệu năng tiêu hao.

Trong lý thuyết điều khiển, một trong những mục tiêu chính của việc thiết kế hệ thống là tối ưu hóa một hàm hiệu suất, thường được gọi là hàm chi phí. Bên cạnh việc đảm bảo tính ổn định, bài toán điều khiển còn hướng đến việc xây dựng hàm

điều khiển đáp ứng đầy đủ các yêu cầu về hiệu suất hoạt động. Ý tưởng về GCC được S.S.L. Chang giới thiệu năm 1969. Sau đó, năm 1972, S.S.L Chang và T.K.C Keng lần đầu tiên đưa ra bài toán điều khiển cùng hàm chi phí điều khiển của hệ [14]. Với công cụ là lý thuyết Lyapunov cùng sự hỗ trợ của phương pháp bất đẳng thức ma trận tuyến tính, đã có nhiều công bố đáng chú ý về bài toán GCC của các lớp hệ động lực [63, 79, 83]. Đối với hệ với đạo hàm bậc nguyên, năm 2015, P. Niamsup, K. Ratchagit và V.N. Phat đã đề xuất tiêu chuẩn mới của bài toán GCC cho hệ nơ ron có trễ [60]. Gần đây, V. Gokulakrishnan và các cộng sự nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn (FTGCC) cho hệ chuyển mạch phi tuyến ngẫu nhiên có trễ biến thiên [30]. Đối với các hệ phương trình vi phân phân thứ, đã có nhiều công bố đáng chú ý của các nhà nghiên cứu. Trong công trình năm 2020, M.V. Thuan, N. Sup và V.N. Phat đã thiết kế hàm điều khiển bảo đảm chi phí trong thời gian hữu hạn, đồng thời đề xuất một dạng hàm chi phí mới cho lớp hệ phân thứ Caputo chịu tác động của nhiễu [74]. Trong [72], N.T. Thanh và các cộng sự đã áp dụng phép biến đổi Laplace và cách tiếp cận dựa trên bất đẳng thức ma trận tuyến tính để thiết kế hàm điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho hệ phân thứ có trễ với thành phần không chắc chắn dạng tổ hợp lồi. Ngoài ra, trong quá trình kiểm soát các phản hồi trạng thái, ta nhận thấy những nhiễu tương đối nhỏ trong các tham số của hàm điều khiển có thể làm mất tính ổn định của hệ [69]. Vì vậy cần thiết phải thiết kế một hàm điều khiển bền vững có thể chấp nhận được sự thay đổi nhỏ của thành phần của hàm điều khiển ở mức độ nhất định.

Mặc dù đã có nhiều kết quả nghiên cứu đối với hệ phương trình vi phân suy biến với đạo hàm bậc nguyên và bậc phân thứ được công bố trong thời gian qua, tuy nhiên theo tìm hiểu của chúng tôi, nhiều bài toán định tính quan trọng cho các hệ phương trình vi phân suy biến vẫn chưa được nghiên cứu đầy đủ. Bài toán phân tích tính ổn định mũ cho các hệ suy biến có xung rời rạc với trễ theo thời gian là vấn đề phức tạp và vẫn còn nhiều thách thức kỹ thuật cần được giải quyết. Các nghiên cứu về bài toán tiêu hao và bài toán đảm bảo giá trị điều khiển tập trung vào các hệ với đạo hàm bậc nguyên, một số kết quả cho hệ phương trình vi phân phân thứ, rất ít công trình nghiên cứu được công bố cho lớp hệ phân thứ suy biến. Phương pháp được các nhà nghiên cứu hay sử dụng cho các hệ với đạo hàm bậc

nguyên chủ yếu thông qua việc thiết lập các hàm Lyapunov-Krasovskii phù hợp. Phương pháp này không dễ dàng mở rộng cho các hệ phương trình phân thứ suy biến vì khó khăn trong việc xây dựng hàm Lyapunov phù hợp và quá trình tính toán đạo hàm phân thứ của nó. Chính từ các phân tích nêu trên, chúng tôi chọn đề tài về tính chất định tính của một số hệ suy biến với các bài toán định tính lớn là nghiên cứu tính ổn định và ổn định hóa được dạng mũ cho hệ suy biến có xung rời rạc với trễ hằng, bài toán FTDC cho lớp hệ phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía với thành phần không chắc chắn và bài toán FTGCC cho lớp hệ phân thứ suy biến phi tuyến có nhiễu.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu của luận án là:

- Nghiên cứu tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ của lớp hệ suy biến dương rời rạc có xung và có trễ với đạo hàm bậc nguyên.
- Nghiên cứu tính bị chặn trong thời gian hữu hạn cho hệ phân thứ Caputo suy biến Lipschitz một phía với tham số không chắc chắn và xây dựng hàm điều khiển phản hồi trạng thái cho bài toán điều khiển FTDC cho lớp hệ đang xét.
- Nghiên cứu thiết kế hàm điều khiển phản hồi trạng thái bền vững cho lớp hệ phân thứ Caputo suy biến với tham số không chắc chắn bị chặn trong thời gian hữu hạn và thỏa mãn điều kiện đảm bảo giá trị điều khiển.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là một số lớp bài toán định tính trong lý thuyết ổn định và điều khiển, gồm bài toán ổn định mũ Lyapunov, bài toán bị chặn trong thời gian hữu hạn và các bài toán điều khiển liên quan (bài toán FTDC, bài toán FTGCC).

Phạm vi nghiên cứu của luận án là tập trung vào lớp hệ phương trình vi phân suy biến bao gồm cả với đạo hàm bậc nguyên và đạo hàm bậc phân thứ.

4. Phương pháp nghiên cứu

Để thực hiện nghiên cứu, chúng tôi đã áp dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp hàm Lyapunov: Phương pháp này được xem là nền tảng trong việc phân tích tính ổn định của hệ phương trình vi phân, bao gồm cả ổn định theo nghĩa Lyapunov và ổn định trong thời gian hữu hạn.
- Phép biến đổi toán ma trận, kỹ thuật LMI: Đây là các công cụ mạnh mẽ để giải quyết các bài toán điều khiển có sử dụng lý thuyết bất đẳng thức ma trận tuyến tính.
- Các biến đổi cơ bản của phép tính giải tích phân thứ: Chúng tôi áp dụng các phép biến đổi liên quan đến giải tích phân thứ như đạo hàm và tích phân phân thứ Riemann-Liouville, đạo hàm phân thứ Caputo và các tính chất liên quan.
- Sử dụng LMI Control Toolbox và Linear Programming (LP) của MATLAB để giải các bất đẳng thức ma trận tuyến tính, giải bài toán quy hoạch tuyến tính và thực hiện mô phỏng các kết quả thu được từ nghiên cứu lý thuyết.

5. Kết quả nghiên cứu và cấu trúc của luận án

Trong luận án, lớp hệ đầu tiên được xem xét nghiên cứu là hệ phương trình vi phân suy biến rời rạc có xung và trễ theo thời gian sau:

$$\begin{cases} Ex(t+1) &= Ax(t) + A_d x(t-h), \quad t \neq t_m - 1, \\ \mathbf{x}_1(t_m) &= H \mathbf{x}_1(t_m - 1), \quad m \in \mathbb{N}^*, \\ x(s) &= \eta(s), \quad s \in \{-h, -h+1, \dots, 0\}, \end{cases}$$

trong đó $x(\cdot) := (\mathbf{x}_1(\cdot), \mathbf{x}_2(\cdot))$, $\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^r$ và $\mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$ là véc tơ trạng thái. Ma trận $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ suy biến với $\text{rank}(E) = r < n$. A, A_d, H là các ma trận hằng đã biết với số chiều phù hợp. Hằng số trễ $h \in \mathbb{N}^*$ và $\eta : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ là hàm điều kiện ban đầu. Dãy xung $\{t_m\}_{m=1}^\infty$ thỏa mãn $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \dots, t_m \rightarrow \infty$ với $m \rightarrow \infty$. Nghiên cứu hệ suy biến dương rời rạc có xung với trễ thời gian đặt ra nhiều thách thức đáng kể. Thứ nhất, chúng ta cần xác định ràng buộc đảm bảo sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm do ma trận của hệ suy biến. Thứ hai, vấn đề duy trì tính dương của các biến trạng thái, đặc biệt trong các hệ xung với những thay đổi đột ngột. Thứ ba, các phương pháp truyền thống không thể áp dụng trực tiếp cho các hệ suy biến có xung và trễ theo thời gian, do đó đòi hỏi các công cụ cũng như kỹ thuật mới. Kết quả chúng tôi đưa ra trong luận án là điều kiện đủ để

giải quyết bài toán ổn định và bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ suy biến dương rời rạc có xung và có trễ theo thời gian.

Việc phân tích các tính chất định tính của hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến gặp nhiều thách thức hơn so với hệ phương trình vi phân với đạo hàm bậc nguyên. Trong luận án, lớp hệ tiếp theo được nghiên cứu là hệ phân thứ Caputo suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía với tham số không chắc chắn có dạng:

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t)F(t, x(t)) + Bu(t), t \geq 0, \\ z(t) &= [C + \Delta C(t)]x(t) + W\omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

trong đó $\alpha \in (0, 1)$ là bậc phân thứ của hệ, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển đầu vào, $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ là nhiễu đầu vào cho trước, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ là véc tơ đầu ra, x_0 là điều kiện đầu. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$ và $W \in \mathbb{R}^{p \times q}$ là các ma trận hằng số đã biết. $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận suy biến với $\text{rank}(E) = r < n$. Các ma trận $\Delta A(t), \Delta C(t), \Delta D(t)$ thay đổi theo thời gian và nhiễu $\omega(\cdot) \in L^2([0, \infty), \mathbb{R}^q)$ đáp ứng điều kiện sau

$$\exists d > 0 : \sup_{t \geq 0} \omega^T(t)\omega(t) \leq d, \forall t \in [0, T_f].$$

Việc xây dựng hàm điều khiển cho hệ phân thứ suy biến không chỉ cần bảo đảm rằng hệ đóng bị chặn trong một khoảng thời gian hữu hạn mà còn phải đáp ứng các tiêu chí về tính chính quy và không có xung. Trên nền tảng bài toán FTDC đối với hệ phương trình vi phân suy biến có đạo hàm bậc nguyên cũng như hệ phương trình vi phân phân thứ, chúng tôi tiếp tục mở rộng phạm vi nghiên cứu sang bài toán FTDC đối với hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến. Luận án thu được kết quả quan trọng là thiết kế hàm điều khiển phản hồi trạng thái đảm bảo tính FTDC cho lớp hệ phân thứ Caputo suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía với các tham số không chắc chắn.

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu bài toán FTGCC của lớp hệ phân thứ Caputo suy biến có dạng:

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t) + Bu(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

với các giả thiết về các ma trận và hàm nhiều tương tự như ở trên. Phương pháp quen thuộc mà các nhà nghiên cứu thường áp dụng để phân tích sự ổn định của các hệ với đạo hàm bậc nguyên là thông qua việc thiết lập hàm Lyapunov. Tuy nhiên, việc mở rộng phương pháp này cho các hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến gặp phải nhiều thách thức, đặc biệt trong việc thiết lập hàm Lyapunov thích hợp và cách thực hiện tính toán đạo hàm phân thứ của nó. Kết quả cuối cùng trong luận án là thiết kế được hàm điều khiển bền vững cho bài toán FTGCC của lớp hệ phân thứ Caputo suy biến có nhiễu.

Luận án bao gồm 4 chương, cùng với phần mở đầu, kết luận, danh mục các ký hiệu, danh mục các công trình khoa học của tác giả và tài liệu tham khảo.

Chương 1: Cơ sở toán học.

Chương 2: Bài toán ổn định và ổn định hóa được dạng mũ cho hệ suy biến dương rời rạc có xung với trễ hằng.

Chương 3: Tính tiêu hao hóa trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía.

Chương 4: Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến có nhiễu.

Nội dung luận án được xây dựng dựa trên các kết quả nghiên cứu đã công bố trong ba bài báo (CT1), (CT2) và (CT3) trên các tạp chí SCIE Q1/Q2 trong Danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án. Những kết quả quan trọng của luận án đã được trình bày tại:

- Seminar tại Bộ môn Toán ứng dụng và Tin học, Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên các năm 2021 – 2025.
- Seminar tại Phòng Tối ưu và Điều khiển, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam năm 2023.
- Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ X, Trường đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng, tháng 8 năm 2023.
- Hội nghị Nghiên cứu sinh, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, tháng 11 năm 2024.

Chương 1

Cơ sở toán học

Chương này nhắc lại một số kiến thức toán học cơ bản là cơ sở để trình bày kết quả của các chương sau. Nội dung của Chương 1 gồm: Một số kiến thức cơ sở của giải tích phân thứ, nghiệm của hệ phương trình vi phân suy biến, bài toán ổn định và ổn định hóa được dạng mũ, bài toán bị chặn trong thời gian hữu hạn, các bài toán điều khiển liên quan như bài toán tiêu hao, bài toán GCC và một số bổ đề bổ trợ được sử dụng để chứng minh các kết quả chính của luận án.

1.1 Một số kiến thức cơ bản về tích phân và đạo hàm phân thứ

Các khái niệm và kết quả liên quan đến lý thuyết giải tích phân thứ trong phần này được tham khảo trong các tài liệu [23, 38, 42].

Định nghĩa 1.1.1. (Xem [42], Chương 2, tr. 69). Cho $\alpha > 0$, tích phân phân thứ Riemann-Liouville bậc α của hàm $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ được định nghĩa là

$${}_a I_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t \in (a, b],$$

trong đó $\Gamma(\cdot)$ là hàm Gamma xác định bởi $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

Khi $\alpha = 0$, ta quy ước ${}_a I_t^0 := I$ với I là toán tử đồng nhất. Ngoài ra, một điều kiện đủ về sự tồn tại của tích phân Riemann–Liouville bậc α với $\alpha > 0$ và tính khả tích của hàm tích phân đó được phát biểu trong định lý dưới đây.

Định lý 1.1.2. (Xem [23], Chương 2, tr.13). *Giả sử $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích trên $[a, b]$. Khi đó, tích phân ${}_a I_t^\alpha f(t)$ tồn tại với hầu hết $t \in [a, b]$. Ngoài ra, ${}_a I_t^\alpha f(t)$ cũng thuộc tập hợp các hàm khả tích trên $[a, b]$.*

Ví dụ 1.1.3. (Xem [42], Chương 2, tr. 71).

Cho $\beta > -1$ và $t > a$. Với bất kì số thực $\alpha > 0$, ta có

$${}_a\mathcal{I}_t^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}.$$

Định lý 1.1.4. (Xem [42], Chương 2, tr.73). Cho $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục và các số dương α_1, α_2 . Khi đó, với hầu hết $t \in [a, b]$ ta có:

$${}_a\mathcal{I}_t^{\alpha_1}({}_a\mathcal{I}_t^{\alpha_2}v(t)) = {}_a\mathcal{I}_t^{\alpha_2}({}_a\mathcal{I}_t^{\alpha_1}v(t)) = {}_a\mathcal{I}_t^{\alpha_1+\alpha_2}(v(t)).$$

Đạo hàm Riemann–Liouville và đạo hàm Caputo là hai khái niệm quan trọng trong giải tích phân thứ, được ứng dụng phổ biến trong nhiều lĩnh vực. Đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville được phát triển bởi N.H. Abel, B. Riemann và J. Liouville trong nửa đầu thế kỉ XIX. Đạo hàm phân thứ Caputo được M. Caputo xây dựng năm 1969 dựa trên sự cải biên khái niệm đạo hàm Riemann–Liouville.

Định nghĩa 1.1.5. (Xem [42], Chương 2, tr.70). Cho số thực dương α , số nguyên $n := [\alpha] + 1$ và hàm $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville bậc α của $f(t)$ được xác định bởi

$${}_a^{RL}D_t^\alpha f(t) := \frac{d^n}{dt^n} [{}_a\mathcal{I}_t^{n-\alpha}f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds$$

Khi $\alpha = m \in \mathbb{N}^*$ thì ${}_a^{RL}D_t^\alpha f(t) = f^{(m)}(t)$ (đạo hàm bậc m thông thường).

Ví dụ 1.1.6. Cho $x(t) = (t-a)^\beta$ trong đó $\beta > -1$ và $t > a$. Theo Ví dụ 1.1.3, ta nhận được kết quả

$${}_a\mathcal{I}_t^{n-\alpha}x(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}(t-a)^{n-\alpha+\beta}, \quad t > a.$$

Khi đó, ta có

$${}_a^{RL}D_t^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}, \quad t > a.$$

Cho $[a, b] \subset \mathbb{R}$ và $AC[a, b]$ là không gian các hàm tuyệt đối liên tục trên $[a, b]$. Giả sử n là số nguyên dương cho trước, $AC^n[a, b]$ là lớp hàm gồm các hàm khả vi liên tục đến bậc $n-1$ và đạo hàm bậc $n-1$ liên tục tuyệt đối trên $[a, b]$ (lớp hàm liên tục tuyệt đối cấp n trên $[a, b]$). Một tiêu chí đảm bảo sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville được phát biểu trong định lý dưới đây.

Định lý 1.1.7. (Xem [42], Chương 2, tr.73) Cho số thực dương α , số nguyên

$n := [\alpha] + 1$ và hàm $f(t) \in AC^n[a, b]$. Khi đó, đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville tồn tại hầu khắp nơi trên $[a, b]$ và được biểu diễn theo công thức sau

$${}_a^{RL}D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}}.$$

Xuất phát từ Định lý 1.1.7, ta có được kết quả sau.

Hệ quả 1.1.8. (Xem [42], Chương 2, tr.73) Nếu α là một số thực với $\alpha \in (0, 1)$ và hàm $f(t) \in AC[a, b]$ thì

$${}_a^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_a^t \frac{f'(s)ds}{(t-s)^\alpha} \right].$$

Đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville là một toán tử tuyến tính và điều này được khẳng định trong định lý sau.

Định lý 1.1.9. (Xem [38], Chương 2, tr.29). Cho trước $\alpha > 0$, hai số thực $\nu, \mu \in \mathbb{R}$ và hai hàm $f(t), g(t) \in AC^n[a, b]$. Khi đó đạo hàm phân thứ ${}_a^{RL}D_t^\alpha$ là một toán tử tuyến tính, tức là

$${}_a^{RL}D_t^\alpha [\nu f(t) + \mu g(t)] = \nu {}_a^{RL}D_t^\alpha f(t) + \mu {}_a^{RL}D_t^\alpha g(t).$$

Đạo hàm phân thứ Caputo bậc $\alpha > 0$ được định nghĩa thông qua đạo hàm Riemann–Liouville như sau.

Định nghĩa 1.1.10. (Xem [42], Chương 2, tr.91). Cho số thực $\alpha > 0$, n là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α , $[a, b] \subset \mathbb{R}$ và hàm $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Đạo hàm phân thứ Caputo bậc α của $f(t)$ được cho bởi

$${}_a^CD_t^\alpha f(t) := {}_a^{RL}D_t^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right].$$

Đặc biệt, khi $0 < \alpha < 1$, từ Định nghĩa 1.1.10 ta nhận được

$${}_a^CD_t^\alpha f(t) := {}_a^{RL}D_t^\alpha [f(t) - f(a)].$$

Cho một hàm véc tơ $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_d(t))^T$. Đạo hàm phân thứ Caputo bậc $\alpha > 0$ của $f(t)$ được định nghĩa theo từng thành phần như sau:

$${}_a^CD_t^\alpha f(t) := ({}_a^CD_t^\alpha f_1(t), {}_a^CD_t^\alpha f_2(t), \dots, {}_a^CD_t^\alpha f_d(t))^T.$$

Điều kiện đủ cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Caputo bậc α được phát biểu trong định lý sau.

Định lý 1.1.11. (Xem [42], Chương 2, tr.93) Cho số thực dương α , n là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α và hàm $f(t) \in AC^n[a, b]$. Khi đó đạo hàm phân thứ Caputo ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ tồn tại hầu khắp nơi trên $[a, b]$. Ngoài ra, ta có
i) Nếu $\alpha \notin \mathbb{N}$ thì ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ được xác định thông qua biểu thức sau:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s) ds}{(t - s)^{\alpha - n + 1}}.$$

Đặc biệt, khi $\alpha \in (0, 1)$ và $f(t) \in AC[a, b]$, ta thu được:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t \frac{f'(s) ds}{(t - s)^\alpha}.$$

ii) Nếu $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ thì ${}_a^C D_t^n f(t) = f^{(n)}(t)$, ngoài ra ${}_a^C D_t^0 f(t) = f(t)$.

Định lý 1.1.12. (Xem [38], Chương 2, tr.30) Cho trước số $\alpha > 0$, các số $\nu, \mu \in \mathbb{R}$ bất kỳ và hai hàm $f(t), g(t) \in AC^n[a, b]$. Khi đó

$${}_a^C D_t^\alpha [\nu f(t) + \mu g(t)] = \nu {}_a^C D_t^\alpha f(t) + \mu {}_a^C D_t^\alpha g(t).$$

Chú ý 1.1.13. (Xem [38], Chương 2, tr.30). Từ Định nghĩa 1.1.10, nếu α là số thực dương, β là hằng số thì ${}_a^C D_t^\alpha \beta = 0$.

Đạo hàm phân thứ Caputo, tương tự phép toán vi-tích phân cổ điển, được xem là toán tử nghịch đảo trái của tích phân phân thứ. Tuy nhiên, nó không luôn thỏa mãn tính nghịch đảo phải. Điều này được khẳng định trong hai định lý tiếp theo.

Định lý 1.1.14. (Xem [42], Chương 2, tr.95) Cho số thực dương α và $f(t) \in C[a, b]$. Khi đó, ta có

$${}_a^C D_t^\alpha ({}_a I_t^\alpha f(t)) = f(t).$$

Định lý 1.1.15. (Xem [42], Chương 2, tr.96) Cho số thực dương α và n là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α . Nếu $f(t) \in AC^n[a, b]$ thì

$${}_a I_t^\alpha ({}_a^C D_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k.$$

Đặc biệt, nếu $\alpha \in (0, 1]$, $f(t) \in AC[a, b]$ thì ${}_a I_t^\alpha ({}_a^C D_t^\alpha f(t)) = f(t) - f(a)$.

1.2 Bài toán ổn định của hệ phương trình vi phân suy biến rời rạc có trễ

Trong nhiều hệ thống thực tế, sự thay đổi trạng thái hiện tại không xảy ra ngay lập tức mà phải mất một khoảng thời gian nhất định để các yếu tố gây tác động ảnh hưởng đến hệ. Trễ theo thời gian biểu thị sự phụ thuộc của trạng thái hiện tại vào các trạng thái trong quá khứ. Để biểu diễn các quá trình có sự thay đổi theo thời gian rời rạc, các hệ phương trình vi phân rời rạc có trễ được áp dụng.

1.2.1 Bài toán ổn định của hệ rời rạc có trễ

Xét hệ phương trình vi phân rời rạc tổng quát dạng

$$\begin{cases} x(k+1) = f(k, x(k), x(k-h)), & k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \psi(k), & k \in \{-h, -(h-1), \dots, 0\}, \end{cases} \quad (1.1)$$

với véc tơ $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Hàm véc tơ $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $f(k, 0, 0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Hằng số trễ $h \in \mathbb{N}^*$ và $\psi(\cdot) : \{-h, -(h-1), \dots, 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ là hàm điều kiện ban đầu với chuẩn

$$\|\psi\| = \max_{k \in \{-h, -(h-1), \dots, 0\}} \|\psi(k)\|.$$

Định nghĩa 1.2.1. (Xem [1], Chương 3, tr.109) Giả sử $f(k, 0, 0) = 0$ với $\forall k \in \mathbb{N}$.

i) Điểm cân bằng $x(k) = 0$ của hệ (1.1) được gọi là ổn định nếu với mọi $k_0 \geq 0$, $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(k_0, \epsilon)$ sao cho bất kỳ nghiệm $x(k; k_0, \psi)$ thỏa mãn $\|\psi\| \leq \delta$ thì $\|x(k; k_0, \psi)\| \leq \epsilon$ với $k \geq k_0$.

ii) Điểm cân bằng $x(k) = 0$ của hệ (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận nếu nghiệm đó ổn định và tồn tại $\delta = \delta(k_0) > 0$ sao cho bất kỳ nghiệm $x(k; k_0, \psi)$ thỏa mãn $\|\psi\| \leq \delta$ thì $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k; k_0, \psi) = 0$.

iii) Điểm cân bằng $x(k) = 0$ của hệ (1.1) được gọi là ổn định mũ nếu tồn tại các hằng số $\mathcal{M} > 0$ và $\beta \in (0, 1)$ sao cho nghiệm bất kỳ $x(k; \psi)$ của hệ thỏa mãn

$$\|x(k; \psi)\| \leq \mathcal{M}\|\psi\|\beta^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Số $\mathcal{M}$ được gọi là hệ số ổn định Lyapunov và β được gọi là số mũ ổn định.

1.2.2 Bài toán ổn định hóa của hệ rời rạc có trễ

Xét hệ điều khiển rời rạc với trễ theo thời gian sau

$$\begin{cases} x(k+1) = f(k, x(k), x(k-h), u(k)), & k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \psi(k), & k \in \{-h, -(h-1), \dots, 0\}, \end{cases} \quad (1.2)$$

với véc tơ $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ và véc tơ điều khiển $u(k) \in \mathbb{R}^m$, hằng số trễ $h \in \mathbb{N}^*$. Hàm véc tơ $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sao cho điều kiện $f(k, 0, 0, 0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Định nghĩa 1.2.2. (Xem [1], Chương 3, tr.140) Hệ (1.2) được gọi là ổn định hóa được nếu tồn tại hàm điều khiển $u(k) = \eta(x(k))$ sao cho hệ đóng sau

$$\begin{cases} x(k+1) = f(k, x(k), x(k-h), \eta(x(k))), & k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \psi(k), & k \in \{-h, -(h-1), \dots, 0\} \end{cases} \quad (1.3)$$

ổn định tiệm cận.

Định nghĩa 1.2.3. (Xem [1], Chương 3, tr.143) Cho số $0 < \beta < 1$. Hệ (1.2) được gọi là β -ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại hàm điều khiển $u(k) = \eta(x(k))$ sao cho hệ đóng (1.3) là β -ổn định mũ, nghĩa là tồn tại hằng số dương $\mathcal{M} > 0$ đảm bảo mọi nghiệm $x(k; \psi)$ của hệ đóng (1.3) thỏa mãn

$$\|x(k; \psi)\| \leq \mathcal{M} \|\psi\| \beta^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

1.2.3 Hệ suy biến rời rạc có trễ

Xét hệ suy biến rời rạc có trễ sau

$$\begin{cases} Ex(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-\tau), & k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \psi(k), & k \in \{-\tau, -(\tau-1), \dots, 0\}, \end{cases} \quad (1.4)$$

trong đó véc tơ trạng thái $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, các ma trận cho trước $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ma trận $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ suy biến với $\text{rank}(E) = r < n$; $0 < \tau \in \mathbb{N}$ là hằng số trễ. Hàm $\psi(\cdot) : \{-\tau, \dots, 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ là hàm điều kiện ban đầu với chuẩn được định nghĩa là $\|\psi\| = \max_{k \in \{-\tau, -(\tau-1), \dots, 0\}} \|\psi(k)\|$.

Nếu E là ma trận đơn vị, nghiệm của hệ (1.4) luôn có thể xác định thông qua việc truy hồi. Ngược lại, khi E là ma trận suy biến, việc xây dựng công thức nghiệm

trở nên phức tạp, đòi hỏi phải phân tích tính chính quy của cặp ma trận (E, A_0) . Vấn đề tồn tại nghiệm trong phần này được tham khảo từ tài liệu [21, 44].

Định nghĩa 1.2.4. (Xem [21])

- i) Cặp ma trận (E, A_0) được gọi là chính quy nếu tồn tại $s \in \mathbb{C}$ sao cho đa thức $\det(sE - A_0)$ không đồng nhất bằng 0.
- ii) Cặp ma trận (E, A_0) được gọi là nhân quả nếu tồn tại $s \in \mathbb{C}$ sao cho

$$\deg(\det(sE - A_0)) = \text{rank}(E).$$

Giả sử cặp ma trận (E, A_0) thỏa mãn đồng thời tính chất chính quy và nhân quả. Khi đó điều kiện chính quy của (E, A_0) tương đương với tồn tại hai ma trận khả nghịch P và Q sao cho

$$PEQ = \text{diag}(I_r, N), \quad PA_0Q = \text{diag}(A_{01}, I_{n-r}), \quad PA_1Q = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

trong đó N là một ma trận lũy linh. Cặp (E, A_0) là nhân quả nếu và chỉ nếu $N = 0$ (xem Bổ đề 2.9, trang 21 [44]).

Với phép đổi biến $Q^{-1}x(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix}$, $y_1(k) \in \mathbb{R}^r$, $y_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}$, $k \in \mathbb{N}$, hệ (1.4) được biểu diễn theo công thức sau [2]

$$\begin{cases} y_1(k+1) &= A_{01}y_1(k) + A_{11}y_1(k-\tau) + A_{12}y_2(k-\tau), & y_1(s) = \phi_1(s), \\ y_2(k) &= -A_{21}y_1(k-\tau) - A_{22}y_2(k-\tau), & y_2(s) = \phi_2(s), s \in \{-\tau, \dots, 0\}. \end{cases}$$

Khi đó, ta nhận được

$$\begin{cases} y_1(k) = A_{01}^k y_1(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A_{01}^{k-1-i} [A_{11}y_1(i-\tau) + A_{12}y_2(i-\tau)], \\ y_2(k) = -A_{21}y_1(k-\tau) - A_{22}y_2(k-\tau). \end{cases}$$

Tiến hành thêm một số phép biến đổi, ta xác định được nghiệm của hệ (1.4) là

$$\begin{cases} x(k) = \bar{A}_{01}^k P_1 x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \bar{A}_{01}^{k-1-i} \bar{A}_1 x(i-\tau) + \bar{A}_2 x(k-\tau), \\ x(k) = \psi(k), \quad k \in \{-\tau, -(\tau-1), \dots, -1, 0\}, \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{aligned}\bar{A}_{01} &= Q \begin{bmatrix} A_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \quad P_1 = Q \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \\ \bar{A}_1 &= Q \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \quad \bar{A}_2 = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A_{21} & -A_{22} \end{bmatrix} Q^{-1}.\end{aligned}$$

Khi điều kiện chính quy của cặp (E, A_0) chưa được xác định, luôn tồn tại hai ma trận khả nghịch $\bar{M}$ và $\bar{N}$ sao cho

$$\bar{M}E\bar{N} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{M}A_0\bar{N} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}.$$

Mệnh đề 1.2.5. (Xem [44], Chương 2, tr 22) *Cặp ma trận (E, A_0) là nhân quả nếu và chỉ nếu A_4 không suy biến.*

1.3 Hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến

Hệ phương trình vi phân suy biến thường gặp trong nhiều lĩnh vực của kỹ thuật và vật lý, khi quan hệ giữa các biến không thể biểu diễn hoàn toàn dưới dạng vi phân. Những ràng buộc đại số này có thể được tạo ra từ các định luật vật lý, như bảo toàn năng lượng, bảo toàn động lượng hoặc từ các điều kiện ban đầu và biên của hệ. Nội dung của mục này được tham khảo trong các tài liệu [40, 71, 82, 84]. Bậc của hệ phương trình vi phân thứ suy biến được xét trong trường hợp $0 < \alpha < 1$.

Xét hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo

$$\begin{cases} F({}_0^C D_t^\alpha x(t), x(t), u(t), t) = 0, t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.5)$$

với $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển đầu vào, $F(., ., t)$ là hàm véc tơ.

Xét một trường hợp đặc biệt của hệ (1.5) là:

$$\begin{cases} E {}_0^C D_t^\alpha x(t) = G(u(t), x(t), t), t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.6)$$

trong đó E là ma trận suy biến, $G(., ., t)$ là hàm véc tơ. Khi đó, hệ (1.6) được gọi

là hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến. Nếu $G(u(t), x(t), t)$ là hàm tuyến tính thì hệ có dạng

$$\begin{cases} E {}^C_0 D_t^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ và $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Tiếp theo, chúng ta xem xét vấn đề về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ phương trình vi phân suy biến. Xét hệ phân thứ

$$\begin{cases} E {}^C_0 D_t^\alpha x(t) &= Ax(t) + f(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.7)$$

với $f(t) \in \mathbb{R}^n$ là hàm cho trước và khả vi tới bậc cần thiết, $\text{rank}(E) = r$.

Định nghĩa 1.3.1. (Xem [71, 82])

i) Cặp ma trận (E, A) được gọi là chính quy nếu tồn tại $s \in \mathbb{C}$ sao cho đa thức $\det(sE - A)$ không đồng nhất bằng 0.

ii) Cặp ma trận (E, A) được gọi là không có xung nếu tồn tại $s \in \mathbb{C}$ sao cho

$$\deg(\det(sE - A)) = \text{rank}(E).$$

Tương tự với hệ phương trình vi phân suy biến bậc nguyên, nghiệm của hệ phân thứ (1.7) có thể xuất hiện thành phần dạng xung với điều kiện tương thích ban đầu. Tuy nhiên, tính chính quy và tính không có xung của cặp (E, A) đảm bảo tính tồn tại và duy nhất của nghiệm theo các kết quả dưới đây trong [21, 84].

Mệnh đề 1.3.2. (Xem [21]) *Cặp ma trận (E, A) là chính quy khi và chỉ khi tồn tại hai ma trận không suy biến P, Q sao cho*

$$PEQ = \text{diag}(I_{n_1}, N), \quad PAQ = \text{diag}(J, I_{n_2}), \quad (1.8)$$

trong đó $n_1 + n_2 = n$, $J \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ là ma trận chính tắc Jordan và $N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ là ma trận lũy linh bậc v .

Theo Mệnh đề 1.3.2, hệ (1.7) được đưa về

$${}^C_0 D_t^\alpha y_1(t) = Jy_1(t) + g_1(t), \quad (1.9)$$

$$N {}^C_0 D_t^\alpha y_2(t) = y_2(t) + g_2(t), \quad (1.10)$$

với phép đổi biến $Q^{-1}x(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$, $y_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ và

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, PAQ = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix},$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}, Pf(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}, Q^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}.$$

Theo kết quả trong [84], hệ (1.9) có nghiệm duy nhất được biểu diễn như sau

$$y_1(t) = \int_0^t e_\alpha^{J(t-\xi)} [f_1(\xi) + Jx_{1,0}] d\xi + x_{1,0},$$

trong đó

$$e_\alpha^{J(t-\xi)} = (t-\xi)^{(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{\infty} J^k \frac{(t-\xi)^{k\alpha}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}.$$

Mệnh đề 1.3.3. (Xem [84]). Xét hệ (1.10) với $f_2(t)$ khả vi đến bậc $[\alpha v] + 1$ trên $[0, \infty)$ trong đó v là bậc lũy linh của N . Khi đó (1.10) có nghiệm duy nhất

$$y_2(t) = - \sum_{k=0}^{v-1} N^k T^k g_2(t),$$

trong đó $T^k = {}^C_0 D_t^\alpha \circ {}^C_0 D_t^\alpha \circ \dots \circ {}^C_0 D_t^\alpha$, (k lần).

Định lý 1.3.4. (Xem [84]). Cho (E, A) là một cặp ma trận chính quy, hàm $f_2(t)$ khả vi đến bậc $[\alpha v] + 1$ trên $[0, \infty)$, v là bậc lũy linh của N . Khi đó

i) Hệ phương trình vi phân đại số (1.7) giải được.

ii) Điều kiện đầu x_0 tương thích khi và chỉ khi

$$x_{2,0} = - \sum_{k=0}^{v-1} N^k T^k g_2(0),$$

trong đó $T^k = {}^C_0 D_t^\alpha \circ {}^C_0 D_t^\alpha \circ \dots \circ {}^C_0 D_t^\alpha$, (k lần).

iii) Hệ phương trình vi phân đại số (1.7) với điều kiện ban đầu tương thích có nghiệm duy nhất.

Định lý 1.3.5. (Xem [82]). Giả sử cặp ma trận (E, A) chính quy và hai ma trận P, Q khả nghịch thỏa mãn điều kiện (1.8). Khi đó (E, A) không có xung khi và chỉ

khi $N = 0$.

Nhận xét 1.3.6. Theo Mệnh đề 1.3.3, tính liên tục hoặc khả vi của nghiệm $y_2(t)$ phụ thuộc trực tiếp vào các đạo hàm của hàm $g_2(t)$. Đặc biệt, trong trường hợp cặp ma trận (E, A) là chính quy và không có xung, ta có $N = 0$. Khi đó, nghiệm của hệ được xác định bởi $y_2(t) = -g_2(t)$. Như vậy, nếu hàm $f(t)$ là liên tục thì $y_2(t)$ cũng liên tục. Điều này cho thấy rằng tính không có xung của hệ phương trình (1.7) đảm bảo nghiệm của hệ là một hàm liên tục.

Khi tính chính quy của (E, A) của hệ (1.7) chưa được xác định, luôn tồn tại các ma trận không suy biến $\overline{M}, \overline{N}$ sao cho

$$\overline{M}E\overline{N} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{M}A\overline{N} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}.$$

Định lý 1.3.7. (Xem [21]). *Cặp ma trận (E, A) chính quy và không có xung khi và chỉ khi A_4 là ma trận khả nghịch.*

Ngoài ra, trong [40], T. Kaczorek và K. Borawski đã đưa ra các phương pháp khác nhau để xây dựng công thức nghiệm cho hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến: Phương pháp chuỗi Laurent mở rộng (biểu diễn nghiệm dưới dạng chuỗi các hàm mũ), phương pháp ma trận ngược Drazin (sử dụng khái niệm ma trận giả ngược Drazin—một khái niệm tổng quát của ma trận ngược Moore-Penrose), phương pháp phân tích Weierstrass-Kronecker (sử dụng các phân tích cổ điển: Phân tích Jordan-Weierstrass và phân tích Kronecker)...

1.4 Bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn

Trong phần này, chúng tôi trình bày lại các định nghĩa cũng như một số điều kiện đủ liên quan đến bài toán ổn định và tính bị chặn trong thời gian hữu hạn của hệ phương trình vi phân. Các nội dung được đề cập dựa trên các tài liệu tham khảo [57, 65].

1.4.1 Bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn

Đối với hệ phương trình đạo hàm bậc nguyên, khái niệm ổn định trong thời gian hữu hạn lần đầu tiên được đề xuất bởi các nhà toán học người Nga vào những

năm 50 của thế kỷ XX. Sau đó vấn đề này khơi dậy sự hứng thú của nhiều chuyên gia lý thuyết điều khiển [5, 25, 26]. Năm 1997, P. Dorato, C.T. Abdallah và D. Famularo đã sử dụng lý thuyết bất đẳng thức ma trận tuyến tính xây dựng hàm điều khiển phản hồi để lớp hệ tuyến tính đạt được sự ổn định trong một khoảng thời gian nhất định [26]. Điều này mở ra một cách tiếp cận mạnh mẽ trong việc giải quyết các bài toán điều khiển với những công cụ toán học hiện đại.

Với hệ đạo hàm bậc nguyên suy biến tuyến tính, một trong những kết quả đầu tiên về bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn được công bố là của D. Debeljkovic và D.H. Owens năm 1985 [22]. Trong [37], N.A. Kablar cùng cộng sự xét lớp hệ phương trình suy biến tuyến tính sau

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= Ax(t), t \geq 0, \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (1.11)$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là trận hằng số, $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận suy biến.

Đặt $\|x(t)\|_Q^2 = x^T(t)Qx(t)$ với Q là một ma trận đối xứng xác định dương. Cho trước số dương T , ký hiệu $J = \{t : t_0 \leq t \leq t_0 + T\}$.

Định nghĩa 1.4.1. (Xem [37]) Cho các số dương $\alpha < \beta$, ma trận P đối xứng xác định dương và $Q = E^T P E$. Hệ (1.11) được gọi là ổn định trong thời gian hữu hạn theo bộ (J, α, β, Q) nếu

$$\|x(t_0)\|_Q < \alpha \Rightarrow \|x(t)\|_Q < \beta,$$

với $\forall t \in J$.

Định lý 1.4.2. (Xem [37]). Cho các số dương $\alpha < \beta$ và ma trận đối xứng xác định dương P . Hệ (1.11) ổn định trong thời gian hữu hạn theo bộ (J, α, β, Q) nếu điều kiện sau được thoả mãn

$$\ln \frac{\beta}{\alpha} > \Lambda_{\max}(M)(t - t_0), \forall t \in J,$$

trong đó

$$\Lambda_{\max} = \max \left\{ x^T(t) M x(t) : x(t) \in W \setminus \{0\} \text{ và } x^T(t) E^T P E x(t) = 1 \right\},$$

với ma trận $M = A^T P E + E^T P A$.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày lại định nghĩa về hàm Mittag-Leffler.

Định nghĩa 1.4.3. Cho $\alpha \in \mathbb{C}$, hàm Mittag-Leffler một tham số $E_\alpha: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ được định nghĩa như sau

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}.$$

Trong [57], Y. Ma và các cộng sự đã mở rộng khái niệm ổn định trong thời gian hữu hạn cho hệ phân thứ. Xét hệ phân thứ tuyến tính

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) &= Ax(t), t \in [0, T_f], \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.12)$$

trong đó ma trận hằng số $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Định nghĩa 1.4.4. (Xem [57]) Cho $c_1 < c_2$, T_f là các số dương và R là ma trận đối xứng xác định dương. Hệ (1.12) được gọi là ổn định trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R) nếu điều kiện sau thỏa mãn

$$x_0^T R x_0 \leq c_1 \Rightarrow x(t)^T R x(t) < c_2, \quad \forall t \in [0, T_f].$$

Định lý 1.4.5. (Xem [57]). Cho $c_1 < c_2, T_f$ là các số dương và R là ma trận đối xứng xác định dương. Hệ (1.12) ổn định trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R) nếu tồn tại một ma trận đối xứng xác định dương $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ và một số dương ϵ các điều kiện sau thỏa mãn

$$AQ + QA^T - \epsilon P < 0,$$

$$E_\alpha(\epsilon T_f^\alpha) \lambda_1 c_1 < \lambda_2 c_2,$$

trong đó

$$\lambda_1 = \lambda_{\max}(\overline{Q}), \lambda_2 = \lambda_{\min}(\overline{Q}), \overline{Q} = R^{-\frac{1}{2}} Q R^{-\frac{1}{2}}.$$

1.4.2 Bài toán bị chặn trong thời gian hữu hạn

Khái niệm bị chặn trong thời gian hữu hạn tập trung vào việc đảm bảo véc tơ trạng thái của hệ không vượt quá một ngưỡng giá trị cụ thể trong một khoảng thời gian nhất định khi hệ chịu tác động của nhiễu. Trong [65], J. Ren và các cộng sự

xét hệ suy biến có nhiều sau

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + D\omega(t) + f(t, x(t)), t \in [0, T_f], \\ z(t) &= Cx(t) + W\omega(t), \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.14)$$

với E là ma trận suy biến. Nhiễu $\omega(\cdot) \in L^2([0, \infty), \mathbb{R}^q)$ đáp ứng điều kiện

$$\exists d \geq 0 : \int_0^{T_f} \omega^T(t)\omega(t)dt \leq d.$$

Định nghĩa 1.4.6. (Xem [65]). Cho $c_1 < c_2, T_f$ là các số dương và R là ma trận đối xứng xác định dương. Hệ suy biến (1.14) được gọi là bị chặn trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu (1.14) chính quy, không có xung trên $[0, T_f]$ và điều kiện sau được thỏa mãn

$$x^T(0)E^T REx(0) \leq c_1 \Rightarrow x^T(t)E^T REx(t) < c_2, \forall t \in [0, T_f].$$

Trong [57], Y. Ma và các cộng sự cũng lần đầu tiên mở rộng khái niệm bị chặn trong thời gian hữu hạn cho hệ phương trình vi phân phân thứ. Xét hệ phân thứ tuyến tính có nhiều sau

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) &= Ax(t) + D\omega(t), t \in [0, T_f] \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.15)$$

trong đó các ma trận hằng $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, D \in \mathbb{R}^{n \times q}$, nhiễu đầu vào $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ thỏa mãn điều kiện $\omega^T(t)\omega(t) \leq d$ với $d \geq 0$.

Định nghĩa 1.4.7. (Xem [57]). Cho các số dương $c_1 < c_2, T_f$ và ma trận đối xứng xác định dương R . Hệ (1.15) được gọi là bị chặn trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu điều kiện sau thỏa mãn

$$x_0^T R x_0 \leq c_1 \Rightarrow x(t)^T R x(t) < c_2, \forall t \in [0, T_f].$$

Định lý 1.4.8. (Xem [57]). Cho các số dương $c_1 < c_2, T_f$ và ma trận đối xứng xác định dương R . Hệ (1.15) bị chặn trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu tồn tại các ma trận $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q_2 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ đối xứng xác định dương và một

số $\epsilon > 0$ các điều kiện sau thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T - \epsilon Q & DQ_2 \\ Q_2 D^T & -\epsilon Q_2 \end{bmatrix} < 0,$$

$$E_\alpha(\epsilon T_f^\alpha) \left(\frac{\epsilon dT_f^\alpha}{\lambda_{\min}(Q_2)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{c_1}{\lambda_{\min}(Q_1)} \right) < \frac{c_2}{\lambda_{\max}(Q_1)},$$

trong đó

$$Q = R^{-\frac{1}{2}} Q_1 R^{-\frac{1}{2}}.$$

1.5 Bài toán tiêu hao của hệ động lực

Lý thuyết tiêu hao được J.C. Willems giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1972. Trong [78], J.C. Willems xét hệ điều khiển phi tuyến sau

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \geq 0, \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.17)$$

trong đó $x(t) \in X = \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in U = \mathbb{R}^m$ là véc tơ đầu vào, $y(t) \in Y = \mathbb{R}^p$ là véc tơ đầu ra. Hàm tỷ lệ cung cấp $w : U \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định $w(t) = w(u(t), y(t))$ là hàm khả tích địa phương, tức là

$$\int_0^t |w(s)| ds < \infty$$

J.C. Willems đã đưa ra định nghĩa hệ tiêu hao (Dissipative system) như sau.

Định nghĩa 1.5.1. (Xem [78], Hệ tiêu hao). Hệ (1.17) cùng với tỷ lệ cung cấp $w(u(t), y(t))$ được gọi là tiêu hao nếu tồn tại một hàm lưu trữ $S(x) \geq 0$ thỏa mãn bất đẳng thức tiêu hao

$$S(x(0)) + \int_0^t w(u(s), y(s)) ds \geq S(x(t)).$$

Được thúc đẩy bởi J.C. Willems, năm 1976, D.J. Hill và P.J. Moylan đã đề xuất một tỷ lệ cung cấp $w(u(t), y(t))$ [32] kết hợp với hệ (1.17) là

$$w(u(t), y(t)) = y^T(t) Q y(t) + 2y^T(t) Z u(t) + u^T(t) R u(t), \quad (1.18)$$

trong đó $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ là các ma trận đối xứng, $Z \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

D.J. Hill và P.J. Moylan đã đưa ra định nghĩa tiêu hao như sau.

Định nghĩa 1.5.2. (Xem [32]) Hệ (1.17) cùng với tỷ lệ cung cấp (1.18) được gọi là tiêu hao nếu với mọi $u(t)$ chấp nhận được và $\forall t_1 \geq t_0$ thì

$$\int_{t_0}^{t_1} w(u(s), y(s)) ds \geq 0,$$

với $x(t_0) = 0$.

Khả năng lưu trữ có sẵn là một khái niệm quan trọng trong lý thuyết tiêu hao. Đây là lượng năng lượng tối đa có thể được lưu trữ trong hệ có thể giải phóng ra ngoài từ trạng thái ban đầu. Trong thực tế, các hàm lưu trữ thường được sử dụng như các hàm Lyapunov khi xem xét tính ổn định của hệ. Khi nghiên cứu một hệ động lực, một hàm lưu trữ đại diện cho năng lượng bên trong của hệ. Nguyên lý cơ bản là năng lượng này sẽ giảm hoặc không tăng theo thời gian nếu hệ ổn định.

Cho đến nay, với công cụ là lý thuyết Lyapunov cùng sự hỗ trợ của phương pháp bất đẳng thức ma trận tuyến tính, đã có nhiều công bố đáng chú ý về bài toán tiêu hao cho các loại hệ động lực khác nhau [28, 48]. Năm 2002, Z. Li và các cộng sự đã nghiên cứu bài toán điều khiển tiêu hao cho một lớp hệ tuyến tính với trễ theo thời gian với cách tiếp cận sử dụng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Lớp hệ có trễ với nhiễu được mô tả như sau

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d) + B_1 w(t), \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t), \\ x(t) &= \eta(t), \quad t \in [-d, 0], \quad d \leq \tau, \end{cases} \quad (1.19)$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ là véc tơ đầu ra, $w(t) \in \mathbb{R}^p$ là véc tơ nhiễu thuộc $L^2([0, \infty), \mathbb{R}^n)$, $d > 0$ là trễ bị chặn, $\tau > 0$ là một hằng số, $\eta(t)$ là điều kiện ban đầu, A , A_d , B_1 , C_1 , D_{11} là các ma trận hằng có số chiều phù hợp.

Hàm tỷ lệ cung cấp được xác định bởi

$$E(\omega, z, T) = \int_0^T (z^T(t)Qz(t) + 2z^T(t)S\omega(t) + \omega^T(t)R\omega(t)) dt,$$

trong đó Q , S và R là các ma trận thực có số chiều phù hợp, Q là ma trận đối xứng xác định âm và R là ma trận đối xứng.

Định nghĩa 1.5.3. (Xem [48]) Hệ (1.19) được gọi là (Q, S, R) tiêu hao nếu với điều kiện ban đầu bằng không, tồn tại một số thực dương γ sao cho điều kiện sau được thỏa mãn

$$E(\omega, z, T) \geq \gamma \int_0^T \omega^T(t) \omega(t) dt.$$

Nhận xét 1.5.4. (Xem [48]) Bài toán (Q, S, R) tiêu hao chính là tổng quát của các bài toán H_∞ và bài toán thụ động.

1. Khi $Q = -I$, $S = 0$ và $R = \gamma^2 I$ thì bài toán (Q, S, R) tiêu hao trở thành bài toán hiệu suất H_∞ .
2. Khi $Q = 0$, $S = I$ và $R = 0$ thì bài toán (Q, S, R) tiêu hao trở thành bài toán thụ động.

Gần đây, phương pháp ổn định trong thời gian hữu hạn đã được các nhà nghiên cứu áp dụng vào lý thuyết tiêu hao. Nhiều kết quả thú vị về bài toán FTDC cho các hệ khác nhau đã được công bố [20, 55, 56].

1.6 Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển

Năm 1972, S.L Chang và J.P Keng lần đầu tiên đưa ra bài toán GCC cùng hàm chi phí điều khiển của hệ. Trong kỹ thuật, khi giải quyết các bài toán điều khiển, việc thiết kế hàm điều khiển không chỉ nhằm mục tiêu đảm bảo sự ổn định của hệ thống mà còn cần đáp ứng các tiêu chí về hiệu suất thường được gọi là “chi phí”. Ở đây, “chi phí” này có thể là năng lượng tiêu hao, sai số điều khiển hoặc bất kỳ tiêu chí hiệu suất nào được định nghĩa trước. Tính đầy đủ của hiệu suất liên quan đến việc hàm điều khiển đảm bảo hệ thống hoạt động ở mức hiệu quả cao nhất.

Trong [14], bài toán S.L Chang và J.P Keng đề xuất như sau: Xét hệ điều khiển động lực được mô tả bởi

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), q(t), t),$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển, $q(t)$ là một hàm có giá trị thuộc tập đóng bị chặn Ω . Hàm đảm bảo chi phí liên kết với hệ điều

hiệu được xác định bởi

$$C[x(t_1), u(t), q(t)] = h(x(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} g(x(t), u(t), q(t), t) dt,$$

trong đó $h(x(t_2)) \geq 0$ biểu diễn chi phí cuối cùng, tích phân biểu diễn chi phí tích lũy từ t_1 đến t_2 và điều khiển $u(t) = \eta(x(t), t)$.

Giá trị đảm bảo chi phí và điều khiển đảm bảo chi phí

Nếu có một số V và một điều khiển $u(t)$ thỏa mãn

$$C[x(t_1), u(t), q(t)] \leq V$$

với mỗi sự biến thiên cho phép của $q(t)$ thì V được gọi là giá trị đảm bảo chi phí của hệ bắt đầu từ $x(t_1)$ và $u(t)$ được gọi là điều khiển đảm bảo chi phí.

Trong [14], S.L Chang và J.P Keng xét với trường hợp hệ tuyến tính với các thành phần không chắc chắn sau

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(q(t))x(t) + B(q(t))u(t), t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Các tác giả đã xây dựng hàm chi phí có dạng

$$C[x(0), u(t), q(t)] = \frac{1}{2}x^T(t)H(x(t)) + \frac{1}{2} \int_0^t (x^T(t)Px(t) + u^T(t)Qu(t))dt,$$

trong đó các ma trận H, P đối xứng nửa xác định dương còn Q là ma trận đối xứng xác định dương.

Trong những thập kỷ gần đây, bài toán GCC đã được thiết kế cho các lớp hệ động lực khác nhau. Phương pháp này cho một giới hạn trên cho chỉ số hiệu suất được chỉ định, do đó đảm bảo rằng sự suy giảm hiệu suất do các thành phần không chắc chắn không vượt qua giới hạn này. Một số kết quả đáng chú ý về GCC đã được công bố dựa cho các loại hệ suy biến với đạo hàm bậc nguyên [30, 60, 79, 86].

B. Li cùng nhóm nghiên cứu đã mở rộng bài toán FTGCC cho các hệ suy biến [46]. Lớp hệ suy biến được xét là

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]u(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (1.20)$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển đầu vào, x_0 là điều kiện đầu. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là các ma trận đã biết. $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận suy biến với $\text{rank}(E) = r < n$. $\Delta A(t), \Delta B(t)$ là các ma trận biến thiên theo thời gian thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} \Delta A(t) & \Delta B(t) \end{bmatrix} = M\mathcal{F}(t) \begin{bmatrix} N_a & N_b \end{bmatrix}$$

với M, N_a, N_b là các ma trận cho trước $\mathcal{F}(t)$ là ma trận chưa biết đáp ứng điều kiện $\mathcal{F}^T(t)\mathcal{F}(t) \leq I, \forall t \geq 0$.

Kết hợp với hệ phương trình vi phân suy biến (1.20) là hàm đảm bảo chi phí

$$J(u) = \int_0^T [x^T(t)Q_1x(t) + u^T(t)Q_2u(t)]dt,$$

trong đó Q_1 và Q_2 là các ma trận đối xứng xác định dương cho trước với số chiều thích hợp. Nhóm tác giả đã xây dựng hàm điều khiển phản hồi trạng thái cho bài toán đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ đang xét.

Gọi U_Ω là tập tất cả các hàm điều khiển chấp nhận được để hệ đóng của (1.20) ổn định. Một yêu cầu tự nhiên là tìm hàm điều khiển $\hat{u}(t) \in U_\Omega$ sao cho hàm chi phí $J(\hat{u}(t)) = \min_{u \in U_\Omega} J(u)$. Có rất nhiều khó khăn trong việc giải bài toán điều khiển tối ưu nói trên. Vì vậy chúng ta đi tìm một hàm điều khiển $\hat{u}(t) \in U_\Omega$ sao cho hàm chi phí hữu hạn và có giá trị càng nhỏ càng tốt. Giải quyết bài toán GCC cho hệ động lực liên quan đến việc xây dựng một hàm điều khiển $\hat{u}(t) \in U_\Omega$ và một số J^* sao cho với hàm điều khiển $\hat{u}(t)$, hệ (1.20) chấp nhận được và $J(\hat{u}) \leq J^*$. Khi đó $\hat{u}(t)$ được gọi là hàm điều khiển đảm bảo chi phí và J^* được gọi là giá trị đảm bảo chi phí.

Đối với các hệ phương trình vi phân phân thứ, cũng đã có những công bố đáng chú ý [69, 74]. Năm 2020, M. V. Thuan, N. Sup và V. N. Phat đã thiết kế hàm điều khiển bảo đảm chi phí trong thời gian hữu hạn, đồng thời các tác giả cũng giới thiệu một dạng hàm chi phí điều khiển mới cho lớp hệ phân thứ Caputo có nhiều [74]. Xét hệ điều khiển phân thứ sau:

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) &= Ax(t) + f(t, x(t)) + Bu(t) + h(t, u(t)) \\ &\quad + W\omega(t) + g(t, \omega(t)), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (1.21)$$

trong đó $\alpha \in (0, 1)$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển, A, B, W là các ma trận cho trước với số chiều phù hợp, $\omega(t) \in \mathbb{R}^p$ là véc tơ nhiễu thỏa mãn:

$$\exists d > 0 : \sup_{t \geq 0} \omega^T(t) \omega(t) \leq d.$$

Các hàm phi tuyến $f(t, x(t))$, $g(t, \omega(t))$ và $h(t, u(t))$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz với mọi $(t, x, u, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$. Liên kết với hệ (1.21), tác giả xét hàm chi phí sau:

$$J_t(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f^0(s, x(s), u(s), \omega(s)) ds, \quad (1.22)$$

trong đó hàm $f^0(t, x(t), u(t), \omega(t)) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f^0(t, x(t), u(t), \omega(t)) \leq x^T(t) Q_1 x(t) + u^T(t) Q_2 u(t) + \omega^T(t) Q_3 \omega(t),$$

với Q_i , $i = 1, 2, 3$ là các ma trận đối xứng xác định dương đã cho. Trong trường hợp đặc biệt, khi $\alpha = 1$ thì (1.22) được đưa về hàm chi phí bậc hai cổ điển liên kết với hệ phương trình vi phân trường hợp đạo hàm bậc nguyên.

1.7 Một số bổ đề bổ trợ

Trong phần này, chúng tôi trình bày lại một số bổ đề đóng vai trò quan trọng trong việc chứng minh các kết quả chính ở các chương sau.

Bổ đề 1.7.1. (Xem [6]) *Cho $K \in \mathbb{R}^{l \times l}$ là một ma trận Metzler. Khi đó, các mệnh đề sau đây là tương đương:*

i) $\exists \xi \in \mathbb{R}^l$ thỏa mãn $\xi \succ 0$ và $K\xi \prec 0$.

ii) K là ma trận Hurwitz.

iii) K là ma trận khả nghịch và $K^{-1} \preceq 0$.

Bổ đề 1.7.2. (Xem [7], Bất đẳng thức ma trận Cauchy). *Cho $u, v \in \mathbb{R}^n$ và X là một ma trận đối xứng xác định dương trong $\mathbb{R}^{n \times n}$. Khi đó, ta có bất đẳng thức sau*

$$\pm 2u^T v \leq u^T X u + v^T X^{-1} v.$$

Bổ đề 1.7.3. (Xem [7], Bổ đề Schur). *Cho P, Q, R là các ma trận có số chiều thích hợp, P, Q là hai ma trận đối xứng và $Q > 0$. Khi đó $P + R^T Q^{-1} R < 0$ khi*

và chỉ khi

$$\begin{bmatrix} P & R^T \\ R & -Q \end{bmatrix} < 0.$$

Bổ đề 1.7.4. (Xem [75]). Giả sử rằng $u(t) \in \mathbb{R}^n$ là một hàm liên tục với mọi $t \geq 0$ và $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ là một hàm khả vi, lồi trên $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\mathcal{V}(0) = 0$. Khi đó ta có đánh giá dưới đây

$${}_0^C D_t^\alpha \mathcal{V}(u(t)) \leq \langle \nabla \mathcal{V}(u(t)), {}_0^C D_t^\alpha u(t) \rangle, \quad t \geq 0,$$

trong đó $\nabla \mathcal{V}(\cdot)$ là gradient của hàm $\mathcal{V}$.

Bổ đề 1.7.5. (Xem [15]). Cho các ma trận $\hat{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{H} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\hat{Z} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\hat{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ và số thực $\epsilon > 0$. Nếu điều kiện sau thỏa mãn

$$\begin{pmatrix} \hat{F} & \epsilon \hat{H} + \hat{Z}^T \hat{V}^T \\ * & -\epsilon \hat{V} - \epsilon \hat{V}^T \end{pmatrix} < 0$$

thì ta có

$$\hat{F} + \hat{Z}^T \hat{H}^T + \hat{H} \hat{Z} < 0.$$

Bổ đề 1.7.6. (Xem [62]). Cho trước các ma trận $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ và một ma trận đối xứng $\mathcal{C}$ với số chiều thích hợp. Khi đó,

$$\mathcal{C} + \mathcal{A}\mathcal{F}(t)\mathcal{B} + (\mathcal{A}\mathcal{F}(t)\mathcal{B})^T < 0$$

với mọi $\mathcal{F}(t)$ thỏa mãn $\mathcal{F}^T(t)\mathcal{F}(t) \leq I$ nếu và chỉ nếu tồn tại số thực $\kappa > 0$ thỏa mãn bất đẳng thức ma trận

$$\mathcal{C} + \kappa \mathcal{A}\mathcal{A}^T + \kappa^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{B} < 0.$$

Bổ đề 1.7.7. (Xem [29], Phân tích giá trị kì dị). Cho ma trận $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ với $\text{rank}(E) = r \leq n$. Khi đó tồn tại hai ma trận trực giao $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sao cho

$$E = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T,$$

trong đó $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ với $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r > 0$.

Đặt

$$\begin{aligned} U &= [U_1, U_2], \quad V = [V_1, V_2], \\ U_1 &= [u_1, u_2, \dots, u_r], \quad U_2 = [u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n], \\ V_1 &= [v_1, v_2, \dots, v_r], \quad V_2 = [v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n]. \end{aligned}$$

Khi đó $Ev_i = \sigma_i u_i$ và $E^T u_i = \sigma_i v_i$. Hơn thế nữa, $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ là một cơ sở trực chuẩn cho không gian vec tơ cột của E , $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn cho không gian hạt nhân $N(E^T)$, $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ là một cơ sở trực chuẩn cho không gian vec tơ hàng của E , $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn cho không gian hạt nhân $N(E)$ và $EV_2 = 0$, $U_2^T E = 0$.

Dựa trên các giả thiết và kết quả về phân tích giá trị kỳ dị trình bày ở trên, L. Zhang và B. Huang đã chứng minh được Bổ đề sau.

Bổ đề 1.7.8. (Xem [83]). *Các mệnh đề sau đây đúng:*

- (i) Mọi ma trận Q thỏa mãn $E^T Q = Q^T E \geq 0$ đều có thể biểu diễn dưới dạng $Q = U_1 \mathcal{X} U_1^T E + U_2 \mathcal{Z}$, trong đó $0 \leq \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ và $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$. Hơn thế nữa, khi ma trận Q không suy biến thì $\mathcal{X} > 0$.
- (ii) Mọi ma trận P thỏa mãn $PE^T = EP^T \geq 0$ đều có thể biểu diễn dưới dạng $P = EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T$, trong đó $0 \leq \hat{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ và $\hat{\mathcal{Z}} \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$. Hơn thế nữa, khi ma trận P không suy biến thì $\hat{\mathcal{X}} > 0$.
- (iii) Nếu $U_1 \mathcal{X} U_1^T E + U_2 \mathcal{Z}$ là ma trận không suy biến trong đó $\mathcal{X} > 0$ thì tồn tại ma trận $\hat{\mathcal{X}}$ và ma trận $\hat{\mathcal{Z}}$ thỏa mãn

$$U_1 \mathcal{X} U_1^T E + U_2 \mathcal{Z} = (EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T)^{-T},$$

với $\hat{\mathcal{X}} = \Sigma_r^{-1} \mathcal{X}^{-1} \Sigma_r^{-1}$.

Chương 2

Bài toán ổn định và ổn định hóa được dạng mũ cho hệ suy biến dương rời rạc có xung với trễ hằng

Chương này tập trung nghiên cứu tính ổn định của hệ phương trình vi phân suy biến dương rời rạc với tác động xung và trễ không biến thiên. Chúng tôi đưa ra các điều kiện đủ giải quyết tính ổn định mũ và thiết kế hàm điều khiển cho bài toán ổn định hóa được dạng mũ của hệ suy biến dương rời rạc có xung và trễ theo thời gian. Nội dung của chương này được trình bày dựa trên bài báo (CT1) trong danh mục các công trình khoa học đã công bố của tác giả.

2.1 Tính ổn định dạng mũ cho hệ suy biến dương rời rạc có xung với trễ theo thời gian

Xét hệ phương trình vi phân suy biến rời rạc có xung sau

$$\begin{cases} Ex(t+1) &= Ax(t) + A_dx(t-h), \quad t \neq t_m - 1, \\ \mathbf{x}_1(t_m) &= H\mathbf{x}_1(t_m - 1), \quad m \in \mathbb{N}^*, \\ x(s) &= \eta(s), \quad s \in \{-h, -h+1, \dots, 0\}, \end{cases} \quad (2.1)$$

trong đó $x(\cdot) := (\mathbf{x}_1(\cdot), \mathbf{x}_2(\cdot))$, $\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^r$ và $\mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$ là véc tơ trạng thái. Ma trận $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ suy biến với $\text{rank}(E) = r < n$. A, A_d là các ma trận hằng đã biết với số chiều phù hợp. Giả sử rằng các ma trận E, A, A_d biểu diễn được như sau

$$E := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, A_d := \begin{pmatrix} A_{d1} & A_{d2} \\ A_{d3} & A_{d4} \end{pmatrix},$$

với $A_1, A_{d1} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $A_2, A_{d2} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $A_3, A_{d3} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$, $A_4, A_{d4} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $H \in \mathbb{R}^{r \times r}$. Hằng số trễ $h \in \mathbb{N}^*$ và $\eta : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ là hàm điều kiện ban đầu. Dãy

xung $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ thỏa mãn $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \dots, t_m \rightarrow \infty$ với $m \rightarrow \infty$. Ký hiệu véc tơ trạng thái với giá trị ban đầu (η_1, η_2) của hệ (2.1) là $\mathbf{x}_1(t, \eta_1, \eta_2)$ và $\mathbf{x}_2(t, \eta_1, \eta_2)$.

Định nghĩa 2.1.1. (Xem [68]) Hệ (2.1) được gọi là một hệ dương có xung nếu đối với mọi $\eta(t) \succeq 0$ thì $\mathbf{x}(t, \eta(t)) \succeq 0, \forall t \geq 0$.

Định nghĩa 2.1.2. Hệ (2.1) được gọi là ổn định mũ nếu $\exists \xi > 0, \alpha \in (0, 1), \lambda \in \mathbb{R}_+^n$ sao cho với mọi $\eta(t) \succeq 0$

$$\|x(t)\| \leq \xi \alpha^t \|\eta\|_h^\dagger, t \geq 0,$$

trong đó $\|\eta\|_h^\dagger := \sup_{-h \leq s \leq 0} \|\eta(s)\|_\infty^\lambda$.

Bổ đề 2.1.3. Giả sử ma trận A_4 trong hệ (2.1) thỏa mãn điều kiện $\det(A_4) \neq 0$. Khi đó, nghiệm của hệ (2.1) tồn tại và duy nhất trên $\mathbb{N}^*$.

Chứng minh. Xét $t \in [0, h]$, từ điều kiện $\det(A_4) \neq 0$, hệ (2.1) đưa được về

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t+1) &= A_1 \mathbf{x}_1(t) + A_2 \mathbf{x}_2(t) + A_{d_1} \eta_1(t-h) + A_{d_2} \eta_2(t-h), \quad t \neq t_m - 1, \\ \mathbf{x}_2(t) &= -A_4^{-1} (A_3 \mathbf{x}_1(t) + A_{d_3} \eta_1(t-h) + A_{d_4} \eta_2(t-h)), \\ \mathbf{x}_1(t_m) &= H \mathbf{x}_1(t_m - 1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Với $t = 0$, từ phương trình đầu tiên của (2.2) ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(1) &= (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3) \eta_1(0) + (A_{d_1} - A_2 A_4^{-1} A_{d_3}) \eta_1(-h) \\ &\quad + (A_{d_2} - A_2 A_4^{-1} A_{d_4}) \eta_2(-h). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ta nhận được kết quả sau khi thế (2.3) vào phương trình thứ hai của (2.2)

$$\mathbf{x}_2(1) = -A_4^{-1} (A_3 \mathbf{x}_1(1) + A_{d_3} \eta_1(1-h) + A_{d_4} \eta_2(1-h)).$$

Với $t = t_m$, ta nhận được $\mathbf{x}_1(t_m) = H \mathbf{x}_1(t_m - 1)$, từ đó tìm được $\mathbf{x}_2(t_m)$. Từng bước một, ta tìm được nghiệm $\mathbf{x}_1(\mathbf{t})$ trên $[0, h]$ của phương trình đầu tiên của (2.2). Khi đã biết $\mathbf{x}_1(\mathbf{t})$ trên $[0, h]$, từ phương trình thứ hai của (2.2) ta tìm ra nghiệm $\mathbf{x}_2(\mathbf{t})$ trên $[0, h]$. Lặp lại quá trình trên $[nh, (n+1)h], n \in \mathbb{N}$, ta tìm được nghiệm $x(t), t \geq 0$. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 2.1.4. Giả sử A_4 là một ma trận Metzler và Hurwitz và A_1, A_2, A_3, H, A_d là các ma trận không âm. Khi đó, hệ (2.1) là một hệ dương có xung.

Chứng minh. Vì A_4 là ma trận Metzler và Hurwitz nên theo Bổ đề 1.7.1, ta suy ra $\det(A_4) \neq 0$. Áp dụng Bổ đề 2.1.3, hệ (2.1) có một nghiệm duy nhất và $-A_4^{-1} \succeq 0$. Lưu ý rằng $-A_4^{-1}A_3, -A_4^{-1}A_{d_3}, -A_4^{-1}A_{d_4}$ là các ma trận không âm vì $-A_4^{-1}, A_3, A_{d_3}, A_{d_4}$ không âm. Từ (2.1) ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t+1) &= A_1\mathbf{x}_1(t) + A_2\mathbf{x}_2(t) + A_{d_1}\mathbf{x}_1(t-h) + A_{d_2}\mathbf{x}_2(t-h), \\ \mathbf{x}_2(t) &= (-A_4)^{-1}(A_3\mathbf{x}_1(t) + A_{d_3}\mathbf{x}_1(t-h) + A_{d_4}\mathbf{x}_2(t-h)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Với $t = t_m$, ta nhận được $\mathbf{x}_1(t_m) = H\mathbf{x}_1(t_m - 1), m \in \mathbb{N}^*$. Trước hết, ta chứng minh rằng

$$x(t) \succeq 0, \quad 0 \leq t \leq t_1 - 1. \quad (2.5)$$

Với $t = 0$, từ phương trình thứ nhất của (2.4) ta nhận được biểu thức sau

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(1) &= A_1\mathbf{x}_1(0) + A_2\mathbf{x}_2(0) + A_{d_1}\mathbf{x}_1(-h) + A_{d_2}\mathbf{x}_2(-h) \\ &= A_1\eta_1(0) + A_2\eta_2(0) + A_{d_1}\eta_1(-h) + A_{d_2}\eta_2(-h) \\ &\succeq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Từ (2.6) và phương trình thứ hai của (2.4), ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(1) &= (-A_4)^{-1}(A_3\mathbf{x}_1(1) + A_{d_3}\mathbf{x}_1(1-h) + A_{d_4}\mathbf{x}_2(1-h)) \\ &= (-A_4)^{-1}(A_3\mathbf{x}_1(1) + A_{d_3}\eta_1(1-h) + A_{d_4}\eta_2(1-h)) \\ &\succeq 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Kết hợp bất đẳng thức (2.6) và (2.7), ta nhận được $x(1) \succeq 0$. Tương tự, ta cũng thu được $x(t) \succeq 0, \forall t \in \{1, 2, \dots, t_1 - 1\}$. Vì thế, (2.5) đúng.

Với $t = t_1$, ta có $\mathbf{x}_1(t_1) = H\mathbf{x}_1(t_1 - 1)$. Từ điều kiện $H \succeq 0$ và $\mathbf{x}_1(t_1 - 1) \succeq 0$ ta suy ra được $\mathbf{x}_1(t_1) \succeq 0$. Từ kết quả này và phương trình thứ hai của (2.4) ta nhận được $\mathbf{x}_2(t_1) \succeq 0$. Với $t_1 \leq t \leq t_2 - 1$, ta chứng minh rằng

$$\mathbf{x}_1(t) \succeq 0, \quad \mathbf{x}_2(t) \succeq 0. \quad (2.8)$$

Chú ý rằng $x(t_1) \succeq 0$. Giả sử (2.8) đúng với mọi $t_k \leq \hat{t}_l, t_1 \leq t_l < t_2 - 1$. Ta sẽ chứng minh (2.8) đúng với $t_k + 1$. Từ phương trình thứ nhất của (2.4), ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t_k + 1) &= A_1\mathbf{x}_1(t_k) + A_2\mathbf{x}_2(t_k) + A_{d_1}\mathbf{x}_1(t_k - h) + A_{d_2}\mathbf{x}_2(t_k - h) \\ &\succeq 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ta nhận được kết quả sau từ (2.9) và phương trình thứ hai của (2.4)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(t_k + 1) &= (-A_4)^{-1} (A_3 \mathbf{x}_1(t_k + 1) + A_{d_3} \mathbf{x}_1(t_k + 1 - h) \\ &\quad + A_{d_4} \mathbf{x}_2(t_k + 1 - h)) \succeq 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Kết hợp bất đẳng thức (2.9) và (2.10) ta được $x(t_k + 1) \succeq 0$. Vậy (2.8) đúng.

Với $t = t_2$, ta có $\mathbf{x}_1(t_2) = H \mathbf{x}_1(t_2 - 1)$. Kết hợp $H \succeq 0$ và $\mathbf{x}_1(t_2 - 1) \succeq 0$ ta suy ra $\mathbf{x}_1(t_2) \succeq 0$. Từ điều này và phương trình thứ hai của (2.4) ta được $\mathbf{x}_2(t_2) \succeq 0$. Bằng cách lặp lại quy trình tương tự thì $\mathbf{x}_1(t) \succeq 0, \mathbf{x}_2(t) \succeq 0, t \geq 0$. Điều này chứng minh rằng (2.1) là hệ dương có xung. $\square$

Ký hiệu

$$\begin{aligned} A_E &:= A + I_n - E, H := (h_{ij})_{r \times r}, J_{r,n} = \{r, r+1, \dots, n\}, \\ \mathcal{A}_1 &:= A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3 := (a_{ij})_{r \times r}, \\ \mathcal{A}_3 &:= -A_4^{-1} A_3 := (d_{ij})_{(n-r) \times r}, \\ \bar{A}_{d_1} &:= A_{d_1} - A_2 A_4^{-1} A_{d_3} := (b_{ij})_{r \times r}, \\ \bar{A}_{d_2} &:= A_{d_2} - A_2 A_4^{-1} A_{d_4} := (c_{ij})_{r \times (n-r)}, \\ \bar{A}_{d_3} &:= -A_4^{-1} A_{d_3} := (e_{ij})_{(n-r) \times r}, \\ \bar{A}_{d_4} &:= -A_4^{-1} A_{d_4} := (f_{ij})_{(n-r) \times (n-r)}, \\ \Lambda_1 &:= (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}_+^r, \Lambda_2 = (\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^{n-r}, \lambda := (\Lambda_1, \Lambda_2) \in \mathbb{R}_+^n. \end{aligned}$$

Ta luôn giả sử rằng các ma trận A_E, A_d và H không âm. Một điều kiện đủ để xét tính ổn định mũ của hệ được thể hiện qua nội dung của định lý sau.

Định lý 2.1.5. *Giả sử tồn tại các số $\alpha \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1)$ và $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ thỏa mãn các ràng buộc sau*

$$(-\alpha E + A + \alpha^{-h} A_d) \lambda \prec 0, \quad (2.11a)$$

$$R_\lambda^i = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^r h_{ij} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} > 1, i \in J_{1,r}, \quad (2.11b)$$

$$\underline{\mathfrak{T}} \geq -\frac{1}{\delta} \log_\alpha R_\lambda, \quad (2.11c)$$

trong đó $R_\lambda = \max_{1 \leq i \leq r} \{R_\lambda^i\}$. Khi đó, với thời gian duy trì tối thiểu $\underline{\mathfrak{T}}$ (nghĩa là dãy thời gian xung thỏa mãn $\inf_m \{t_m - t_{m-1}\} \geq \underline{\mathfrak{T}}, m \in \mathbb{N}^*$), hệ (2.1) ổn định

mũ. Hơn thế nữa, ta có

$$\|x(t)\| \leq \|\eta\|_h^\dagger \|\lambda\| \alpha^{(1-\delta)t}, \quad t \geq 0.$$

Chứng minh. Chứng minh của Định lý 2.1.5 được chia thành hai phần chính: Phần thứ nhất kiểm tra tính dương của hệ (2.1) và phần thứ hai phân tích tính ổn định mũ của hệ (2.1).

Phần 1. Tính dương

Vì $A_E := A + I_n - E = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 + I_{n-r} \end{pmatrix}$, $A_d = \begin{pmatrix} A_{d_1} & A_{d_2} \\ A_{d_3} & A_{d_4} \end{pmatrix}$ là các ma trận không âm nên ma trận $A_1, A_2, A_3, A_{d_1}, A_{d_2}, A_{d_3}, A_{d_4}$ và $A_4 + I_{n-r}$ cũng không âm. Mặt khác, do $A_4 + I_{n-r}$ là một ma trận không âm nên nó cũng là một ma trận Metzler. Đặt $\lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2) \in \mathbb{R}_+^r \times \mathbb{R}_+^{n-r}$, ta nhận được kết quả sau từ (2.11a)

$$(A_4 + \alpha^{-h} A_{d_4}) \Lambda_2 \prec 0.$$

Từ bất đẳng thức này kết hợp $\alpha^{-h} A_{d_4} \Lambda_2$ không âm kéo theo $A_4 \Lambda_2 \prec 0$. Từ $A_4 \Lambda_2 \prec 0$ kết hợp với Bổ đề 1.7.1, ta nhận được $\det(A_4) \neq 0$, $-A_4^{-1} \succeq 0$ và A_4 là ma trận Hurwitz. Theo bổ đề 2.1.3, hệ (2.1) có nghiệm duy nhất. Hơn thế nữa, theo Bổ đề 2.1.4, hệ (2.1) là một hệ dương có xung.

Phần 2. Ổn định mũ Ta xét các hàm $\Sigma_i(x(t)) := \frac{x_i(t)}{\lambda_i}$, $i \in J_{1,n}$ và hàm $\Sigma(x(t)) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Sigma_i(x(t))\}$. Khi đó $x(t) \preceq \Sigma(x(t))\lambda$. Với $i \in J_{1,n}$, đặt

$$z_i(t) = \begin{cases} \frac{x_i(t)}{\lambda_i} - \alpha^t \|\eta\|_h^\dagger, & -h \leq t \leq 0, \\ \frac{x_i(t)}{\lambda_i} - (R_\lambda)^{m-1} \alpha^t \|\eta\|_h^\dagger, & t_{m-1} \leq t < t_m, m \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (2.12)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$z_i(t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \forall i \in J_{1,n}. \quad (2.13)$$

Đầu tiên, ta chứng minh các bất đẳng thức sau đúng

$$\sum_{j=1}^r (a_{ij} + \alpha^{-h} b_{ij}) \frac{\lambda_j}{\lambda_i} + \sum_{j=r+1}^n c_{ij} \alpha^{-h} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} - \alpha < 0, \quad i \in J_{1,r}, \quad (2.14)$$

$$\sum_{j=1}^r (d_{ij} + \alpha^{-h} e_{ij}) \frac{\lambda_j}{\lambda_i} + \sum_{j=r+1}^n \alpha^{-h} f_{ij} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} - 1 < 0, \quad i \in J_{r+1,n}. \quad (2.15)$$

Thật vậy, vì $A_{d_1}, A_{d_2}, A_{d_3}, A_{d_4}, A_1, A_2, A_3$ và $-A_4^{-1} \succeq 0$ là các ma trận không âm nên các ma trận $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3, \bar{A}_{d_1}, \bar{A}_{d_2}, \bar{A}_{d_3}, \bar{A}_{d_4}$ không âm. Từ điều kiện (2.11a) và tính chất không âm, không suy biến của ma trận $\begin{pmatrix} I_r & -A_2 A_4^{-1} \\ 0 & -A_4^{-1} \end{pmatrix}$, ta nhận được đánh giá sau

$$\begin{pmatrix} I_r & -A_2 A_4^{-1} \\ 0 & -A_4^{-1} \end{pmatrix} (-\alpha E + A + \alpha^{-h} A_d) \lambda \prec 0. \quad (2.16)$$

Các ước lượng sau được suy ra từ bất đẳng thức (2.16)

$$\begin{aligned} (-\alpha I_r + \mathcal{A}_1 + \alpha^{-h} \bar{A}_{d_1}) \Lambda_1 + \alpha^{-h} \bar{A}_{d_2} \Lambda_2 &\prec 0, \\ (\mathcal{A}_3 + \alpha^{-h} \bar{A}_{d_3}) \Lambda_1 + \alpha^{-h} \bar{A}_{d_4} \Lambda_2 &\prec \Lambda_2. \end{aligned}$$

Điều này tương đương với

$$\sum_{j=1}^r (a_{ij} + \alpha^{-h} b_{ij}) \lambda_j + \sum_{j=r+1}^n \alpha^{-h} c_{ij} \lambda_j - \alpha \lambda_i \prec 0, i \in J_{1,r}, \quad (2.17)$$

$$\sum_{j=1}^r (d_{ij} + \alpha^{-h} e_{ij}) \lambda_j + \sum_{j=r+1}^n \alpha^{-h} f_{ij} \lambda_j - \lambda_i \prec 0, i \in J_{r+1,n}. \quad (2.18)$$

Từ (2.17) và (2.18), ta chứng minh được các bất đẳng thức (2.14) và (2.15).

Đặt nghiệm không tầm thường duy nhất của hệ (2.1) với điều kiện ban đầu $\eta(\cdot)$ là $x(t, \eta) = (\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t))$, với $\mathbf{x}_1(t) := (x_1(t), \dots, x_r(t))$, $\mathbf{x}_2(t) := (x_{r+1}(t), \dots, x_n(t))$. Áp dụng Bổ đề 2.1.4, ta được

$$x(t) \succeq 0, t \geq -h. \quad (2.19)$$

Từ (2.4) ta có

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= a_{ii} x_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^r a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^r b_{ij} x_j(t-h) \\ &\quad + \sum_{j=r+1}^n c_{ij} x_j(t-h), i \in J_{1,r}, \\ x_i(t) &= \sum_{j=1}^r d_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^r e_{ij} x_j(t-h) + \sum_{j=r+1}^n f_{ij} x_j(t-h), \\ &\quad i \in J_{r+1,n}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ta chia quá trình chứng minh (2.13) thành các bước sau:

Bước 1: Trước hết, ta chỉ ra điều kiện (2.13) đúng với $t \in [-h, 0]$. Thật vậy, áp dụng (2.19), trong đó $x(s) = \eta(s)$ với $s \in [-h, 0]$, $\alpha \in (0, 1)$ ta thu được

$$\begin{aligned} z_i(t) &= \frac{x_i(t)}{\lambda_i} - \alpha^t \|\eta\|_h^\dagger \leq \|x(t)\|_\infty^\lambda - \alpha^t \|\eta\|_h^\dagger \\ &\leq \|\eta\|_h^\dagger - \alpha^t \|\eta\|_h^\dagger \leq 0, i \in J_{1,n}, t \in [-h, 0]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Bước 2: Tiếp theo, ta chứng minh (2.13) đúng với $t \in (0, t_1 - 1]$ tức là

$$z_i(t) \leq 0, \forall i \in J_{1,n}. \quad (2.22)$$

Giả sử rằng điều này là không đúng. Khi đó tồn tại $\exists m \in J_{1,n}$ và $\bar{t} \in (0, t_1 - 1]$ thỏa mãn

$$z_i(t) \leq 0, t \in (0, \bar{t} - 1], i \in J_{1,n}, z_m(\bar{t}) > 0. \quad (2.23)$$

Kết hợp các điều kiện (2.12), (2.21) và (2.23), ta thu được kết quả sau

$$x(t) \preceq \alpha^t \|\eta\|_h^\dagger \lambda, \forall t \in [-h, \bar{t} - 1]. \quad (2.24)$$

Ta xét hai trường hợp cho chỉ số m như sau:

Trường hợp 1: Xét $m \in J_{1,r}$. Từ (2.14), (2.20), (2.12) và (2.24) ta có

$$\begin{aligned} z_m(\bar{t}) &= \frac{x_m(\bar{t})}{\lambda_m} - \alpha^{\bar{t}} \|\eta\|_h^\dagger \\ &\leq \frac{1}{\lambda_m} \left(a_{mm} x_m(\bar{t} - 1) + \sum_{j=1, j \neq m}^r a_{mj} x_j(\bar{t} - 1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^r b_{mj} x_j(\bar{t} - 1 - h) + \sum_{j=r+1}^n c_{mj} x_j(\bar{t} - 1 - h) \right) - \alpha^{\bar{t}} \|\eta\|_h^\dagger \\ &\leq \frac{1}{\lambda_m} \left(a_{mm} \alpha^{\bar{t}-1} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_m + \sum_{j=1, j \neq m}^r a_{mj} \alpha^{\bar{t}-1} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_j \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^r b_{mj} \alpha^{-h} \alpha^{\bar{t}-1} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_j + \sum_{j=r+1}^n c_{mj} \alpha^{-h} \alpha^{\bar{t}-1} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_j \right) - \alpha^{\bar{t}} \|\eta\|_h^\dagger \\ &= \alpha^{\bar{t}-1} \|\eta\|_h^\dagger \left(\left(\sum_{j=1}^r a_{mj} + \alpha^{-h} b_{mj} \right) \frac{\lambda_j}{\lambda_m} + \sum_{j=r+1}^n \alpha^{-h} c_{mj} \frac{\lambda_j}{\lambda_m} - \alpha \right) \\ &\stackrel{(2.14)}{<} 0, \end{aligned}$$

điều này mâu thuẫn với (2.23). Vì vậy,

$$z_i(t) \leq 0, \forall i \in J_{1,r}, t \in (0, t_1 - 1]. \quad (2.25)$$

Trường hợp 2: Xét $m \in J_{r+1,n}$. Khi đó kết hợp các điều kiện (2.15), (2.20), (2.12) và (2.24), ta được

$$\begin{aligned} z_m(\bar{t}) &= \frac{x_m(\bar{t})}{\lambda_m} - \alpha^{\bar{t}} \|\eta\|_h^\dagger \\ &= \frac{1}{\lambda_m} \left(\sum_{j=1}^r d_{mj} x_j(\bar{t}) + \sum_{j=1}^r e_{mj} x_j(\bar{t} - h) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=r+1}^n f_{mj} x_j(\bar{t} - h) \right) - \alpha^{\bar{t}} \|\eta\|_h^\dagger \\ &\leq \frac{1}{\lambda_m} \left(\sum_{j=1}^r d_{mj} \alpha^{\bar{t}} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_j + \sum_{j=1}^r e_{mj} \alpha^{-h} \alpha^{\bar{t}} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_j \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=r+1}^n f_{mj} \alpha^{-h} \alpha^{\bar{t}} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_j \right) - \alpha^{\bar{t}} \|\eta\|_h^\dagger \\ &= \alpha^{\bar{t}} \|\eta\|_h^\dagger \left(\left(\sum_{j=1}^r d_{mj} + e_{mj} \alpha^{-h} \right) \frac{\lambda_j}{\lambda_m} + \sum_{j=r+1}^n f_{mj} \alpha^{-h} \frac{\lambda_j}{\lambda_m} - 1 \right) \stackrel{(2.15)}{<} 0. \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với $z_m(\bar{t}) > 0$, do đó

$$z_i(t) \leq 0, \forall i \in J_{r+1,n}, t \in (0, t_1 - 1]. \quad (2.26)$$

Kết hợp các ước lượng (2.25) và (2.26), ta được (2.22) đúng.

Bước 3: Giả sử rằng $z_i(t) \leq 0, \forall i \in J_{1,n}, t \in [0, t_s), s \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

$$z_i(t) \leq 0, i \in J_{1,n}, t \in [t_{m-1}, t_m), m = 1, 2, \dots, s. \quad (2.27)$$

Tiếp theo, ta đi chứng minh

$$z_i(t) \leq 0, i \in J_{1,n} \quad (2.28)$$

đúng với mọi $t \in [t_s, t_{s+1})$. Kết quả sau thu được khi áp dụng (2.12) và (2.27)

$$\begin{aligned} x_i(t) &\stackrel{(2.12)}{\leq} (R_\lambda)^{m-1} \|\eta\|_h^\dagger \alpha^t \lambda_i, i \in J_{1,n}, t \in [t_{m-1}, t_m), m = 1, 2, \dots, s, \\ x(t_s - 1) &\preceq (R_\lambda)^{s-1} \alpha^{t_s-1} \|\eta\|_h^\dagger \lambda. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Với $i \in J_{1,r}$, ước lượng sau thu được từ (2.11a), (2.12) và (2.29)

$$\begin{aligned}
z_i(t_s) &\stackrel{(2.12)}{=} \frac{x_i(t_s)}{\lambda_i} - (R_\lambda)^s \alpha^{t_s} \|\eta\|_h^\dagger \\
&= \sum_{j=1}^r h_{ij} \frac{x_j(t_s - 1)}{\lambda_i} - (R_\lambda)^s \alpha^{t_s} \|\eta\|_h^\dagger \\
&\stackrel{(2.29)}{\leq} (R_\lambda)^{s-1} \alpha^{t_s-1} \|\eta\|_h^\dagger \sum_{j=1}^r h_{ij} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} - (R_\lambda)^s \alpha^{t_s} \|\eta\|_h^\dagger \\
&= (R_\lambda)^{s-1} \alpha^{t_s-1} \|\eta\|_h^\dagger \left(\sum_{j=1}^r h_{ij} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} - \alpha R_\lambda \right) \\
&\stackrel{(2.11a)}{\leq} 0, i \in J_{1,r}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Từ bất đẳng thức (2.30) ta có

$$x_i(t_s) \leq (R_\lambda)^s \alpha^{t_s} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_i, i \in J_{1,r}. \tag{2.31}$$

Vì $R_\lambda > 1, h > 0, t \geq 0$ nên $\forall t \in [0, t_s)$, ta nhận được

$$x_i(t - h) \leq (R_\lambda)^s \|\eta\|_h^\dagger \alpha^{-h} \alpha^t \lambda_i, i \in J_{1,n}. \tag{2.32}$$

Với $i \in J_{r+1,n}$, từ các điều kiện (2.15), (2.20), (2.12), (2.29), (2.31) và (2.32) ta có

$$\begin{aligned}
z_i(t_s) &= \frac{x_i(t_s)}{\lambda_i} - \alpha^{t_s} \|\eta\|_h^\dagger (R_\lambda)^s \\
&= \frac{1}{\lambda_i} \left(\sum_{j=1}^r d_{ij} x_j(t_s) + \sum_{j=1}^r e_{ij} x_j(t_s - h) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=r+1}^n f_{ij} x_j(t_s - h) \right) - \alpha^{t_s} \|\eta\|_h^\dagger (R_\lambda)^s \\
&\leq \frac{1}{\lambda_i} \left(\sum_{j=1}^r d_{ij} (R_\lambda)^s \alpha^{t_s} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_j + \sum_{j=1}^r (R_\lambda)^s e_{ij} \alpha^{-h} \alpha^{t_s} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_j \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=r+1}^n (R_\lambda)^s f_{ij} \alpha^{-h} \alpha^{t_s} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_j \right) - (R_\lambda)^s \alpha^{t_s} \|\eta\|_h^\dagger \\
&= (R_\lambda)^s \alpha^{t_s} \|\eta\|_h^\dagger \left(\left(\sum_{j=1}^r d_{ij} + e_{ij} \alpha^{-h} \right) \frac{\lambda_j}{\lambda_i} + \sum_{j=r+1}^n f_{ij} \alpha^{-h} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} - 1 \right) \\
&\stackrel{(2.15)}{<} 0.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Kết hợp bất đẳng thức (2.30) và (2.33) thì

$$z_i(t_s) \leq 0, i \in J_{1,n}. \quad (2.34)$$

Để chứng minh bất đẳng thức (2.28), ta chứng minh rằng $z_i(t) \leq 0$ đúng với mọi $i \in J_{1,n}$ và $t \in (t_s, t_{s+1})$. Giả sử (2.28) không đúng thì $\exists p \in J_{1,n}, \hat{t} \in (t_s, t_{s+1} - 1]$ thỏa mãn

$$z_i(t) \leq 0, i \in J_{1,n}, t \in (t_s, \hat{t} - 1], \quad (2.35)$$

$$z_p(\hat{t}) > 0. \quad (2.36)$$

Ta có được ước lượng sau từ (2.27), (2.34) và (2.35)

$$\begin{aligned} x(t) &\preceq (R_\lambda)^{m-1} \|\eta\|_h^\dagger \alpha^t \lambda, \quad t \in [t_{m-1}, t_m), \quad m = 1, \dots, s, \\ x(t) &\preceq (R_\lambda)^s \|\eta\|_h^\dagger \alpha^t \lambda, \quad t \in [t_s, \hat{t} - 1]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Tiếp theo, ta xét hai trường hợp cho chỉ số p như sau:

Trường hợp I: Xét p thuộc tập $J_{1,r}$. Từ điều kiện (2.14), (2.20), (2.12) và (2.37) có đánh giá sau

$$\begin{aligned} z_p(\hat{t}) &= \frac{x_p(\hat{t})}{\lambda_p} - (R_\lambda)^s \alpha^{\hat{t}} \|\eta\|_h^\dagger \\ &\leq \frac{1}{\lambda_p} \left(a_{pp} x_p(\hat{t} - 1) + \sum_{j=1, j \neq p}^r a_{pj} x_j(\hat{t} - 1) + \sum_{j=1}^r b_{pj} x_j(\hat{t} - 1 - h) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=r+1}^n c_{pj} x_j(\hat{t} - 1 - h) \right) - (R_\lambda)^s \alpha^{\hat{t}} \|\eta\|_h^\dagger \\ &\leq \frac{1}{\lambda_p} \left(a_{pp} (R_\lambda)^s \alpha^{\hat{t}-1} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_p + \sum_{j=1, j \neq p}^r a_{pj} (R_\lambda)^s \alpha^{\hat{t}-1} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_j \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^r b_{pj} (R_\lambda)^s \alpha^{-h} \alpha^{\hat{t}-1} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_j + \sum_{j=r+1}^n c_{pj} (R_\lambda)^s \alpha^{-h} \alpha^{\hat{t}-1} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_j \right) \\ &\quad - (R_\lambda)^s \alpha^{\hat{t}} \|\eta\|_h^\dagger \\ &= (R_\lambda)^s \alpha^{\hat{t}-1} \|\eta\|_h^\dagger \left(\left(\sum_{j=1}^r a_{pj} + \alpha^{-h} b_{pj} \right) \frac{\lambda_j}{\lambda_p} + \sum_{j=r+1}^n \alpha^{-h} c_{pj} \frac{\lambda_j}{\lambda_p} - \alpha \right) \\ &\stackrel{(2.14)}{<} 0. \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với (2.36). Khi đó $z_i(t) \leq 0, i \in J_{1,r}, t \in (t_s, t_{s+1})$.

Trường hợp II: Xét $p \in J_{r+1,n}$. Từ (2.15), (2.20), (2.12) và (2.37) ta nhận được

$$\begin{aligned}
z_p(\hat{t}) &= \frac{x_p(\hat{t})}{\lambda_p} - (R_\lambda)^s \alpha^{\hat{t}} \|\eta\|_h^\dagger \\
&= \frac{1}{\lambda_p} \left(\sum_{j=1}^r d_{pj} x_j(\hat{t}) + \sum_{j=1}^r e_{pj} x_j(\hat{t} - h) + \sum_{j=r+1}^n f_{pj} x_j(\hat{t} - h) \right) \\
&\quad - (R_\lambda)^s \alpha^{\hat{t}} \|\eta\|_h^\dagger \\
&\leq \frac{1}{\lambda_p} \left(\sum_{j=1}^r (R_\lambda)^s d_{pj} \alpha^{\hat{t}} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_j + \sum_{j=1}^r (R_\lambda)^s e_{pj} \alpha^{-h} \alpha^{\hat{t}} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_j \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=r+1}^n (R_\lambda)^s f_{pj} \alpha^{-h} \alpha^{\hat{t}} \|\eta\|_h^\dagger \lambda_j \right) - (R_\lambda)^s \alpha^{\hat{t}} \|\eta\|_h^\dagger \\
&= (R_\lambda)^s \alpha^{\hat{t}} \|\eta\|_h^\dagger \left(\left(\sum_{j=1}^r d_{pj} + e_{pj} \alpha^{-h} \right) \frac{\lambda_j}{\lambda_p} + \sum_{j=r+1}^n f_{pj} \alpha^{-h} \frac{\lambda_j}{\lambda_p} - 1 \right) \\
&\stackrel{(2.15)}{<} 0.
\end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với (2.36). Do đó $z_i(t) \leq 0$, $i = J_{r+1,n}, t \in (t_s, t_{s+1})$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta chứng minh được $z_i(t) \leq 0, t \geq 0, i \in J_{1,n}$. Điều này dẫn đến

$$\frac{x_i(t)}{\lambda_i} \leq (R_\lambda)^{m-1} \alpha^t \|\eta\|_h^\dagger, i \in J_{1,n}, t \in [t_{m-1}, t_m), m \in \mathbb{N}^*.$$

Vì vậy

$$\Sigma(x(t)) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{x_i(t)}{\lambda_i} \right\} \leq (R_\lambda)^{m-1} \alpha^t \|\eta\|_h^\dagger, t \in [t_{m-1}, t_m), m \in \mathbb{N}^*. \quad (2.38)$$

Áp dụng điều kiện (2.11c), ta được $R_\lambda \leq \alpha^{-\delta \mathfrak{T}} \leq \alpha^{-\delta(t_m - t_{m-1})}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Kết hợp với (2.38) ta thu được

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq \|\Sigma(x(t))\lambda\| = \Sigma(x(t))\|\lambda\| \\
&\leq (R_\lambda)^{m-1} \alpha^t \|\eta\|_h^\dagger \|\lambda\| \\
&\leq \alpha^{-\delta t_1} \alpha^{-\delta(t_2 - t_1)} \dots \alpha^{-\delta(t_{m-1} - t_{m-2})} \alpha^t \|\eta\|_h^\dagger \|\lambda\| \\
&= \alpha^{-\delta[t_1 + (t_2 - t_1) + \dots + (t_{m-1} - t_{m-2})]} \alpha^t \|\eta\|_h^\dagger \|\lambda\| \\
&= \alpha^{-\delta(t_{m-1} - t)} \alpha^{-\delta t} \alpha^t \|\eta\|_h^\dagger \|\lambda\| \\
&\leq \alpha^{(1-\delta)t} \|\eta\|_h^\dagger \|\lambda\|, t \in [t_{m-1}, t_m), m \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\|x(t)\| \leq \alpha^{(1-\delta)t} \|\eta\|_h^\dagger \|\lambda\|, t \geq 0.$$

Điều này chỉ ra rằng hệ (2.1) ổn định mũ. $\square$

Nhận xét 2.1.6. Bài toán ổn định mũ của hệ suy biến dương rời rạc không có xung đã được V.N. Phat và cộng sự nghiên cứu năm 2018 [64]. Điều kiện được các tác giả đưa ra là hệ phải thỏa mãn điều kiện (2.11a). Tuy nhiên, dưới tác động của các xung, tính ổn định của hệ không còn được đảm bảo. Khi đó, nếu điều kiện (2.11c) được thỏa mãn thì hệ suy biến dương rời rạc có xung ổn định. Do đó, việc đảm bảo khoảng thời gian giữa các xung liên tiếp đủ lớn là quan trọng trong việc duy trì sự ổn định của lớp hệ này.

Nhận xét 2.1.7. Điều kiện (2.11a) trong Định lý 2.1.5 phi tuyến với cả λ và α . Tuy nhiên, (2.11b) có thể được viết lại là $H\lambda_1 \succ \alpha\lambda_1$. Do đó, các điều kiện (2.11a), (2.11b) và (2.11c) có thể được tính toán bằng lập trình tuyến tính như sau:

Bước 1. Cho trước các ma trận E, A, A_d, H và trễ h .

Bước 2. Chọn các tham số $\alpha \in (0, 1), \delta \in (0, 1)$. Sau đó giải (2.11a) và (2.11b) bằng LP để tìm được λ . Thế α, δ và λ vào (2.11c), ta thu được $-\frac{1}{\delta} \log_\alpha R_\lambda$.

Bước 3. Kiểm tra điều kiện $t_m - t_{m-1} \geq -\frac{1}{\delta} \log_\alpha R_\lambda, m \in \mathbb{Z}^+$. Nếu điều kiện được thỏa mãn thì hệ (2.1) ổn định mũ.

Xét một trường hợp đặc biệt của hệ (2.1) được cho bởi

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t+1) &= A_1 \mathbf{x}_1(t) + A_{d_1} \mathbf{x}_1(t-h), t \neq t_m - 1, \\ \mathbf{x}_1(t_m) &= H \mathbf{x}_1(t_m - 1), m \in \mathbb{N}^*, \\ \mathbf{x}_1(s) &= \eta_1(s), s \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (2.39)$$

Xuất phát từ Định lý 2.1.5, ta có được hệ quả sau

Hệ quả 2.1.8. Giả sử tồn tại số $\alpha \in (0, 1), \delta \in (0, 1)$ và $\lambda \in \mathbb{R}_+^r$ sao cho các ràng buộc sau đây được thỏa mãn

$$(-\alpha I_r + A_1 + \alpha^{-h} A_{d_1}) \lambda \prec 0, \quad (2.40a)$$

$$R_\lambda^i = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^r h_{ij} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} > 1, i = 1, \dots, r, \quad (2.40b)$$

$$\underline{\mathfrak{T}} \geq -\frac{1}{\delta} \log_\alpha R_\lambda, \quad (2.40c)$$

trong đó $R_\lambda = \max_{1 \leq i \leq r} \{R_\lambda^i\}$. Khi đó, với khoảng thời gian duy trì tối thiểu $\underline{\mathfrak{T}}$ (tức là, dãy thời gian xung thỏa mãn $\inf_m \{t_m - t_{m-1}\} \geq \underline{\mathfrak{T}}, m \in \mathbb{N}^*$), hệ (2.39) là một hệ dương có xung và ổn định mũ. Hơn nữa,

$$\|\mathbf{x}_1(t)\| \leq \|\eta\|_h^\dagger \|\lambda\| \alpha^{(1-\delta)t}, t \geq 0.$$

Chứng minh. Ta xét hệ (2.1) với $A_2, A_3, A_{d_2}, A_{d_3}, A_{d_4}$ là các ma trận không và $A_4 = -I_{n-r}$. Khi đó $\mathbf{x}_2(t) = 0, t \geq 0$. Theo kết quả của Định lý 2.1.5, hệ quả được chứng minh. $\square$

Nhận xét 2.1.9. Xét hệ rời rạc có dạng

$$\begin{cases} x(t+1) &= Ax(t) + A_d x(t-h), t \neq t_m - 1, \\ x_1(t_m) &= Hx_1(t_m - 1), t \in \mathbb{N}, \\ x(s) &= \eta(s), s \in \{-h, -h+1, \dots, 0\}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Hệ (2.41) trong trường hợp không có xung đã được X. Liu, W. Yu và L. Wang nghiên cứu [50]. Trong công bố này, các tác giả chỉ ra rằng hệ dương (2.41) khi không có xung ổn định nếu tồn tại một véc tơ $\lambda \succ 0$, thỏa mãn

$$(-I + A + A_d) \lambda \prec 0.$$

Kết quả của chúng tôi đã lần đầu tiên chứng minh rằng, khi xuất hiện các xung, nếu $(-\alpha I + A + \alpha^{-h} A_d) \lambda \prec 0, \alpha \in (0, 1)$ thì ngoài các điều kiện trong [50], hệ vẫn duy trì ổn định nếu khoảng thời gian giữa các xung thỏa mãn

$$\inf_m \{t_m - t_{m-1}\} \geq \underline{\mathfrak{T}}, m \in \mathbb{N}^*.$$

2.2 Tính ổn định hóa được dạng mũ cho hệ suy biến dương rời rạc có xung với trễ theo thời gian

Xét hệ điều khiển sau

$$\begin{cases} Ex(t+1) &= Ax(t) + A_d x(t-h) + Bu(t), t \neq t_m - 1, \\ \mathbf{x}_1(t_m) &= H\mathbf{x}_1(t_m - 1), t \in \mathbb{N}, \\ x(s) &= \eta(s), s \in \{-h, -h+1, \dots, 0\}, \end{cases} \quad (2.42)$$

trong đó vectơ trạng thái $x(\cdot) := (\mathbf{x}_1(\cdot), \mathbf{x}_2(\cdot))$, với $\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^r$ và $\mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$, điều khiển đầu vào $u(t) \in \mathbb{R}^p$. Với hàm điều khiển phản hồi trạng thái

$$u(t) = Kx(t), \quad (2.43)$$

hệ (2.42) được đưa về hệ đóng sau

$$\begin{cases} Ex(t+1) &= (A+BK)x(t) + A_dx(t-h), \quad t \neq t_m - 1, \\ \mathbf{x}_1(t_m) &= H\mathbf{x}_1(t_m - 1), \quad t \in \mathbb{N}, \\ x(s) &= \eta(s), \quad s \in \{-h, -h+1, \dots, 0\}. \end{cases} \quad (2.44)$$

Trong phần tiếp theo, chúng tôi thiết kế hàm điều khiển phản hồi trạng thái (2.43) để hệ đóng (2.44) ổn định mũ.

Định lý 2.2.1. *Giả sử tồn tại hằng số $\alpha \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$, $k_j \in \mathbb{R}^p$, $j = 1, 2, \dots, n$ sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn*

$$(A + I_n - E)_{(i,j)} \lambda_j + (B)_i^T k_j \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.45a)$$

$$(-\alpha E + A + \alpha^{-h} A_d) \lambda + B \sum_{i=1}^n k_i \prec 0, \quad (2.45b)$$

$$R_\lambda^i = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^r h_{ij} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} > 1, \quad i \in J_{1,r}, \quad (2.45c)$$

$$\underline{\mathfrak{T}} \geq -\frac{1}{\delta} \log_\alpha R_\lambda, \quad (2.45d)$$

trong đó $R_\lambda = \max_{1 \leq i \leq r} \{R_\lambda^i\}$. Khi đó, với thời gian duy trì tối thiểu $\underline{\mathfrak{T}}$ (tức là dãy thời gian xung thỏa mãn $\inf_m \{t_m - t_{m-1}\} \geq \underline{\mathfrak{T}}, m \in \mathbb{N}^*$), hệ đóng (2.44) ổn định mũ. Hơn nữa, ma trận phản hồi trạng thái được xác định bởi

$$K = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\lambda_1} & \frac{k_2}{\lambda_2} & \dots & \frac{k_n}{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Chứng minh. Với hàm điều khiển $u(t) = Kx(t)$, hệ (2.42) đưa về hệ đóng sau

$$\begin{cases} Ex(t+1) &= (A+BK)x(t) + A_dx(t-h), \quad t \neq t_m - 1, \\ \mathbf{x}_1(t_m) &= H\mathbf{x}_1(t_m - 1), \quad t \in \mathbb{N}, \\ x(s) &= \eta(s), \quad s \in \{-h, -h+1, \dots, 0\}. \end{cases} \quad (2.46)$$

Vì $\lambda_j > 0$ với mọi $j = 1, 2, \dots, n$, ta có

$$(A + I_n - E)_{(i,j)} \lambda_j + (B)_i^T k_j \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Suy ra $(A + I_n - E)_{(i,j)} + (B)_i^T \frac{k_j}{\lambda_j} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Từ đó, ta thu được $A + I_n - E + BK \succeq 0$. Do đó, $A + BK + I_n - E \succeq 0$. Đặt

$$\sum_{i=1}^n k_i = \left[\frac{k_1}{\lambda_1} \frac{k_2}{\lambda_2} \dots \frac{k_n}{\lambda_n} \right] \lambda = K\lambda. \quad (2.47)$$

Ta nhận được kết quả sau từ điều kiện (2.45b) và (2.47)

$$\begin{aligned} (-\alpha E + A + \alpha^{-h} A_d) \lambda + B \sum_{i=1}^n k_i &= (-\alpha E + A + \alpha^{-h} A_d) \lambda + BK\lambda \\ &= (-\alpha E + (A + BK) + \alpha^{-h} A_d) \lambda \prec 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Từ các kết quả (2.45d), (2.45c), (2.46), (2.48) và Định lý 2.1.5, Định lý 2.2.1 được chứng minh. $\square$

2.3 Ví dụ minh họa

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số ví dụ nhằm minh họa tính hiệu quả của các kết quả đạt được.

Ví dụ 2.3.1. Xét hệ (2.1) với

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.15 & 0.2 & -0.7 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \\ 1.0 & 2.0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 2 & 0.2 \end{bmatrix},$$

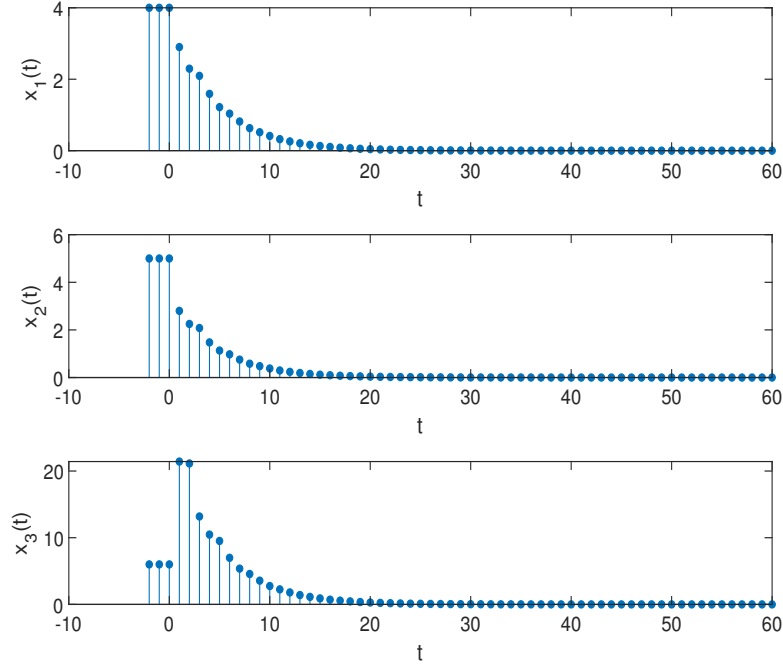
và $h = 2$.

Các ma trận $A_E := A + I_3 - E$, A_d và H không âm. Chọn $\alpha = 0.8$ và $\delta = 0.99$, ta kiểm tra được các điều kiện (2.11a), (2.11b) và (2.11c) đúng với $\lambda = [11 \ 10 \ 76]^T$.

Tính toán được $R_\lambda^1 = \frac{16}{11} > 1$, $R_\lambda^2 = \frac{12}{5} > 1$ và $R_\lambda = \frac{12}{5} > 1$. Áp dụng Định lý 2.1.5, vì $t_m - t_{m-1} \geq \underline{\tau} \geq -\frac{1}{\delta} \log_\alpha R_\lambda \approx 3.963$, $m \in \mathbb{N}^*$ nên hệ (2.1) ổn định mũ.

Trong kết quả mô phỏng, ta xét điều kiện đầu là $\eta(s) = (4 \ 5 \ 6)^T$, $s \in \{-2, -1, 0\}$. Khi hệ không có xung, hệ ổn định và quỹ đạo trạng thái $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ được thể hiện trong Hình 2.1. Trường hợp có xung với khoảng thời gian duy trì $t_m - t_{m-1} = 4$

được minh họa ở Hình 2.2, trong đó các trạng thái đều hội tụ về điểm cân bằng, phù hợp với điều kiện ổn định được dạng mũ đã chứng minh trong Định lý 2.1.5. Ngược lại, khi khoảng thời gian duy trì giảm xuống còn $t_m - t_{m-1} = 2$ (Hình 2.3), các trạng thái tăng dần theo thời gian, cho thấy hệ mất ổn định.



Hình 2.1: Quỹ đạo của trạng thái $x(t)$ trong Ví dụ 2.3.1 khi không có xung.

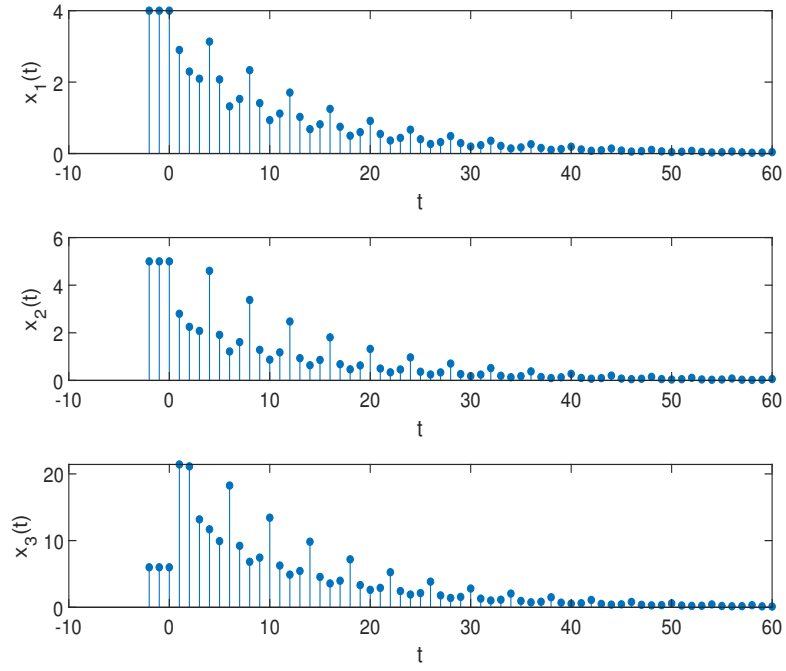
Ví dụ 2.3.2. Để so sánh kết quả trong Hệ quả 2.1.8 với kết quả trong [87], chúng ta một ví dụ như sau

$$\begin{cases} x(t+1) &= \frac{1}{3}x(t) + \frac{1}{4}x(t-2), t \geq 0, t \neq t_m - 1, \\ x(t_m) &= 2x(t_m - 1), m \in \mathbb{N}^*, \end{cases} \quad (2.49)$$

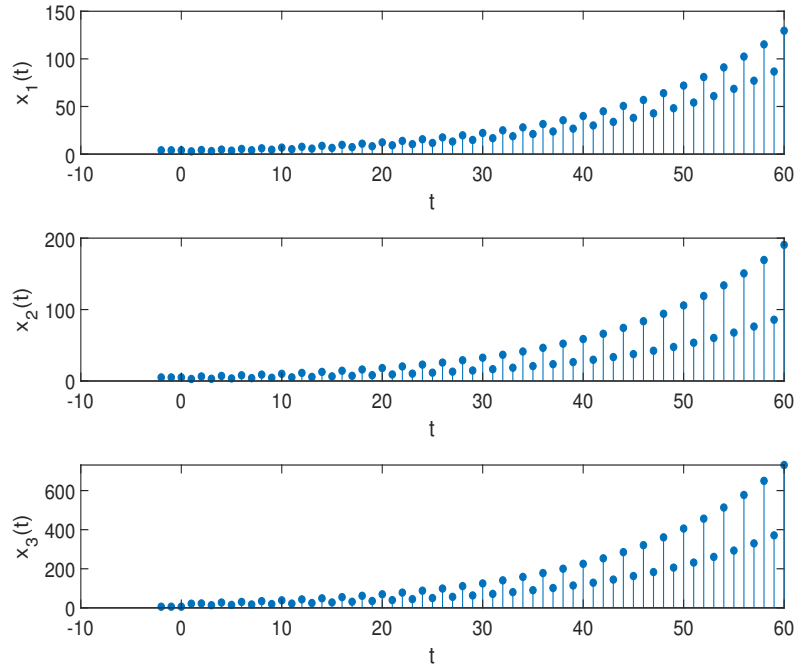
với $x(\cdot) \in \mathbb{R}$.

Theo Định lý 2 trong [87], nếu $\min\{t_m - t_{m-1}, m \in \mathbb{N}^*\} \geq 7$ thì nghiệm của (2.49) ổn định mũ. Mặt khác, dễ dàng kiểm tra các điều kiện (2.40a)-(2.40b) trong (2.1.8) thỏa mãn với $\alpha = 0.78$, $\delta = 0.99$, $\lambda = \frac{199}{5566}$. Áp dụng Hệ quả 2.1.8, ta tìm được $\min\{t_m - t_{m-1}, m \in \mathbb{N}^*\} > \frac{2048}{535}$, khi đó nghiệm của (2.49) ổn định mũ.

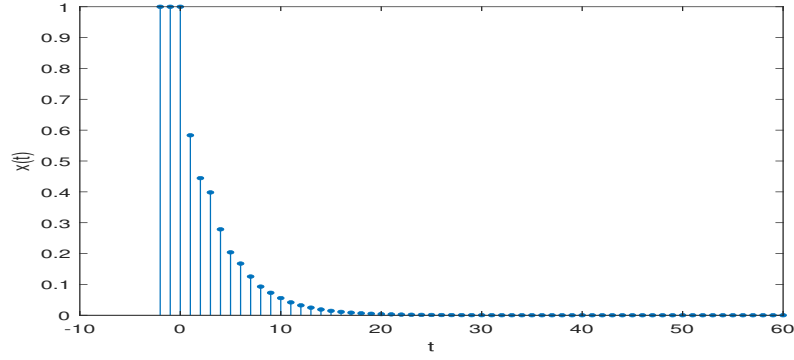
Điều này cho thấy rằng trong trường hợp $\frac{2048}{535} < \min\{t_m - t_{m-1}, m \in \mathbb{N}^*\} < 7$, Định lý 2 trong [87] không đưa ra được kết luận về tính ổn định của hệ (2.49). Để mô phỏng ta xét điều kiện đầu là $x(-2) = 1, x(-1) = 0, x(0) = 1$. Hình 2.4 chỉ ra



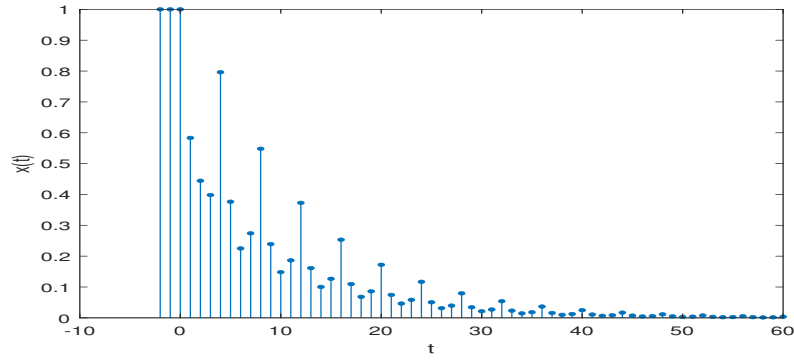
Hình 2.2: Quỹ đạo của trạng thái $x(t)$ trong Ví dụ 2.3.1 khi $t_m - t_{m-1} = 4$.



Hình 2.3: Quỹ đạo của trạng thái $x(t)$ trong Ví dụ 2.3.1 khi $t_m - t_{m-1} = 2$.



Hình 2.4: Quỹ đạo của trạng thái $x(t)$ trong Ví dụ 2.3.2 khi không có xung.



Hình 2.5: Quỹ đạo của trạng thái $x(t)$ trong Ví dụ 2.3.2 khi $t_m - t_{m-1} = 4$.

quỹ đạo trạng thái khi không có xung. Trong khi đó, hình 2.5 mô tả quỹ đạo trạng thái khi có xung và xung đó thỏa mãn $t_m - t_{m-1} = 4$, các trạng thái đều tiến dần về điểm cân bằng, phù hợp với tiêu chuẩn ổn định được dạng mũ đã được chứng minh trong Hệ quả 2.1.8.

Ví dụ 2.3.3. Xét hệ phương trình vi phân suy biến (2.42), với

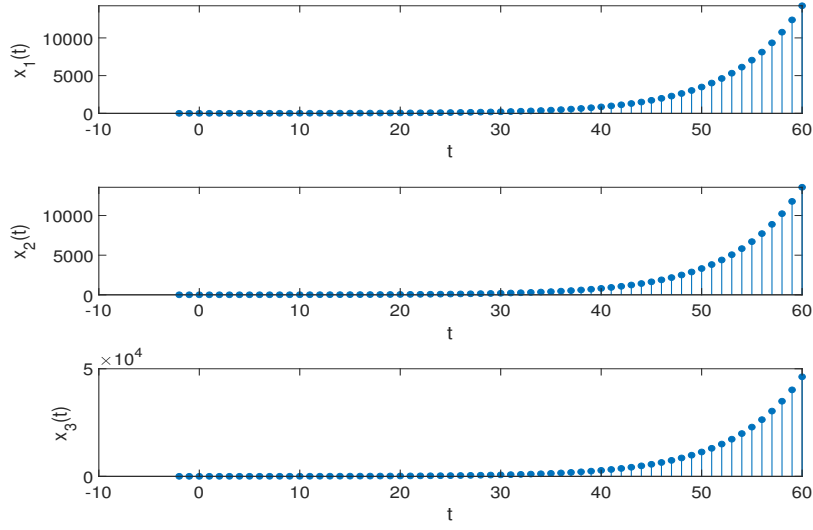
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3/25 & 1/10 & -1/10 \\ 1/10 & -1/10 & 1/10 \\ 1/10 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/10 & 0 \\ 1/10 & 1/10 & 0 \\ 3/20 & 1/10 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 11/100 & 1/5 \\ 1/5 & 1/10 \\ 0 & -1/10 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1/5 & 1 \\ 1 & 1/10 \end{bmatrix}.$$

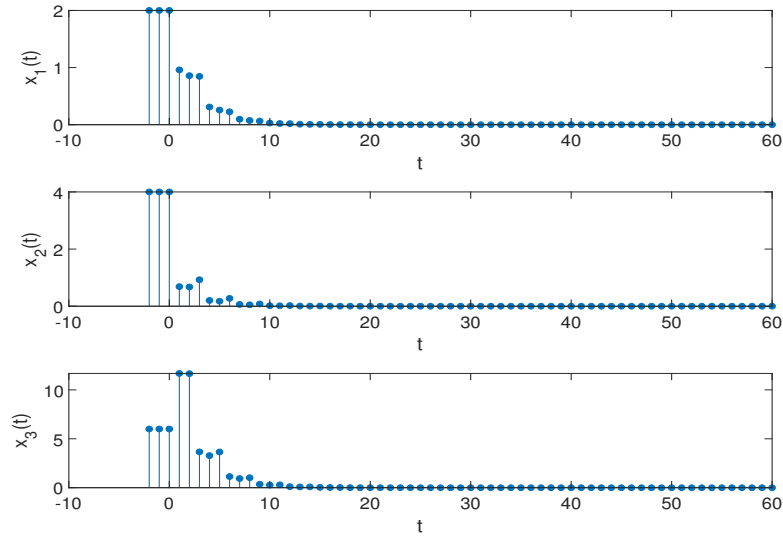
Với $\alpha = 0.9$ và $\delta = 0.8$, giải các điều kiện (2.45a)-(2.45c), ta tìm được

$$k_1 = \left(\frac{1}{100}, \frac{1}{50}\right), \quad k_2 = \left(\frac{1}{10}, 0\right), \quad k_3 = \left(\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right),$$

$$\lambda = \left(\frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{200}\right), R_\lambda^1 = 1.2 > 1, R_\lambda^2 = 1.1 > 1, R_\lambda = 1.2 > 1.$$



Hình 2.6: Quỹ đạo của trạng thái $x(t)$ trong Ví dụ 2.3.3 khi $t_m - t_{m-1} = 1$.



Hình 2.7: Quỹ đạo của trạng thái $x(t)$ trong Ví dụ 2.3.3 khi $t_m - t_{m-1} = 3$.

Thực hiện tính toán, ta thu được

$$A + BK + I_3 - E = \begin{bmatrix} 131/5671 & 13/500 & 1/625 \\ 19/1000 & 1/200 & 9/2000 \\ 13/1000 & 0 & 939/1000 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/10 & 0 \\ 1/10 & 1/10 & 0 \\ 3/20 & 1/10 & 0 \end{bmatrix}$$

là các ma trận không âm và $K = \begin{bmatrix} 1/15 & 2/3 & 2/3 \\ 2/15 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$. Vì vậy các khoảng cách $t_m - t_{m-1} \geq \mathfrak{T} \geq -\frac{1}{\delta} \log_{\alpha} R_{\lambda} \approx 2.1631, m \in \mathbb{N}^*$. Theo Định lý 2.2.1 thì hệ đóng dương và ổn định mũ.

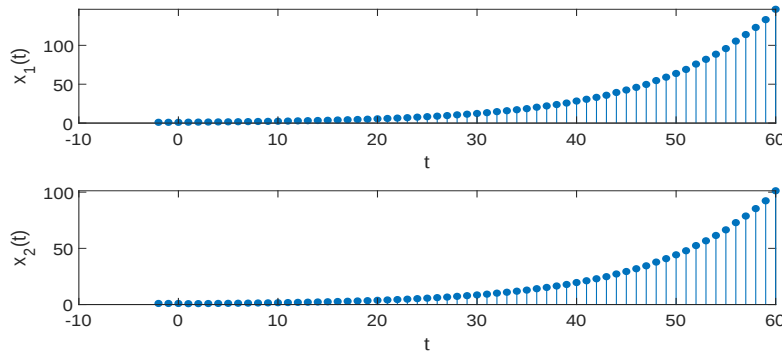
Để mô phỏng ta xét điều kiện đầu là $\eta(s) = (2 \ 4 \ 6)^T, s \in \{-2, -1, 0\}$. Hình 2.6 biểu diễn sự biến thiên của các thành phần trạng thái $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ trong trường hợp dãy xung thỏa mãn $t_m - t_{m-1} = 1$; khi đó các trạng thái tăng không bị chặn theo thời gian, phản ánh tính mất ổn định của hệ. Ngược lại, Hình 2.7 minh họa quỹ đạo trạng thái ứng với dãy xung có khoảng thời gian duy trì $t_m - t_{m-1} = 3$, trong đó các trạng thái đều hội tụ về điểm cân bằng, hoàn toàn phù hợp với điều kiện ổn định hóa được dạng mũ đã được chứng minh ở Định lý 2.2.1.

Ví dụ 2.3.4. Xét hệ suy biến có trễ và xung (2.42), với

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.4 & -0.7 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.00 \\ 0.10 & 0.00 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1.1 \end{bmatrix}.$$

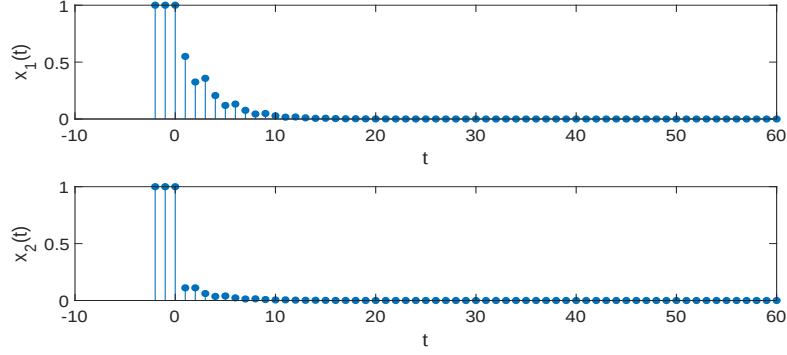
Với $\alpha = 0.8$ và $\delta = 0.8$, giải các điều kiện (2.45a)-(2.45c), ta tìm được

$$k_1 = -0.8, \quad k_2 = -0.4, \quad \lambda = (1, 1), R_{\lambda} = 1.375 > 1.$$



Hình 2.8: Quỹ đạo của $x(t)$ của hệ mở trong Ví dụ 2.3.4 khi $t_m - t_{m-1} = 3$.

Thực hiện tính toán, ta thu được $A + BK + I_2 - E = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$, A_d là các ma



Hình 2.9: Quỹ đạo của $x(t)$ của hệ đóng trong Ví dụ 2.3.4 khi $t_m - t_{m-1} = 3$.

trận không âm và $K = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.4 \end{bmatrix}$. Vì vậy, các khoảng cách

$$t_m - t_{m-1} \geq \underline{\tau} \geq -\frac{1}{\delta} \log_{\alpha} R_{\lambda} = -\frac{1}{0.8} \cdot \frac{\ln(1.375)}{\ln(0.8)} \approx 1.78, m \in \mathbb{Z}^+.$$

Theo Định lý 2.2.1 thì hệ đóng dương và ổn định mũ.

Để mô phỏng ta xét điều kiện đầu là $\eta(s) = (1 \ 1 \ 1)^T$, $s \in \{-2, -1, 0\}$. Hình 2.8 biểu diễn sự biến thiên của các thành phần trạng thái $x_1(t)$, $x_2(t)$ của hệ mở (khi chưa có bộ điều khiển) trong trường hợp dãy xung thỏa mãn $t_m - t_{m-1} = 3$; khi đó các trạng thái tăng không bị chặn theo thời gian, phản ánh tính mất ổn định của hệ. Ngược lại, Hình 2.9 minh họa quỹ đạo trạng thái của hệ đóng ứng với dãy xung có khoảng thời gian duy trì $t_m - t_{m-1} = 3$, trong đó các trạng thái đều hội tụ về điểm cân bằng, hoàn toàn phù hợp với điều kiện ổn định hóa được dạng mũ đã được chứng minh ở Định lý 2.2.1. Hệ đóng với $u(t) = Kx(t)$, $K = [-0.8 \ -0.4]$ ổn định mũ với khoảng cách giữa các xung bằng 3. Điều đã khẳng định một cách mạnh mẽ rằng bộ điều khiển được đề xuất có hiệu quả cao trong việc ổn định hóa hệ thống.

Kết luận Chương 2

Chương 2 tập trung vào việc nghiên cứu tính ổn định và ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ phương trình vi phân suy biến dương rời rạc có xung và trễ với đạo hàm bậc nguyên. Kết quả đạt được như sau:

- Bằng cách áp dụng phương pháp quy nạp và khai thác các kỹ thuật biến đổi ma trận, chúng tôi thiết lập được một điều kiện đủ để đảm bảo tính ổn định mũ của hệ suy biến dương rời rạc có xung với trễ hằng.
- Chúng tôi đã xây dựng một hàm điều khiển phụ thuộc trạng thái nhằm đảm bảo tính ổn định mũ cho hệ suy biến dương rời rạc có xung và trễ theo thời gian. Những kết quả này là mới và chưa từng được công bố trước đây.
- Đưa ra ví dụ số với mô phỏng để thể hiện tính hiệu quả của phương pháp đã đề xuất.

Trong kết quả nghiên cứu của chúng tôi, tính ổn định của hệ suy biến dương rời rạc có xung được xem xét trong trường hợp hệ với đạo hàm bậc nguyên và có trễ hằng. Bài toán nghiên cứu tính ổn định và ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ phân thứ suy biến dương rời rạc có xung với trễ biến thiên và lớp hệ phức hợp suy biến có liên kết trong với trễ biến thiên là những chủ đề hay và khó đòi hỏi những kỹ thuật phức tạp và các công cụ toán học mới. Đây là những bài toán mở cần được nghiên cứu trong thời gian tới.

Chương 3

Tính tiêu hao hóa trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía

Bài toán tiêu hao cho hệ phương trình vi phân suy biến với đạo hàm bậc nguyên và đạo hàm bậc phân thứ là chủ đề thu hút sự chú ý của nhiều nhà nghiên cứu [19, 28, 32]. Trong chương này, chúng tôi thiết kế hàm điều khiển cho bài toán tiêu hao hóa trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía. Nội dung trong chương này được xây dựng từ các kết quả đã được trình bày trong bài báo số (CT2) trong danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

3.1 Phát biểu bài toán và một số định nghĩa

Xét hệ phân thứ Caputo suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía sau

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t) \\ &\quad + F(t, x(t)) + Bu(t), t \geq 0, \\ z(t) &= [C + \Delta C(t)]x(t) + W\omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó $\alpha \in (0, 1)$ là bậc phân thứ của hệ, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển đầu vào, $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ là nhiễu đầu vào cho trước, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ là véc tơ đầu ra, x_0 là điều kiện ban đầu. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{n \times q}, W \in \mathbb{R}^{p \times q}$ và $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là các ma trận hằng số đã biết. Ma trận $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ suy biến với $\text{rank}(E) = r < n$. $\Delta A(t), \Delta C(t), \Delta D(t)$ là các ma trận thực thay đổi theo thời gian thỏa mãn

$$\Delta A(t) = M_a \mathcal{F}_a(t) N_a, \quad \Delta C(t) = M_c \mathcal{F}_c(t) N_c, \quad \Delta D(t) = M_d \mathcal{F}_d(t) N_d, \quad (3.2)$$

trong đó $M_a, N_a, M_c, N_c, M_d, N_d$ các ma trận hằng số đã biết và $\mathcal{F}_a(t), \mathcal{F}_c(t), \mathcal{F}_d(t)$ là các ma trận thực với số chiều thích hợp thỏa mãn

$$\mathcal{F}_a^T(t) \mathcal{F}_a(t) \leq I, \mathcal{F}_c^T(t) \mathcal{F}_c(t) \leq I, \mathcal{F}_d^T(t) \mathcal{F}_d(t) \leq I, \quad \forall t \geq 0.$$

Giả thiết 3.1.1. *Nhiều $\omega(\cdot) \in L^2([0, \infty), \mathbb{R}^q)$ thỏa mãn điều kiện sau*

$$\exists d > 0 : \sup_{t \geq 0} \omega^T(t) \omega(t) \leq d.$$

Hàm phi tuyến $F(t, x(t)) = \Delta f(t, x(t)) + f(t, x(t))$, trong đó $\Delta f(t, x(t))$ là thành phần phi tuyến chưa biết. $f(t, x(t))$ thỏa mãn $f(t, 0) = 0$ và các giả thiết sau.

Giả thiết 3.1.2. (Xem [3]) *Hàm $f(t, x(t))$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía với $x(t)$ trong tập $\mathfrak{D}$, tức là tồn tại số thực $\rho \in \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$\langle f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t)), x_1(t) - x_2(t) \rangle \leq \rho \|x_1(t) - x_2(t)\|^2,$$

$\forall x_1(t), x_2(t) \in \mathfrak{D}$. *Số thực ρ được gọi là hằng số Lipschitz một phía.*

Giả thiết 3.1.3. (Xem [3]) *$f(t, x(t))$ thỏa mãn điều kiện bị chặn bậc hai với $x(t)$, tức là tồn tại các hằng số $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned} \|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\|^2 &\leq \mu \langle x_1(t) - x_2(t), f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t)) \rangle \\ &\quad + \nu \|x_1(t) - x_2(t)\|^2, \end{aligned}$$

với mọi $x_1(t), x_2(t) \in \mathfrak{D}$.

Giả thiết 3.1.4. *$\Delta f(t, x(t))$ thỏa mãn điều kiện*

$$\|\Delta f(t, x(t))\| \leq h \|x(t)\|, \quad \forall x(t) \in \mathfrak{D},$$

trong đó $h > 0$ cho trước.

Nhận xét 3.1.5. Điều kiện Lipschitz một phía yếu hơn so với điều kiện Lipschitz. Tuy nhiên, điều kiện Lipschitz một phía có hai ưu điểm so với điều kiện Lipschitz truyền thống. Đầu tiên là hằng số Lipschitz một phía có thể là số thực bất kỳ trong khi hằng số Lipschitz phải dương. Một ưu điểm khác là hằng số Lipschitz một phía

có thể nhỏ hơn nhiều so với hằng số Lipschitz [3]. Nếu một hàm là Lipschitz, thì nó thỏa mãn cả điều kiện Lipschitz một phía và điều kiện bị chặn bậc hai. Nhưng điều ngược lại thì không đúng [3]. Vì vậy, lớp hệ phi tuyến được xem xét ở đây là tổng quát hơn so với hệ phi tuyến Lipschitz cổ điển.

Mặc dù điều kiện Lipschitz một phía đóng vai trò quan trọng trong việc phân tích ổn định thông qua phương pháp hàm Lyapunov, tuy nhiên điều kiện này có thể không đủ để đánh giá $\|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\|$. Để khắc phục hạn chế này, điều kiện bị chặn trong bậc hai thường được xem xét bổ sung cùng với điều kiện Lipschitz một phía, đặc biệt với bài toán thiết kế điều khiển khi sử dụng tiếp cận bất đẳng thức ma trận tuyến tính.

Khi không có tác động của véc tơ điều khiển đầu vào thì hệ (3.1) trở thành

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t) + F(t, x(t)), t \geq 0, \\ z(t) &= [C + \Delta C(t)]x(t) + W\omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Khi vắng mặt véc tơ đầu ra, hệ (3.3) đưa về hệ sau

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t) + F(t, x(t)), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Định nghĩa 3.1.6. (Xem [61]). Hệ phương trình vi phân (3.4) được gọi là

- i) Chính quy nếu tồn tại $s \in \mathbb{C}$ sao cho đa thức $\det(sE - (A + \Delta A(t)))$ không đồng nhất bằng 0. Khi đó cặp ma trận (E, A) được gọi là chính quy.
- ii) Không có xung nếu tồn tại $s \in \mathbb{C}$ sao cho

$$\deg(\det(sE - (A + \Delta A(t)))) = \text{rank}(E).$$

Mở rộng tính bị chặn trong thời gian hữu hạn đối với hệ phương trình vi phân phân thứ [55] và tính FTDC của hệ phương trình vi phân suy biến bậc nguyên [19], chúng tôi đưa ra định nghĩa sau.

Định nghĩa 3.1.7. Giả sử c_1, c_2, T_f là các số dương cho trước với $c_1 < c_2$ và R là một ma trận đối xứng xác định dương. Hệ (3.4) được gọi là bị chặn trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu hệ đó là chính quy, không có xung và

thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$x_0^T E^T R E x_0 \leq c_1 \Rightarrow x^T(t) E^T R E x(t) < c_2, \forall t \in [0, T_f]. \quad (3.5)$$

Nhận xét 3.1.8. Trong trường hợp E là ma trận đơn vị, định nghĩa tính bị chặn trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) của hệ phân thứ suy biến của Định nghĩa 3.1.7 trở thành định nghĩa của tính bị chặn trong thời gian hữu hạn cho hệ phân thứ của Định nghĩa 1.4.7. Tuy nhiên, để đảm bảo mở rộng áp dụng được cho hệ phân thứ suy biến, chúng tôi cần thêm ma trận E vào biểu thức điều kiện. Điều này xuất phát từ hạn chế của kỹ thuật hiện tại, khi mà việc giải quyết bài toán mà không có sự bổ sung này chúng tôi vẫn chưa giải quyết được.

Định nghĩa 3.1.9. Giả sử c_1, c_2, T_f là các số dương cho trước với $c_1 < c_2$ và R là một ma trận đối xứng xác định dương. Hệ (3.3) được gọi là (Z, U, S) -tiêu hao trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn

- (i) Hệ (3.4) bị chặn trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) .
- (ii) Xét hệ (3.3) với điều kiện đầu bằng 0, $\exists \gamma > 0$ thỏa mãn ràng buộc sau

$$\int_0^{t_f} (2z^T(t)U\omega(t) + z^T(t)Zz(t) + \omega^T(t)S\omega(t))dt \geq \gamma \int_0^{t_f} \omega^T(t)\omega(t)dt,$$

trong đó $\forall t_f \in [0, T_f]$ và bất kỳ véc tơ nhiễu $\omega(t)$ khác 0 thỏa mãn Giả thiết 3.1.1, U là một ma trận thực, Z, S là các ma trận đối xứng thực với $Z \leq 0$ cho trước.

Hệ đóng nhận được với hàm điều khiển $u(t) = Kx(t)$ là

$$\begin{cases} E {}^C D_t^\alpha x(t) &= [A + BK + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t) \\ &\quad + F(t, x(t)), t \geq 0, \\ z(t) &= [C + \Delta C(t)]x(t) + W\omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Trong trường hợp không có véc tơ đầu ra, hệ đóng (3.6) được đưa về

$$\begin{cases} E {}^C D_t^\alpha x(t) &= [A + BK + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t) \\ &\quad + F(t, x(t)), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2 Tính bị chặn trong thời gian hữu hạn của hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía

Trong phần này, chúng tôi thiết lập một hàm điều khiển phụ thuộc véc tơ trạng thái để đảm bảo hệ (3.7) bị chặn trong thời gian hữu hạn.

Định lý 3.2.1. *Giả sử rằng các Giả thiết 3.1.1-3.1.4 được thỏa mãn. Cho trước c_1, c_2, T_f là các số dương với $c_1 < c_2$ và R là một ma trận đối xứng xác định dương. Hệ (3.7) bị chặn trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu tồn tại các số dương $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon, \delta, \theta, \sigma, \beta$, một ma trận $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ đối xứng xác định dương, một ma trận $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ không suy biến, một ma trận $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ không suy biến và một ma trận $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ thỏa mãn các điều kiện sau*

$$E^T Q = Q^T E \geq 0, \quad (3.8a)$$

$$E^T Q = E^T R^{\frac{1}{2}} \Sigma R^{\frac{1}{2}} E, \quad (3.8b)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & Q^T D & \Xi_{14} & Q^T M_a & Q^T M_d & Q^T \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \sigma N_d^T N_d - \beta I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\theta I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\sigma I & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & -\delta I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.8c)$$

$$\lambda_1 c_1 + \frac{\beta d}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < \lambda_2 c_2, \quad (3.8d)$$

trong đó

$$\Xi_{11} = A^T Q + Q^T A + L^T B^T + BL + \delta h^2 I + \theta N_a^T N_a + 2(\rho \epsilon_1 + \epsilon_2 \nu) I,$$

$$\Xi_{12} = Q^T + (\epsilon_2 \mu - \epsilon_1) I,$$

$$\Xi_{14} = \epsilon(Q^T B - BF) + L^T,$$

$$\Xi_{44} = -\epsilon F - \epsilon F^T,$$

$$\lambda_1 = \lambda_{\max}(\Sigma), \lambda_2 = \lambda_{\min}(\Sigma).$$

Ngoài ra, hàm điều khiển phản hồi trạng thái được xác định bởi $u(t) = F^{-1} Lx(t)$.

Chứng minh. Chúng ta xây dựng hàm Lyapunov sau

$$V(x(t)) = x^T(t)E^T Q x(t),$$

trong đó ma trận Q thỏa mãn điều kiện (3.8a). Áp dụng Bổ đề 1.7.4, tính đạo hàm α -Caputo của $V(x(t))$ dọc theo quỹ đạo của hệ (3.7) ta được

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) &\leq 2x^T(t)E^T Q {}_0^C D_t^\alpha x(t) \\ &= 2x^T(t)Q^T[(A+BK)x(t) + \Delta A(t)x(t) + f(t, x(t)) \\ &\quad + \Delta f(t, x(t)) + (D + \Delta D(t))\omega(t)] \\ &= 2x^T(t)Q^T(A+BK)x(t) + 2x^T(t)Q^T \Delta A(t)x(t) \\ &\quad + 2x^T(t)Q^T f(t, x(t)) + 2x^T(t)Q^T \Delta f(t, x(t)) \\ &\quad + 2x^T(t)Q^T D\omega(t) + 2x^T(t)Q^T \Delta D(t)\omega(t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Với số dương δ , áp dụng bất đẳng thức Cauchy và Giả thiết 3.1.4, ta có được ước lượng sau

$$\begin{aligned} 2x^T(t)Q^T \Delta f(t, x(t)) &\leq \delta^{-1}x^T(t)Q^T Q x(t) + \delta \Delta^T f(t, x(t)) \Delta f(t, x(t)) \\ &\leq \delta^{-1}x^T(t)Q^T Q x(t) + \delta h^2 x^T(t)x(t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Áp dụng bất đẳng thức ma trận Cauchy cùng với điều kiện (3.2), ta thu được

$$\begin{aligned} 2x^T(t)Q^T \Delta A(t)x(t) &= 2x^T(t)Q^T M_a \mathcal{F}_a(t) N_a x(t) \\ &\leq \theta^{-1}x^T(t)Q^T M_a M_a^T Q x(t) \\ &\quad + \theta x^T(t)N_a^T \mathcal{F}_a^T(t) \mathcal{F}_a(t) N_a x(t) \\ &\leq \theta^{-1}x^T(t)Q^T M_a M_a^T Q x(t) + \theta x^T(t)N_a^T N_a x(t), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} 2x^T(t)Q^T \Delta D(t)\omega(t) &= 2x^T(t)Q^T M_d \mathcal{F}_d(t) N_d \omega(t) \\ &\leq \sigma^{-1}x^T(t)Q^T M_d M_d^T Q x(t) + \sigma \omega^T(t)N_d^T N_d \omega(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Cộng (3.10)-(3.12) vào (3.9), ta nhận được đánh giá sau

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) &\leq 2x^T(t)Q^T(A+BK)x(t) + x^T(t)(\delta^{-1}Q^T Q + \delta h^2 I)x(t) \\ &\quad + 2x^T(t)Q^T f(t, x(t)) + \theta^{-1}x^T(t)Q^T M_a M_a^T Q x(t) \\ &\quad + \theta x^T(t)N_a^T N_a x(t) + 2x^T(t)Q^T D\omega(t) \\ &\quad + \sigma^{-1}x^T(t)Q^T M_d M_d^T Q x(t) + \sigma \omega^T(t)N_d^T N_d \omega(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Trong Giả thiết 3.1.2 và 3.1.3, đặt $x_1(t) = x(t), x_2(t) = 0$. Với mọi số dương ϵ_1, ϵ_2 , ta nhận được

$$2\rho\epsilon_1 x^T(t)x(t) - 2\epsilon_1 f^T(t, x(t))x(t) \geq 0, \quad (3.14)$$

$$2\epsilon_2 \nu x^T(t)x(t) + 2\epsilon_2 \mu x^T(t)f(t, x(t)) - 2\epsilon_2 f^T(t, x(t))f(t, x(t)) \geq 0. \quad (3.15)$$

Kết hợp (3.13), (3.14) và (3.15), ta suy ra được

$${}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) - \beta \omega^T(t)\omega(t) \leq \xi(t)^T \Theta \xi(t), \quad (3.16)$$

trong đó

$$\xi(t)^T = \begin{bmatrix} x^T(t) & f^T(t, x(t)) & \omega^T(t) \end{bmatrix}, \Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Xi_{12} & Q^T D \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 \\ * & * & \sigma N_d^T N_d - \beta I \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= (A + BK)^T Q + Q^T (A + BK) + \delta^{-1} Q^T Q + \delta h^2 I + \theta^{-1} Q^T M_a M_a^T Q \\ &\quad + \theta N_a^T N_a + \sigma^{-1} Q^T M_d M_d^T Q + 2(\rho\epsilon_1 + \epsilon_2 \nu) I. \end{aligned}$$

Đặt $K = F^{-1}L$, với F ma trận không suy biến và L là ma trận có số chiều thích hợp. Vì vậy

$$Q^T B K = (Q^T B - BF)F^{-1}L + BL.$$

Ma trận Θ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Theta = \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_{11} & \Xi_{12} & Q^T D \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 \\ * & * & \sigma N_d^T N_d - \beta I \end{bmatrix} + \text{sym} \left(\begin{bmatrix} Q^T B - BF \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) F^{-1} \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_{11} &= A^T Q + Q^T A + \delta^{-1} Q^T Q + \delta h^2 I + \theta^{-1} Q^T M_a M_a^T Q + \theta N_a^T N_a \\ &\quad + \sigma^{-1} Q^T M_d M_d^T Q + 2(\rho\epsilon_1 + \epsilon_2 \nu) I + L^T B^T + BL. \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 1.7.5, trong đó

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_{11} & \Xi_{12} & Q^T D \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 \\ * & * & \sigma N_d^T N_d - \beta I \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} Q^T B - BF \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ Z &= F^{-1} \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = F, \end{aligned}$$

điều kiện $\Theta < 0$ được đảm bảo bởi điều kiện sau

$$\begin{bmatrix} F & \epsilon H + Z^T V^T \\ * & -\epsilon V - \epsilon V^T \end{bmatrix} < 0.$$

Điều đó có nghĩa là

$$\begin{bmatrix} \bar{\Theta}_{11} & \Xi_{12} & Q^T D & \Xi_{14} \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 & 0 \\ * & * & \sigma N_d^T N_d - \beta I & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} \end{bmatrix} < 0,$$

với $\Xi_{14} = \epsilon(Q^T B - BF) + L^T$, $\Xi_{44} = -\epsilon F - \epsilon F^T$. Áp dụng phần bù Schur và bất đẳng thức (3.8c), ta có được bất đẳng thức trên. Từ (3.16) ta nhận được

$${}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) - \beta \omega^T(t) \omega(t) \leq 0, \forall t \geq 0. \quad (3.17)$$

Phần còn lại của chứng minh được chia thành hai bước:

Bước 1: Chứng minh hệ (3.7) chính quy và không có xung trong khoảng $[0, T_f]$.

Áp dụng bổ đề Schur cùng với điều kiện $\Theta < 0$, ta thu được

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= (A + BK)^T Q + Q^T (A + BK) + \delta^{-1} Q^T Q + \delta h^2 I \\ &\quad + \theta^{-1} Q^T M_a M_a^T Q + \theta N_a^T N_a + \sigma^{-1} Q^T M_d M_d^T Q + 2(\rho\epsilon_1 + \epsilon_2\nu)I < 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ước lượng sau được suy ra từ việc kết hợp (3.11) và (3.18)

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_{11} &= (A + BK + \Delta A(t))^T Q + Q^T (A + BK + \Delta A(t)) + \delta^{-1} Q^T Q + \delta h^2 I \\ &\quad + \sigma^{-1} Q^T M_d M_d^T Q + 2(\rho\epsilon_1 + \epsilon_2\nu)I < 0. \end{aligned}$$

Mặt khác $\delta^{-1} Q^T Q + \delta h^2 I + \sigma^{-1} Q^T M_d M_d^T Q + 2(\rho\epsilon_1 + \epsilon_2\nu)I > 0$ nên suy ra

$$(A + BK + \Delta A(t))^T Q + Q^T (A + BK + \Delta A(t)) < 0. \quad (3.19)$$

Vì E là một ma trận suy biến với $\text{rank}(E) = r < n$ nên tồn tại các ma trận không suy biến H, P sao cho

$$HEP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Đặt

$$H(A + BK + \Delta A(t))P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad H^{-T}QP = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Ta nhận được các đánh giá sau từ (3.8a) và (3.20)

$$\begin{aligned} P^T E^T QP &= (P^T E^T H^T)(H^{-T}QP) = (HEP)^T(H^{-T}QP) \\ &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

và

$$\begin{aligned} P^T Q^T EP &= (P^T Q^T H^{-1})(HEP) = (H^{-T}QP)^T(HEP) \\ &= \begin{bmatrix} Q_{11}^T & Q_{21}^T \\ Q_{12}^T & Q_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^T & 0 \\ Q_{12}^T & 0 \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Kết hợp (3.8a), (3.21) và (3.22), ta được $Q_{11} = Q_{11}^T \geq 0, Q_{12} = 0$. Do ma trận Q không suy biến nên

$$H^{-T}QP = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

cũng là ma trận không suy biến. Nhân lần lượt vào bên trái của (3.19) với P^T và bên phải của (3.19) với P , ta thu được

$$P^T((A + BK + \Delta A(t))^T Q + Q^T(A + BK + \Delta A(t)))P < 0.$$

Do đó, $P^T(A + BK + \Delta A(t))^T H^T H^{-T}QP + P^T Q^T H^{-1}H(A + BK + \Delta A(t))P < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{11}^T & Q_{21}^T \\ 0 & Q_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} < 0.$$

Từ đó, ta nhận được ước lượng

$$\begin{pmatrix} \star & \star \\ \star & A_{22}^T Q_{22} + Q_{22}^T A_{22} \end{pmatrix} < 0, \quad (3.23)$$

trong đó $\star$ biểu thị ma trận con không liên quan đến kết quả suy ra ở đây. Từ (3.23), ta được

$$A_{22}^T Q_{22} + Q_{22}^T A_{22} < 0,$$

do đó A_{22} là ma trận khả nghịch. Áp dụng Định lý 1.3.7, ta được hệ (3.7) chính quy và không có xung.

Bước 2: Chứng minh rằng hệ đóng (3.7) bị chặn trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) .

Thực hiện tích phân cả hai vế của (3.17) từ 0 đến t ($0 \leq t \leq T_f$), áp dụng Định lý 1.1.15 và Giả thiết 3.1.1 ta thu được

$$\begin{aligned}
 x^T(t)E^T Qx(t) &\leq x^T(0)E^T Qx(0) + \beta I_t^\alpha(\omega^T(t)\omega(t)) \\
 &= x^T(0)E^T R^{\frac{1}{2}}\Sigma R^{\frac{1}{2}}Ex(0) + \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \omega^T(s)\omega(s)ds \\
 &\leq \lambda_{\max}(\Sigma)x^T(0)E^T REx(0) + \frac{\beta d}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
 &\leq \lambda_1 c_1 + \frac{\beta d}{\Gamma(\alpha+1)} T_f^\alpha.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Mặt khác, từ (3.8b) với $t \in [0, T_f]$ ta có

$$\begin{aligned}
 x^T(t)E^T Qx(t) &= x^T(t)E^T R^{\frac{1}{2}}\Sigma R^{\frac{1}{2}}Ex(t) \\
 &\geq \lambda_{\min}(\Sigma)x^T(t)E^T REx(t) \\
 &= \lambda_2 x^T(t)E^T REx(t).
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Ta thu được bất đẳng thức sau từ kết hợp các ước lượng (3.24) và (3.25)

$$x^T(t)E^T REx(t) \leq \frac{1}{\lambda_2}(\lambda_1 c_1 + \frac{\beta d}{\Gamma(\alpha+1)} T_f^\alpha). \tag{3.26}$$

Từ (3.8d) và (3.26), ta thu được $x^T(t)E^T REx(t) < c_2, \forall t \in [0, T_f]$. Vì vậy, điều kiện (3.5) được thỏa mãn. Theo đó, hệ bị chặn trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) . $\square$

3.3 Tính tiêu hao hóa trong thời gian hữu hạn của hệ phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía

Nội dung chính của bài toán là thiết kế hàm điều khiển phản hồi phụ thuộc véc tơ trạng thái $u(t) = Kx(t)$ sao cho hệ đóng (3.6) (Z, U, S) -tiêu hao trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) .

Định lý 3.3.1. *Giả sử rằng các Giả thiết 3.1.1-3.1.4 được thỏa mãn. Cho trước*

c_1, c_2, T_f với $c_1 < c_2$ là các số dương và R là một ma trận đối xứng xác định dương. Hệ đóng (3.6) (Z, U, S) -tiêu hao trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu tồn tại các số thực dương $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon, \beta, \delta, \theta, \sigma, \kappa, \gamma$, một ma trận đối xứng xác định dương $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, một ma trận không suy biến $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, một ma trận không suy biến $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$, một ma trận $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ thỏa mãn (3.8a), (3.8b) và các điều kiện sau

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} & Q^T M_a & Q^T M_d & Q^T & C^T G^T & 0 \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Xi_{39} \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\theta I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\sigma I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\delta I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I & GM_c \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\kappa I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.27a)$$

$$S - (\gamma + \beta)I > 0, \quad (3.27b)$$

$$\lambda_1 c_1 + \frac{\beta d}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < \lambda_2 c_2, \quad (3.27c)$$

trong đó

$$\lambda_1 = \lambda_{\max}(\Sigma), \lambda_2 = \lambda_{\min}(\Sigma), Z = -G^T G,$$

$$\Xi_{11} = A^T Q + Q^T A + L^T B^T + BL + \delta h^2 I + \theta N_a^T N_a + \kappa N_c^T N_c + 2(\rho\epsilon_1 + \epsilon_2\nu)I,$$

$$\Xi_{12} = Q^T + (\epsilon_2\mu - \epsilon_1)I,$$

$$\Xi_{14} = \epsilon(Q^T B - BF) + L^T,$$

$$\Xi_{13} = Q^T D - C^T ZW - C^T U,$$

$$\Xi_{33} = \sigma N_d^T N_d - W^T ZW - W^T U - U^T W - \beta I,$$

$$\Xi_{39} = -(W^T Z^T + U^T)M_c,$$

$$\Xi_{44} = -\epsilon F - \epsilon F^T.$$

Hơn nữa, điều khiển phản hồi trạng thái được xác định bởi $u(t) = F^{-1}Lx(t)$.

Chứng minh. Ta chọn hàm Lyapunov giống như Định lý 3.2.1. Đặt

$$J = {}^C_0 D_t^\alpha V(x(t)) - \left(2z^T(t)U\omega(t) + z^T(t)Zz(t) + \omega^T(t)(S - \gamma I)\omega(t) \right).$$

Ký hiệu $\bar{C} = (C + \Delta C(t))$, khi đó $z(t) = \bar{C}x(t) + W\omega(t)$. Vì vậy, ta nhận được

$$\begin{aligned} J = {}^C_0 D_t^\alpha V(x(t)) - & \left(2x^T(t)\bar{C}^T U\omega(t) + 2\omega^T(t)W^T U\omega(t) \right. \\ & + x^T(t)\bar{C}^T Z\bar{C}x(t) + 2x^T(t)\bar{C}^T ZW\omega(t) \\ & \left. + \omega^T(t)W^T ZW\omega(t) + \omega^T(t)(S - \gamma I)\omega(t) \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Từ (3.27b), ta thu được $\omega^T(t)(S - \gamma I)\omega(t) \geq \beta\omega^T(t)\omega(t)$. Kết hợp với (3.28), ta có

$$\begin{aligned} J \leq {}^C_0 D_t^\alpha V(t) - & \left(2x^T(t)\bar{C}^T U\omega(t) + 2\omega^T(t)W^T U\omega(t) + x^T(t)\bar{C}^T Z\bar{C}x(t) \right. \\ & \left. + 2x^T(t)\bar{C}^T ZW\omega(t) + \omega^T(t)W^T ZW\omega(t) + \omega^T(t)\beta\omega(t) \right), \end{aligned} \quad (3.29)$$

Sử dụng các kỹ thuật chứng minh tương tự như trong Định lý 3.2.1, ta được đánh giá sau từ (3.29)

$$J \leq \xi^T(t)\Pi\xi(t), \forall t \geq 0, \quad (3.30)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \Pi &= \begin{bmatrix} \Pi_{11} & Q^T + (\epsilon_2\mu - \epsilon_1)I & \Pi_{13} \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 \\ * & * & \Xi_{33} \end{bmatrix}, \\ \Pi_{11} &= (A + BK)^T Q + Q^T(A + BK) + \delta^{-1}Q^T Q + \delta h^2 I + \theta^{-1}Q^T M_a M_a^T Q \\ &\quad + \theta N_a^T N_a + \sigma^{-1}Q^T M_d M_d^T Q + 2(\rho\epsilon_1 + \epsilon_2\nu)I - \bar{C}^T Z\bar{C}, \\ \Pi_{13} &= Q^T D - \bar{C}^T ZW - \bar{C}^T U. \end{aligned}$$

Đặt $K = F^{-1}L$ với F là một ma trận không suy biến, L là một ma trận có chiều thích hợp. Khi đó

$$Q^T B K = (Q^T B - B F)F^{-1}L + B L.$$

Biểu diễn ma trận Π như sau

$$\Pi = \begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{11} & \Xi_{12} & \Pi_{13} \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 \\ * & * & \Xi_{33} \end{bmatrix} + \text{sym} \begin{pmatrix} Q^T B - BF \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} F^{-1} \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

trong đó

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{11} = & A^T Q + Q^T A + L^T B^T + BL + \delta^{-1} Q^T Q + \delta h^2 I + \theta^{-1} Q^T M_a M_a^T Q \\ & + \theta N_a^T N_a + \sigma^{-1} Q^T M_d M_d^T Q + 2(\rho\epsilon_1 + \epsilon_2\nu)I - \bar{C}^T Z \bar{C}. \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 1.7.5 với

$$F = \begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{11} & \Xi_{12} & \Pi_{13} \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 \\ * & * & \Pi_{33} \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} Q^T B - BF \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Z = F^{-1} \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \end{bmatrix}, V = F,$$

thì điều kiện $\Pi < 0$ được thỏa mãn bởi điều kiện sau

$$\begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{11} & \Xi_{12} & \Pi_{13} & \Xi_{14} \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 & 0 \\ * & * & \Xi_{33} & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.31)$$

Vì $-Z \geq 0$ nên tồn tại một ma trận G mà $-Z = G^T G$. Khi đó,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{11} = & A^T Q + Q^T A + L^T B^T + BL + \delta^{-1} Q^T Q + \delta h^2 I + \theta^{-1} Q^T M_a M_a^T Q \\ & + \theta N_a^T N_a + \sigma^{-1} Q^T M_d M_d^T Q + 2(\rho\epsilon_1 + \epsilon_2\nu)I + (G\bar{C})^T G\bar{C}. \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề Schur, điều kiện (3.31) tương đương với điều kiện sau

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Xi_{12} & \bar{\Xi}_{13} & \Xi_{14} & Q^T M_a & Q^T M_d & Q^T & \bar{C}^T G^T \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\theta I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\sigma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\delta I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.32)$$

trong đó

$$\begin{aligned}\Gamma_{11} &= A^T Q + Q^T A + L^T B^T + BL + \delta h^2 I + \theta N_a^T N_a + 2(\rho \epsilon_1 + \epsilon_2 \nu) I, \\ \Xi_{13} &= Q^T D - \bar{C}^T (ZW + U).\end{aligned}$$

Ma trận Γ được biểu diễn bởi $\Gamma = \bar{\Gamma} + \Gamma_{\Delta}$, với

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma} &= \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} & Q^T M_a & Q^T M_d & Q^T & C^T G^T \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\theta I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\sigma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\delta I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}, \\ \Gamma_{\Delta} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Delta C^T(t)(ZW + U) & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta C^T(t)G^T \\ * & 0 & & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & & * & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & & * & & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & & * & & * & * & 0 & 0 \\ * & * & & * & & * & * & * & 0 \\ * & * & & * & & * & * & * & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -M_c^T(ZW + U) & 0 & 0 & 0 & 0 & M_c^T G^T \end{bmatrix}^T, \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} N_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.\end{aligned}$$

Khi đó, (3.32) được đưa về bất đẳng thức ma trận

$$\bar{\Gamma} + \mathcal{A}\mathcal{F}_c(t)\mathcal{B}^T + (\mathcal{A}\mathcal{F}_c(t)\mathcal{B}^T)^T < 0. \quad (3.33)$$

Áp dụng Bổ đề 1.7.6, điều kiện (3.33) tương đương với bất đẳng thức sau

$$\bar{\Gamma} + \kappa^{-1} \mathcal{A}\mathcal{A}^T + \kappa \mathcal{B}\mathcal{B}^T < 0. \quad (3.34)$$

Bất đẳng thức (3.34) được suy ra từ (3.27a) theo Bổ đề phần bù Schur.

Kết hợp (3.27a) và (3.30), ta có

$${}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) < (2z^T(t)U\omega(t) + z^T(t)Zz(t) + \omega^T(t)(S - \gamma I)\omega(t)), \forall t \in [0, T_f]. \quad (3.35)$$

Trong trường hợp không có véc tơ đầu ra $z(t)$, từ (3.27b) ta nhận được (3.17). Theo Định lý 3.2.1, hệ (3.7) bị chặn trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) .

Ước lượng sau thu được từ tích phân hai vế của (3.35) từ 0 đến t_f với $0 < t_f < T_f$

$${}_0 I_{t_f}^1 {}_0^C D_{t_f}^\alpha (V(x(t_f))) < \int_0^{t_f} (2z^T(\tau)U\omega(\tau) + z^T(\tau)Zz(\tau) + \omega^T(\tau)(S - \gamma I)\omega(\tau))d\tau. \quad (3.36)$$

Áp dụng Định lý 1.1.4 và 1.1.15, ta có

$$\begin{aligned} {}_0 I_{t_f}^1 {}_0^C D_{t_f}^\alpha (V(x(t_f))) &= {}_0 I_{t_f}^{1-\alpha+\alpha} {}_0^C D_{t_f}^\alpha (V(x(t_f))) \\ &= {}_0 I_{t_f}^{1-\alpha} ({}_0 I_{t_f}^\alpha {}_0^C D_{t_f}^\alpha (V(x(t_f)))) \\ &= {}_0 I_{t_f}^{1-\alpha} (V(x(t_f)) - V(x(0))) \\ &= {}_0 I_{t_f}^{1-\alpha} (V(x(t_f))) - {}_0 I_{t_f}^{1-\alpha} (V(x(0))). \end{aligned}$$

Với điều kiện ban đầu bằng 0, ta nhận được đánh giá sau

$${}_0 I_{t_f}^{1-\alpha} V(x(0)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_f} (t_f - \tau)^{-\alpha} x^T(0) E^T Q x(0) d\tau = 0.$$

Mặt khác, vì

$${}_0 I_{t_f}^{1-\alpha} V(x(t)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_f} (t_f - \tau)^{-\alpha} x^T(\tau) E^T Q x(\tau) d\tau \geq 0$$

nên ${}_0 I_{t_f}^1 {}_0^C D_{t_f}^\alpha (V(x(t_f))) \geq 0$. Kết hợp với (3.36), ta được ước lượng sau

$$\int_0^{t_f} (2z^T(t)U\omega(t) + z^T(t)Zz(t) + \omega^T(t)(S - \gamma I)\omega(t))dt > 0.$$

Do đó bất đẳng thức tích phân sau được suy ra với $\forall t_f \in [0, T_f]$

$$\int_0^{t_f} (2z^T(t)U\omega(t) + z^T(t)Zz(t) + \omega^T(t)S\omega(t))dt > \gamma \int_0^{t_f} \omega^T(t)\omega(t)dt.$$

Vậy hệ đóng (3.6) (Z, U, S) -tiêu hao vững trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) . $\square$

Các bất đẳng thức (3.8a) và (3.8b) trong Định lý 3.3.1 không được giải một cách hiệu quả bằng LMI Control Toolbox trên MATLAB. Định lý sau đây đưa ra một phép thế các biến ma trận để đưa các điều kiện trên về các bất đẳng thức ma trận tuyến tính chặt có thể giải được trên MATLAB.

Định lý 3.3.2. *Giả sử rằng các Giả thiết 3.1.1-3.1.4 đều thỏa mãn. Cho c_1, c_2, T_f, d với $c_1 < c_2$ là các số dương và R là một ma trận đối xứng xác định dương. Hệ đóng (3.6) (Z, U, S) -tiêu hao trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu tồn tại các số dương $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon, \beta, \delta, \theta, \sigma, \gamma, \kappa, \zeta$, một ma trận đối xứng xác định dương $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, một ma trận $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$, một ma trận không suy biến $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ và một ma trận $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ thỏa mãn các điều kiện sau*

$$R < \mathcal{R} < \zeta R, \quad (3.37a)$$

$$\zeta c_1 + \frac{\beta d}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < c_2, \quad (3.37b)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} & \Gamma_{15} & \Gamma_{16} & \Gamma_{17} & C^T G^T & 0 \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{39} \\ * & * & * & \Gamma_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\theta I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\sigma I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\delta I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I & GM_c \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\kappa I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.37c)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} = & A^T(\mathcal{R}E + E_\perp^T \mathcal{S}) + (E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_\perp)A + L^T B^T + BL + \delta h^2 I \\ & + \theta N_a^T N_a + \kappa N_c^T N_c + 2(\rho \epsilon_1 + \epsilon_2 \nu)I, \end{aligned}$$

$$\Gamma_{12} = (E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_\perp) + (\epsilon_2 \mu - \epsilon_1)I,$$

$$\Gamma_{13} = (E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_\perp)D - C^T ZW - C^T U,$$

$$\Gamma_{14} = \epsilon(E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_\perp)B - \epsilon BF + L^T,$$

$$\Gamma_{15} = (E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_\perp)M_a,$$

$$\Gamma_{16} = (E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_\perp)M_d,$$

$$\Gamma_{17} = (E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_\perp),$$

$$\Gamma_{33} = \sigma N_d^T N_d - W^T ZW - W^T U - U^T W - \beta I,$$

$$\Gamma_{39} = -(W^T Z^T + U^T) M_c,$$

$$\Gamma_{44} = -\epsilon F - \epsilon F^T,$$

$Z = -G^T G$ và $E_\perp \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ là phần bù trực giao của E thỏa mãn $E_\perp E = 0$, $\text{rank}(E_\perp) = n - r$. Ngoài ra, hàm điều khiển phản hồi trạng thái được xác định bởi $u(t) = F^{-1} Lx(t)$.

Chứng minh. Vì điều kiện $E^T Q = Q^T E \geq 0$ trong Định lý 3.3.1 không phải là bất đẳng thức tuyến tính chặt, nên ta dùng phép đổi biến sau để chuyển nó thành LMI chặt [89],

$$Q = \mathcal{R}E + E_\perp^T \mathcal{S}. \quad (3.38)$$

Khi đó điều kiện (3.8a) trong Định lý 3.3.1 tương đương với $\mathcal{R} > 0$. Với phép đổi biến (3.38), bất đẳng thức (3.37c) kéo theo điều kiện (3.27a) trong Định lý 3.3.1. Đặt $\Sigma = R^{-\frac{1}{2}} \mathcal{R} R^{-\frac{1}{2}}$, kết quả sau đây được chỉ ra

$$E^T Q = Q^T E = E^T \mathcal{R} E = E^T R^{\frac{1}{2}} \Sigma R^{\frac{1}{2}} E.$$

Như vậy, điều kiện (3.8b) được thỏa mãn.

Từ (3.37a), ta suy ra được $I < \Sigma < \zeta I$. Do đó $\lambda_1 < \zeta$ và $\lambda_2 > 1$. Áp dụng (3.37b), ta thu được kết quả sau

$$\lambda_1 c_1 + \frac{\beta d}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < \zeta c_1 + \frac{\beta d}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < c_2 < \lambda_2 c_2.$$

Vì vậy, điều kiện (3.8d) được đảm bảo bởi các điều kiện (3.37a) và (3.37b). Theo Định lý 3.3.1, hệ đóng (3.6) (Z, U, S) -tiêu hao trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) . $\square$

Nhận xét 3.3.3. Lưu ý rằng các điều kiện (3.8a) và (3.8b) trong Định lý 3.3.1 là các LMI không chặt. Việc giải số các điều kiện đẳng thức khó thực hiện. Vì vậy, thông qua việc thực hiện phép đổi biến chúng ta đã thu được các bất đẳng thức chặt. Các điều kiện chặt này trong Định lý 3.3.2 đã được giải một cách hiệu quả khi sử dụng LMI Control Toolbox của MATLAB.

Nhận xét 3.3.4. Với công cụ là lý thuyết Lyapunov cùng sự hỗ trợ của kỹ thuật

bất đẳng thức ma trận tuyến tính, đã có nhiều công bố đáng chú ý về bài toán tiêu hao cho các loại hệ phương trình vi phân với đạo hàm bậc nguyên khác nhau [28, 36, 55, 56]. Theo sự hiểu biết của chúng tôi, chỉ có một số ít công bố nghiên cứu tính tiêu hao cho các hệ phân thứ [33, 34]. Phương pháp giải quyết xây dựng hàm Lyapunov-Krasovskii cho các hệ phương trình vi phân bậc nguyên không thể dễ dàng mở rộng một cách trực tiếp để áp dụng cho các hệ phương trình vi phân phân thứ. Trong [34], D.T. Hong và các cộng sự đã thiết kế hàm điều khiển phản hồi đầu ra cho bài toán tiêu hao của hệ phân thứ Caputo có nhiễu phi tuyến. Tuy nhiên, các tác giả chưa xem xét vấn đề hệ phân thứ suy biến. So với hệ phương trình vi phân phân thứ thường, việc phân tích và xây dựng hàm điều khiển cho hệ phân thứ suy biến phức tạp và thách thức hơn. Trong chương này, chúng tôi đã giải được bài toán tiêu hao cho lớp hệ điều khiển phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía. Đây là đóng góp mới, có ý nghĩa khoa học là một trong những kết quả đầu tiên về hệ phân thứ suy biến.

Trong trường hợp không có thành phần không chắc chắn, hệ (3.1) được đưa về hệ điều khiển phân thứ suy biến sau

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= Ax(t) + D\omega(t) + Bu(t), t \geq 0, \\ z(t) &= Cx(t) + W\omega(t), t \geq 0, \\ Ex(0) &= Ex_0. \end{cases} \quad (3.39)$$

Dựa vào Định lý 3.3.2, ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 3.3.5. *Giả sử Giả thiết 3.1.1 được thỏa mãn. Cho các số thực dương c_1, c_2, T_f, d với $c_1 < c_2$ và một ma trận đối xứng xác định dương R . Hệ đóng (3.39) (Z, U, S) -tiêu hao trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu tồn tại các số dương $\epsilon, \beta, \zeta, \gamma$, một ma trận đối xứng xác định dương $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, một ma trận $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$, một ma trận không suy biến F trong $\mathbb{R}^{m \times m}$ và một ma trận $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ thỏa mãn các điều kiện sau*

$$\begin{aligned} R &< \mathcal{R} < \zeta R, \\ \zeta c_1 + \frac{\beta d}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha &< c_2, \\ S - (\gamma + \beta)I &> 0, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ * & \Psi_{22} & 0 \\ * & * & \Psi_{33} \end{bmatrix} < 0,$$

trong đó

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= A^T(\mathcal{R}E + E_{\perp}^T \mathcal{S}) + (E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_{\perp})A + L^T B + BL - C^T ZC, \\ \Psi_{12} &= (E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_{\perp})D - C^T ZW - C^T U, \\ \Psi_{13} &= \epsilon(E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_{\perp})B - \epsilon BF + L^T, \\ \Psi_{22} &= -W^T ZW - W^T U - U^T W - \beta I, \\ \Psi_{33} &= -\epsilon F - \epsilon F^T, \end{aligned}$$

và $E_{\perp} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ là phần bù trực giao của ma trận E , có nghĩa là $E_{\perp} E = 0$ với $\text{rank}(E_{\perp}) = n - r$. Hơn thế nữa, hàm điều khiển phản hồi trạng thái được xác định bởi $u(t) = F^{-1}Lx(t)$.

3.4 Ví dụ minh họa

Tiếp theo, hai ví dụ được chúng tôi đưa ra để minh họa cho tính hiệu quả của kết quả trong Định lý 3.3.2 và Hệ quả 3.3.5.

Ví dụ 3.4.1. Xét hệ điều khiển phân thứ suy biến sau

$$\begin{cases} E_0^C D_t^{0.8} x(t) &= [A + M_a \mathcal{F}_a(t) N_a] x(t) + [D + M_d \mathcal{F}_d(t) N_d] \omega(t) \\ &\quad + f(t, x(t)) + \Delta f(t, x(t)) + Bu(t), t \geq 0, \\ z(t) &= [C + M_c \mathcal{F}_c(t) N_c] x(t) + W \omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (3.41)$$

trong đó $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$, $u(t) \in \mathbb{R}^2$, $\omega(t) \in \mathbb{R}$,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}, M_a = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$N_a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, \mathcal{F}_a(t) = \sin t, M_d = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, N_d = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \mathcal{F}_d(t) = \cos t,$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, M_c = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, N_c = \begin{bmatrix} 0.1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix}, \mathcal{F}_c(t) = \sin t,$$

$$f(t, x(t)) = \begin{bmatrix} 0.1x_1^2(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta f(t, x(t)) = \begin{bmatrix} x_1^2(t) \\ x_1(t)x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Với điều khiển $u(t) = Kx(t)$, hệ đóng nhận được từ (3.41) là

$$\begin{cases} E_0^C D_t^{0.8} x(t) &= [A + M_a \mathcal{F}_a(t) N_a + BK]x(t) + [D + M_d \mathcal{F}_d(t) N_d]\omega(t) \\ &\quad + f(t, x(t)) + \Delta f(t, x(t)), t \geq 0, \\ z(t) &= [C + M_c \mathcal{F}_c(t) N_c]x(t) + W\omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Chúng ta kiểm tra được $f(t, x(t))$ đáp ứng các điều kiện trong Giả thiết 3.1.2 và Giả thiết 3.1.3 với các hằng số $\rho = 1, \mu = 0, \nu = 1$ trong tập $\mathfrak{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 5\}$. Hàm phi tuyến $\Delta f(t, x(t))$ thỏa mãn Giả thiết 3.1.4 với hằng số $h = 1$. Cho trước

$$c_1 = 1, c_2 = 1.7, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, d = 1, T_f = 10, U = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Sử dụng LMI Control Toolbox trong MATLAB, các điều kiện của Định lý 3.3.2 được thỏa mãn với $\epsilon_1 = 0.7454, \epsilon_2 = 0.0882, \epsilon = 1, \beta = 0.5023, \delta = 4.0496, \theta = 4.0449, \sigma = 0.8417, \gamma = 0.2488, \kappa = 4.0865, \zeta = 5.9192$,

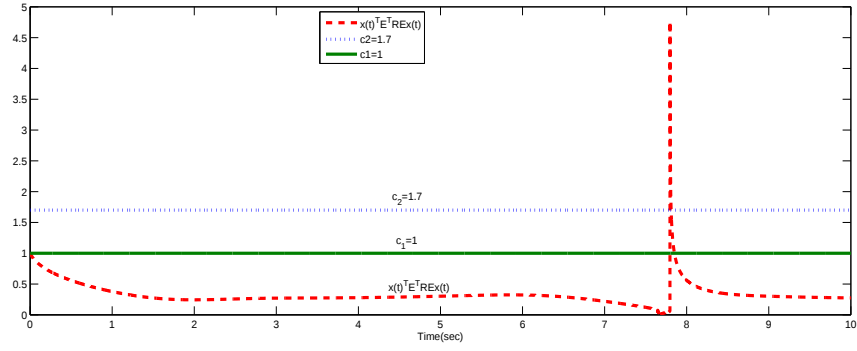
$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 2.0942 & -0.0865 \\ -0.0865 & 2.8886 \end{bmatrix}, \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.0912 & 1.7755 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} -3.6720 & 9.6760 \\ -3.5282 & 2.9514 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 3.4008 & 1.0265 \\ -1.1638 & 1.4339 \end{bmatrix}.$$

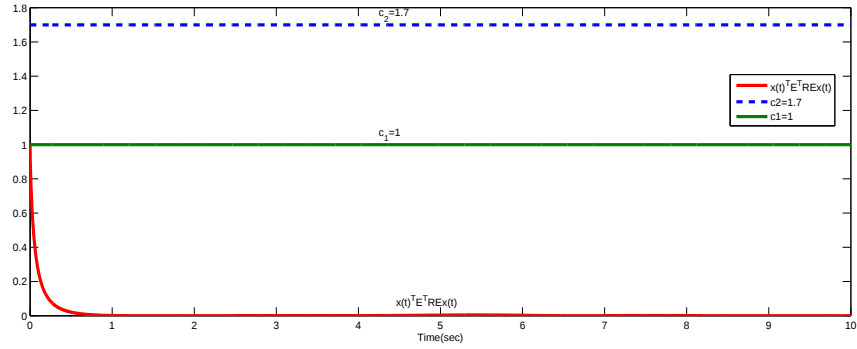
Theo Định lý 3.3.2, hệ đóng (3.42) (Z, U, S) -tiêu hao vững trong thời gian hữu hạn theo bộ $(1, 1.7, 10, R, 1)$ và điều khiển phản hồi trạng thái

$$u(t) = \begin{bmatrix} -0.2707 & 1.7863 \\ -2.6803 & 3.5081 \end{bmatrix} x(t), \forall t \in [0, 10].$$

Để có kết quả mô phỏng, chúng tôi chọn điều kiện đầu $x_0 = (-1, 1)^T \in \mathbb{R}^2$ và nhiễu $\omega(t) = \sin t$. Hình 3.1 biểu diễn sự thay đổi theo thời gian của $x^T(t)E^T R E x(t)$ của hệ mở. Rõ ràng hệ mở không bị chặn trong thời gian hữu hạn vì chúng không thỏa mãn điều kiện của Định nghĩa 3.1.7. Hình 3.2 biểu diễn quỹ đạo của



Hình 3.1: Quỹ đạo của véc tơ $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ mở trong Ví dụ 3.4.1.



Hình 3.2: Quỹ đạo của véc tơ $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ đóng trong Ví dụ 3.4.1.

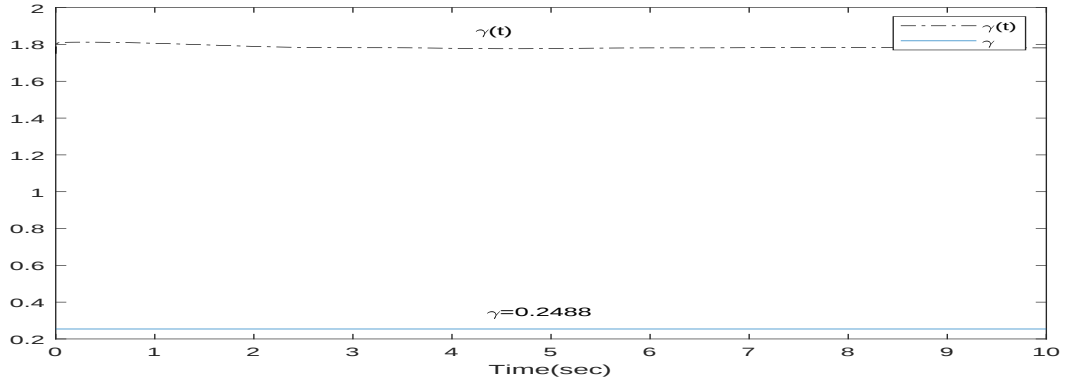
$x^T(t)E^T R E x(t)$ của hệ đóng. Giá trị của $x^T(t)E^T R E x(t)$ bị giới hạn ở mức nhỏ hơn $c_2 = 1.7$ với $t \in [0, 10]$. Khi đó, hệ (3.42) bị chặn trong thời gian hữu hạn theo Định nghĩa 3.1.7. Ta xây dựng hàm hiệu suất tiêu hao xác định bởi

$$\gamma(t) = \frac{\int_0^{t_f} (2z^T(t)U\omega(t) + z^T(t)Zz(t) + \omega^T(t)S\omega(t))dt}{\int_0^{t_f} \omega^T(t)\omega(t)dt}, \quad \forall t_f \in [0, 10].$$

Hình 3.3 biểu thị hàm hiệu suất tiêu hao $\gamma(t)$ luôn lớn hơn $\gamma = 0.2488$, có nghĩa là điều kiện (ii) trong Định nghĩa 3.1.9 luôn đúng. Từ các Hình 3.2 và 3.3, dễ dàng thấy rằng hệ đóng (3.42) (Z, U, S) -tiêu hao vững trong thời gian hữu hạn theo bộ $(1, 1.7, 10, R, 1)$ và $\gamma = 0.2488$.

Ví dụ 3.4.2. Xét mô hình bậc phân thứ của mạch điện sau với nhiễu bị chặn (Xem [81])

$$\begin{cases} E_0^C D_t^{0.3} x(t) &= Ax(t) + D\omega(t) + Bu(t), t \geq 0, \\ z(t) &= Cx(t) + W\omega(t), t \geq 0, \\ Ex(0) &= Ex_0, \end{cases} \quad (3.43)$$



Hình 3.3: Quỹ đạo của hàm chỉ số tiêu hao $\gamma(t)$ trong Ví dụ 3.4.1.

trong đó $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T \in \mathbb{R}^3$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^2$ là véc tơ điều khiển, $\omega(t) \in \mathbb{R}$ là nhiễu,

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix}.$$

Với điều khiển phản hồi trạng thái $u(t) = Kx(t)$, hệ đóng của (3.43) là

$$\begin{cases} E {}^C_0 D_t^{0.3} x(t) &= [A + BK]x(t) + D\omega(t), t \geq 0, \\ z(t) &= Cx(t) + W\omega(t), t \geq 0, \\ Ex(0) &= Ex_0. \end{cases} \quad (3.44)$$

Cho trước $c_1 = 1, c_2 = 2, T_f = 10, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$ và $S = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$.

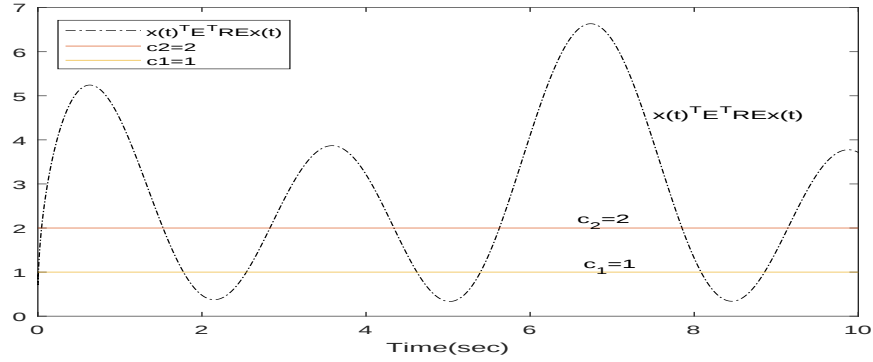
Sử dụng LMI Control Toolbox trong MATLAB tính toán được với các giá trị sau $\epsilon = 107.8063, \beta = 0.1295, \zeta = 1.4597, \gamma = 0.9352$,

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1.1091 & -0.0018 & 0.0000 \\ -0.0018 & 1.1837 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.2298 \end{bmatrix}, \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 2.4509 & 2.2822 & -13.1856 \end{bmatrix},$$

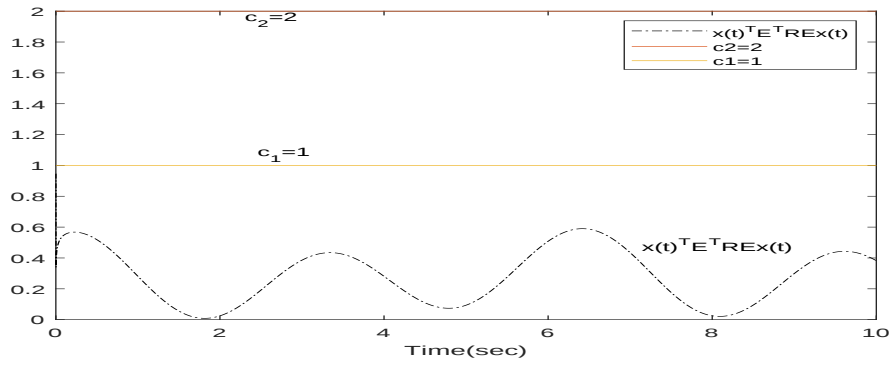
$$F = \begin{bmatrix} 6.9129 & -1.7193 \\ 1.4224 & 8.8078 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -29.7470 & 8.3239 & 2.5731 \\ -8.9797 & -33.5614 & 14.7879 \end{bmatrix}.$$

Từ Hệ quả 3.3.5, hệ đóng (3.44) (Z, U, S) -tiêu hao trong thời gian hữu hạn theo bộ $(1, 2, 10, R, 1)$, điều khiển phản hồi trạng thái

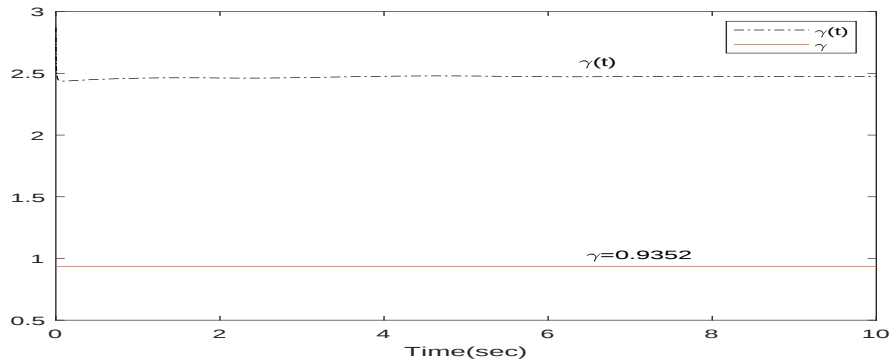
$$u(t) = \begin{bmatrix} -4.3807 & 0.2465 & 0.7593 \\ -0.3121 & -3.8502 & 1.5563 \end{bmatrix} x(t), \forall t \in [0, 10]. \text{ Để có kết quả mô phỏng,}$$



Hình 3.4: Quỹ đạo của véc tơ $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ mở trong Ví dụ 3.4.2



Hình 3.5: Quỹ đạo của $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ đóng trong Ví dụ 3.4.2.



Hình 3.6: Quỹ đạo của hàm chỉ số tiêu hao $\gamma(t)$ của hệ đóng trong Ví dụ 3.4.2.

chúng tôi xét $x_0 = (0.07, 0.07, 0.07)^T \in \mathbb{R}^3$ và nhiễu $\omega(t) = \cos t$. Quỹ đạo của $x^T(t) E^T R E x(t)$ của hệ mở trong Hình 3.4. Từ Hình 3.5, ta thấy rằng giá trị của $x^T(t) E^T R E x(t)$ bị giới hạn ở mức nhỏ hơn $c_2 = 2$ trong khoảng $[0, 10]$. Vậy hệ

đóng bị chặn trong thời gian hữu hạn theo Định nghĩa 3.1.7. Hơn nữa, chúng ta nhận được tỷ lệ tiêu hao $\gamma = 0,9352$ bằng cách giải các điều kiện trong Hệ quả 3.3.5. Ta định nghĩa hàm hiệu suất tiêu hao là

$$\gamma(t) = \frac{\int_0^{t_f} (2z^T(t)U\omega(t) + z^T(t)Zz(t) + \omega^T(t)S\omega(t))dt}{\int_0^{t_f} \omega^T(t)\omega(t)dt}, \forall t_f \in [0, 10].$$

Hàm hiệu suất tiêu hao của hệ đóng được biểu diễn trong Hình 3.6. Rõ ràng $\gamma(t)$ luôn lớn hơn $\gamma = 0,9352$, nghĩa là điều kiện (ii) trong Định nghĩa 3.1.9 luôn đúng. Vậy hệ đóng (3.44) (Z, U, S) -tiêu hao trong thời gian hữu hạn theo bộ $(1, 2, 10, R, 1)$.

Kết luận Chương 3

Chương 3 đã trình bày kết quả nghiên cứu bài toán FTDC cho hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía. Kết quả đạt được như sau:

- Bằng cách áp dụng kỹ thuật biến đổi trên ma trận và LMI chúng tôi đã thiết kế được hàm điều khiển phản hồi trạng thái cho bài toán FTDC của hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía.
- Chúng tôi trình bày các ví dụ số với mô phỏng để minh họa cho các kết quả lý thuyết đã đạt được.

Trong nghiên cứu của chúng tôi, tính bị chặn trong thời gian hữu hạn và tính tiêu hao hóa trong thời gian hữu hạn được phân tích trong trường hợp hệ phân thứ suy biến. Bài toán nghiên cứu tính ổn định theo nghĩa Lyapunov, bài toán tiêu hao cho hệ phân thứ suy biến phức hợp là những chủ đề thú vị, là bài toán mở cần được nghiên cứu trong thời gian tới.

Chương 4

Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến có nhiễu

Trong chương này, chúng tôi thiết kế hàm điều khiển bền vững cho bài toán FTGCC cho lớp hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo suy biến có nhiễu. Nội dung trong chương này được xây dựng từ các kết quả đã được trình bày trong bài báo số (CT3) trong danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

4.1 Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn

Xét lớp hệ phân thứ Caputo suy biến có nhiễu được mô tả bởi

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t) + Bu(t), t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

trong đó $\alpha \in (0, 1)$ là bậc phân thứ của hệ, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển đầu vào, $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ là nhiễu véc tơ cho trước, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ là điều kiện ban đầu. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$ và $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là các ma trận hằng số đã biết. Ma trận $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ suy biến với $\text{rank}(E) = r < n$. Các ma trận thực $\Delta A(t)$, $\Delta D(t)$ thay đổi theo thời gian thỏa mãn

$$\Delta A(t) = M_a \mathcal{F}_a(t) N_a, \quad \Delta D(t) = M_d \mathcal{F}_d(t) N_d, \quad (4.2)$$

trong đó M_a, N_a, M_d, N_d các ma trận hằng số đã biết và $\mathcal{F}_a(t), \mathcal{F}_d(t)$ là các ma trận thực với số chiều thích hợp thỏa mãn

$$\mathcal{F}_a^T(t)\mathcal{F}_a(t) \leq I, \mathcal{F}_d^T(t)\mathcal{F}_d(t) \leq I, \forall t \geq 0.$$

Cho một số dương $T_f > 0$. Liên kết với hệ phân thứ suy biến (4.1), ta xét hàm chi phí toàn phương có dạng sau

$$J = \int_0^{T_f} [x^T(t)S_1x(t) + u^T(t)S_2u(t)]dt, \quad (4.3)$$

với $S_1 > 0$ và $S_2 > 0$ là các ma trận hằng cho trước với số chiều phù hợp.

Giả thiết 4.1.1. *Hàm nhiễu $\omega(\cdot) \in L^2([0, \infty), \mathbb{R}^q)$ thỏa mãn điều kiện bị chặn*

$$\exists d > 0 : \sup_{t \geq 0} \omega^T(t)\omega(t) \leq d.$$

Khi không có tác động của véc tơ điều khiển đầu vào thì hệ (4.1) trở thành

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Định nghĩa 4.1.2. (Xem [61]). Hệ phương trình vi phân (4.4) được gọi là

- i) Chính quy nếu tồn tại $s \in \mathbb{C}$ sao cho đa thức $\det(sE - (A + \Delta A(t)))$ không đồng nhất bằng 0. Khi đó cặp ma trận (E, A) được gọi là chính quy.
- ii) Không có xung nếu tồn tại $s \in \mathbb{C}$ sao cho

$$\deg(\det(sE - (A + \Delta A(t)))) = \text{rank}(E).$$

Tiếp theo, chúng tôi mở rộng bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn đối với hệ phân thứ suy biến.

Định nghĩa 4.1.3. Cho trước c_1, c_2, T_f với $c_1 < c_2$ là các số dương và ma trận R đối xứng xác định dương. Hệ (4.4) được gọi là bị chặn trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu hệ đó là chính quy, không có xung và bất đẳng thức sau đây thỏa mãn

$$x_0^T E^T R E x_0 \leq c_1 \Rightarrow x^T(t) E^T R E x(t) < c_2, \forall t \in [0, T_f]. \quad (4.5)$$

Trong quá trình kiểm soát các phản hồi trạng thái, chúng ta nhận thấy ngay cả

những nhiễu nhỏ trong các tham số của hàm điều khiển cũng có thể gây mất ổn định cho hệ thống. Vì vậy, việc thiết kế một hàm điều khiển bền vững là cần thiết để đảm bảo rằng hệ thống có thể chịu được những thay đổi nhỏ trong các thành phần của hàm điều khiển mà vẫn duy trì được tính ổn định và hiệu suất mong muốn. Xét hàm điều khiển phản hồi trạng thái bền vững dưới dạng sau

$$u(t) = (K + \Delta K(t))x(t), \quad (4.6)$$

trong đó $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ là ma trận phản hồi trạng thái cần thiết kế và $\Delta K(t)$ là thành phần thay đổi theo thời gian có dạng $\Delta K(t) = M_k \mathcal{F}_k(t) N_k$, với M_k và N_k là các ma trận thực đã biết với số chiều phù hợp, $\mathcal{F}_k(t)$ là ma trận thực biến thiên thỏa mãn $\mathcal{F}_k^T(t) \mathcal{F}_k(t) \leq I, \forall t \geq 0$.

Với điều khiển (4.6), hệ đóng thu được là

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= [A + \Delta A(t) + BK + B\Delta K(t)]x(t) \\ &+ [D + \Delta D(t)]\omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Nội dung chính của chương là thiết kế hàm điều khiển $u(t) = (K + \Delta K(t))x(t)$ cho hệ (4.1) và hàm chi phí (4.3) sao cho hệ đóng (4.7) bị chặn trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) và giá trị của hàm chi phí (4.3) thỏa mãn $J \leq J^*$, trong đó J^* là một hằng số dương xác định.

Định nghĩa 4.1.4. Cho trước các số dương $T_f, c_1, c_2, (c_2 > c_1), d$ và một ma trận đối xứng xác định dương R . Xét hệ (4.1) với hàm chi phí (4.3). Nếu tồn tại một hàm điều khiển bền vững $\hat{u}(t)$ và hằng số dương J^* sao cho hệ đóng (4.7) bị chặn trong thời gian hữu hạn theo bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) và giá trị của hàm chi phí thỏa mãn $J \leq J^*$ thì J^* được gọi là giá trị đảm bảo chi phí, $\hat{u}(t)$ được gọi là hàm điều khiển đảm bảo chi phí.

Định lý 4.1.5. Xét hệ (4.1) với hàm chi phí (4.3). Cho trước các số dương $c_1, c_2, (c_2 > c_1), T_f, d$ và một ma trận đối xứng xác định dương R . Giả sử Giả thiết 4.1.1 được thỏa mãn và tồn tại các số thực dương $\delta, \theta, \beta, \gamma, \mu_1, \mu_2$, một ma trận không suy biến $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ và một ma trận $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sao cho các điều kiện dưới

đây được đảm bảo

$$PE^T = EP^T \geq 0, \quad (4.8a)$$

$$\mu_1 PE^T < PE^T REP^T < \mu_2 PE^T, \quad (4.8b)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & PN_a^T & PN_k^T & D & M_d & PS_1 & YS_2 & YS_2 M_k & PN_k^T \\ * & -\delta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\theta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -S_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -S_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\sigma I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.8c)$$

$$\frac{c_1}{\mu_1} + \frac{(\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d))d}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < \frac{c_2}{\mu_2}, \quad (4.8d)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= PA^T + YB^T + AP^T + BY^T + \delta M_a M_a^T + \theta B M_k M_k^T B^T, \\ \sigma &= \frac{1}{1 + \lambda_{\max}(S_2) \lambda_{\max}(M_k^T M_k)}. \end{aligned}$$

Khi đó (4.6) là hàm điều khiển phản hồi trạng thái bền vững đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho hệ (4.1). Trong đó, ma trận phản hồi trạng thái K được xác định bởi $K = Y^T P^{-T}$. Hơn thế nữa, giá trị đảm bảo chi phí J^* được xác định bởi

$$J^* = (\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d)) d T_f + \frac{T_f^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \lambda_{\max}(E^T P^{-T}) \|x_0\|^2.$$

Chứng minh. Chúng ta xây dựng hàm Lyapunov sau $V(x(t)) = x^T(t) E^T Q x(t)$, trong đó ma trận $Q = P^{-T}$ thỏa mãn điều kiện (4.8a). Khi đó điều kiện (4.8a) tương đương với $E^T Q = Q^T E \geq 0$.

Áp dụng Bổ đề 1.7.4, tính đạo hàm α -Caputo của $V(x(t))$ dọc theo quỹ đạo của

hệ (4.7) ta được

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) &\leq 2x^T(t)E^T Q {}_0^C D_t^\alpha x(t) \\
&= 2x^T(t)Q^T[(A+BK)x(t) + \Delta A(t)x(t) + B\Delta K(t)x(t) \\
&\quad + (D + \Delta D(t))\omega(t)] \\
&= 2x^T(t)Q^T(A+BK)x(t) + 2x^T(t)Q^T \Delta A(t)x(t) \\
&\quad + 2x^T(t)Q^T B\Delta K(t)x(t) + 2x^T(t)Q^T D\omega(t) \\
&\quad + 2x^T(t)Q^T \Delta D(t)\omega(t).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Với các số dương $\delta, \theta, \gamma, \beta$, ta thu được các đánh giá sau khi áp dụng bất đẳng thức ma trận Cauchy (Bổ đề 1.7.2) cùng với điều kiện (4.2) và (4.3)

$$\begin{aligned}
2x^T(t)Q^T \Delta A(t)x(t) &= 2x^T(t)Q^T M_a \mathcal{F}_a(t) N_a x(t) \\
&\leq \delta x^T(t)Q^T M_a M_a^T Q x(t) + \delta^{-1} x^T(t) N_a^T N_a x(t),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
2x^T(t)Q^T B\Delta K(t)x(t) &= 2x^T(t)Q^T B M_k \mathcal{F}_k(t) N_k x(t) \\
&\leq \theta x^T(t)Q^T B M_k M_k^T B^T Q x(t) \\
&\quad + \theta^{-1} x^T(t) N_k^T N_k x(t),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$2x^T(t)Q^T D\omega(t) \leq \beta^{-1} x^T(t)Q^T D D^T Q x(t) + \beta \omega^T(t)\omega(t), \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
2x^T(t)Q^T \Delta D(t)\omega(t) &= 2x^T(t)Q^T M_d \mathcal{F}_d(t) N_d \omega(t) \\
&\leq \gamma^{-1} x^T(t)Q^T M_d M_d^T Q x(t) + \gamma \omega^T(t) N_d^T N_d \omega(t) \\
&\leq \gamma^{-1} x^T(t)Q^T M_d M_d^T Q x(t) \\
&\quad + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d) \omega^T(t)\omega(t).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Cộng các bất đẳng thức (4.10), (4.11), (4.12) và (4.13) vào (4.9), ta được

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\alpha V(t) &\leq 2x^T(t)Q^T(A+BK)x(t) + \delta x^T(t)Q^T M_a M_a^T Q x(t) \\
&\quad + \delta^{-1} x^T(t) N_a^T N_a x(t) + \theta x^T(t)Q^T B M_k M_k^T B^T Q x(t) \\
&\quad + \theta^{-1} x^T(t) N_k^T N_k x(t) + \beta^{-1} x^T(t)Q^T D D^T Q x(t) \\
&\quad + \gamma^{-1} x^T(t)Q^T M_d M_d^T Q x(t) + (\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d)) \omega^T(t)\omega(t).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Đặt $\mathfrak{J} = {}^C_0 D_t^\alpha V(x(t)) + \left(x^T(t)S_1x(t) + u^T(t)S_2u(t) \right)$. Từ (4.6), ta suy ra được

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= {}^C_0 D_t^\alpha V(t) + \left(x^T(t)S_1x(t) + x^T(t)[K + \Delta K(t)]^T S_2[K + \Delta K(t)]x(t) \right) \\ &= {}^C_0 D_t^\alpha V(t) + \left(x^T(t)(S_1 + K^T S_2 K)x(t) + 2x^T(t)K^T S_2 \Delta K(t)x(t) \right. \\ &\quad \left. + x^T(t)\Delta^T K(t)S_2 \Delta K(t)x(t) \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Đánh giá sau thu được từ việc áp dụng bất đẳng thức ma trận Cauchy

$$\begin{aligned} 2x^T(t)K^T S_2 \Delta K(t)x(t) &= 2x^T(t)K^T S_2 M_k \mathcal{F}_k(t) N_k x(t) \\ &\leq x^T(t)K^T S_2 M_k M_k^T S_2 K x(t) + x^T(t)N_k^T N_K x(t), \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} x^T(t)\Delta K^T(t)S_2 \Delta K(t)x(t) &= x^T(t)N_k^T \mathcal{F}_k^T(t)M_k^T S_2 M_k \mathcal{F}_k(t)N_k x(t) \\ &\leq \lambda_{\max}(S_2)\lambda_{\max}(M_k^T M_k)x^T(t)N_k^T N_k x(t). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Kết hợp các điều kiện (4.14), (4.15), (4.16) với (4.17) ta nhận được

$$\begin{aligned} I &\leq 2x^T(t)Q^T(A + BK)x(t) + \delta x^T(t)Q^T M_a M_a^T Q x(t) + \delta^{-1}x^T(t)N_a^T N_a x(t) \\ &\quad + \theta x^T(t)Q^T B M_k M_k^T B^T Q x(t) + \theta^{-1}x^T(t)N_k^T N_k x(t) \\ &\quad + \beta^{-1}x^T(t)Q^T D D^T Q x(t) + \gamma^{-1}x^T(t)Q^T M_d M_d^T Q x(t) \\ &\quad + (\beta + \gamma\lambda_{\max}(N_d^T N_d))\omega^T(t)\omega(t) + x^T(t)(S_1 + K^T S_2 K)x(t) \\ &\quad + x^T(t)K^T S_2 M_k M_k^T S_2 K x(t) + x^T(t)N_k^T N_K x(t) \\ &\quad + \lambda_{\max}(S_2)\lambda_{\max}(M_k^T M_k)x^T(t)N_k^T N_k x(t). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^\alpha V(x(t)) - (\beta + \gamma\lambda_{\max}(N_d^T N_d))\omega^T(t)\omega(t) + x^T(t)[S_1 + K^T S_2 K \\ + 2K^T S_2 \Delta K(t) + \Delta^T K(t)S_2 \Delta K(t)]x(t) \leq x^T(t)\Omega x(t), \end{aligned} \quad (4.18)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \Omega &= (A + BK)^T Q + Q^T(A + BK) + \delta Q^T M_a M_a^T Q + \delta^{-1}N_a^T N_a + \theta Q^T B M_k M_k^T B^T Q \\ &\quad + \theta^{-1}N_k^T N_k + \beta^{-1}Q^T D D^T Q + \gamma^{-1}Q^T M_d M_d^T Q + S_1 + K^T S_2 K \\ &\quad + K^T S_2 M_k M_k^T S_2 K + N_k^T N_k + \lambda_{\max}(S_2)\lambda_{\max}(M_k^T M_k)N_k^T N_k. \end{aligned}$$

Nhân lần lượt vào bên trái Ω với Q^{-T} và bên phải của Ω với Q^{-1} . Khi đó, điều

kiện $\Omega < 0$ tương đương với bất đẳng thức ma trận sau

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} = & Q^{-T}(A+BK)^T + (A+BK)Q^{-1} + \delta M_a M_a^T + \delta^{-1} Q^{-T} N_a^T N_a Q^{-1} \\ & + \theta B M_k M_k^T B^T + \theta^{-1} Q^{-T} N_k^T N_k Q^{-1} + \beta^{-1} D D^T + \gamma^{-1} M_d M_d^T \\ & + Q^{-T}(S_1 + K^T S_2 K + K^T S_2 M_k M_k^T S_2 K + N_k^T N_k \\ & + \lambda_{\max}(S_2) \lambda_{\max}(M_k^T M_k) N_k^T N_k) Q^{-1} < 0.\end{aligned}$$

Đặt $Y = Q^{-T} K^T$, ta thu được

$$K^T = P^{-1} Y, P K^T B^T = Y B^T, B K P^T = B Y^T.$$

Ma trận $\bar{\Omega}$ được biểu diễn dưới dạng

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} = & P A^T + Y B^T + A P^T + B Y^T + \delta M_a M_a^T + \delta^{-1} P N_a^T N_a P^T + \theta B M_k M_k^T B^T \\ & + \theta^{-1} P N_k^T N_k P^T + \beta^{-1} D D^T + \gamma^{-1} M_d M_d^T + P S_1 P^T + Y S_2 Y^T \\ & + Y S_2 M_k M_k^T S_2 Y^T + [1 + \lambda_{\max}(S_2) \lambda_{\max}(M_k^T M_k)] P N_k^T N_k P^T.\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề Schur 1.7.3, từ bất đẳng thức (4.8c) ta nhận được $\bar{\Omega} < 0$. Kết hợp với (4.18), ta có ước lượng sau

$$\begin{aligned}& {}^C D_t^\alpha V(x(t)) - (\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d)) \omega^T(t) \omega(t) + x^T(t) [S_1 + K^T S_2 K \\ & + 2K^T S_2 \Delta K(t) + \Delta^T K(t) S_2 \Delta K(t)] x(t) \leq 0, \forall t < 0.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Phần còn lại của chứng minh được chia thành hai bước:

Bước 1: Ta chứng minh rằng hệ (4.7) chính quy và không có xung trong khoảng thời gian $[0, T_f]$. Với điều kiện $\Omega < 0$, ta có

$$\begin{aligned}\Omega = & (A+BK)^T Q + Q^T (A+BK) + \delta Q^T M_a M_a^T Q + \delta^{-1} N_a^T N_a \\ & + \theta Q^T B M_k M_k^T B^T Q + \theta^{-1} N_k^T N_k + \beta^{-1} Q^T D D^T Q \\ & + \gamma^{-1} Q^T M_d M_d^T Q + S_1 + K^T S_2 K + K^T S_2 M_k M_k^T S_2 K + N_k^T N_k \\ & + \lambda_{\max}(S_2) \lambda_{\max}(M_k^T M_k) N_k^T N_k < 0.\end{aligned}\tag{4.20}$$

Ước lượng sau nhận được từ việc kết hợp (4.10) và (4.20)

$$\begin{aligned}\hat{\Omega} = & (A+BK+\Delta A(t))^T Q + Q^T (A+BK+\Delta A(t)) + \theta Q^T B M_k M_k^T B^T Q \\ & + \theta^{-1} N_k^T N_k + \beta^{-1} Q^T D D^T Q + \gamma^{-1} Q^T M_d M_d^T Q + S_1 + K^T S_2 K \\ & + K^T S_2 M_k M_k^T S_2 K + N_k^T N_k + \lambda_{\max}(S_2) \lambda_{\max}(M_k^T M_k) N_k^T N_k < 0.\end{aligned}$$

Vì

$$\begin{aligned} & \theta Q^T B M_k M_k^T B^T Q + \theta^{-1} N_k^T N_k + \beta^{-1} Q^T D D^T Q + \gamma^{-1} Q^T M_d M_d^T Q + S_1 \\ & + K^T S_2 K + K^T S_2 M_k M_k^T S_2 K + N_k^T N_k + \lambda_{\max}(S_2) \lambda_{\max}(M_k^T M_k) N_k^T N_k > 0, \end{aligned}$$

nên ta nhận được bất đẳng thức sau

$$(A + BK + \Delta A(t))^T Q + Q^T (A + BK + \Delta A(t)) < 0. \quad (4.21)$$

Vì $\text{rank}(E) = r < n$ nên tồn tại các ma trận không suy biến F, L sao cho

$$FEL = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Đặt

$$F(A + BK + \Delta A(t))L = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad F^{-T}QL = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Thực hiện một số biến đổi ma trận, từ điều kiện $E^T Q = Q^T E \geq 0$ và (4.22) ta nhận được đánh giá sau

$$\begin{aligned} L^T E^T Q L &= (L^T E^T F^T)(F^{-T} Q L) = (FEL)^T (F^{-T} Q L) \\ &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

và

$$\begin{aligned} L^T Q^T E L &= (L^T Q^T F^{-1})(FEL) = (F^{-T} Q L)^T (FEL) \\ &= \begin{bmatrix} Q_1^T & Q_3^T \\ Q_2^T & Q_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^T & 0 \\ Q_2^T & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ta nhận được $Q_1 = Q_1^T \geq 0, Q_2 = 0$ sau khi kết hợp (4.23) và (4.24). Vì ma trận Q không suy biến nên ma trận $F^{-T}QL = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}$ cũng không suy biến. Nhân lần lượt bên trái của (4.21) với L^T và bên phải của (4.21) với L , ta thu được

$$L^T ((A + BK + \Delta A(t))^T Q + Q^T (A + BK + \Delta A(t))) L < 0.$$

Do đó,

$$L^T(A + BK + \Delta A(t))^T F^T F^{-T} Q L + L^T Q^T F^{-1} F(A + BK + \Delta A(t)) L < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1^T & A_3^T \\ A_2^T & A_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^T & Q_3^T \\ 0 & Q_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} < 0.$$

Vì vậy, ta nhận được đánh giá

$$\begin{pmatrix} \star & \star \\ \star & A_4^T Q_4 + Q_4^T A_4 \end{pmatrix} < 0, \quad (4.25)$$

trong đó $\star$ kí hiệu ma trận con không liên quan đến điều cần chứng minh. Từ (4.25), ta có

$$A_4^T Q_4 + Q_4^T A_4 < 0.$$

Do đó ma trận A_4 không suy biến. Theo Định lý 1.3.7, hệ (4.7) chính quy và không có xung.

Ta chứng minh điều kiện (4.5) đúng với hệ đóng (4.7). Từ (4.19) và

$$\begin{aligned} & x^T(t)(S_1 + K^T S_2 K + 2K^T S_2 \Delta K(t) + \Delta^T S_2 \Delta K(t))x(t) \\ & = x^T(t)S_1 x(t) + u^T(t)S_2 u(t) > 0, \end{aligned}$$

ta nhận được

$${}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) - (\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d)) \omega^T(t) \omega(t) \leq 0, \forall t \geq 0. \quad (4.26)$$

Lấy tích phân phân thứ bậc α cả hai vế của (4.26) từ 0 đến t ($0 \leq t \leq T_f$). Áp dụng Định lý 1.1.15 và Giả thiết 4.1.1 ta nhận được

$$x^T(t)E^T Q x(t) \leq x^T(0)E^T Q x(0) + (\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d))I_t^\alpha(\omega^T(t)\omega(t)). \quad (4.27)$$

Hơn thế nữa, từ (4.8b) thì $\mu_1 E^T Q < E^T R E < \mu_2 E^T Q$ với $t \in [0, T_f]$. Khi đó

$$\mu_1 x^T(t)E^T Q x(t) < x^T(t)E^T R E x(t) < \mu_2 x^T(t)E^T Q x(t). \quad (4.28)$$

Áp dụng Giả thiết 4.1.1, ta nhận được

$$\begin{aligned}
{}_0\mathcal{I}_t^\alpha(\omega^T(t)\omega(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \omega^T(\tau)\omega(\tau) d\tau \\
&\leq \frac{d}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
&= -\frac{d(t-\tau)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&\leq \frac{d}{\Gamma(\alpha+1)} T_f^\alpha.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Ta nhận được bất đẳng thức sau từ (4.27), (4.28) và (4.29)

$$\begin{aligned}
x^T(t)E^T REx(t) &< \mu_2 x^T(t)E^T Qx(t) \\
&< \mu_2 (x^T(0)E^T Qx(0) + \frac{(\beta + \gamma\lambda_{\max}(N_d^T N_d))d}{\Gamma(\alpha+1)} T_f^\alpha) \\
&< \mu_2 \left(\frac{c_1}{\mu_1} + \frac{(\beta + \gamma\lambda_{\max}(N_d^T N_d))d}{\Gamma(\alpha+1)} T_f^\alpha \right).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Từ điều kiện (4.8d) và (4.30), ta nhận được đánh giá $x^T(t)E^T REx(t) < c_2$, $\forall t \in [0, T_f]$. Do đó, hệ (4.7) bị chặn trong thời gian hữu hạn tương ứng đối với bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) .

Tiếp theo, ta xây dựng giới hạn của hàm chi phí. Thực hiện tích phân cả hai vế của (4.19) từ 0 đến t_f , $0 < t_f \leq T_f$, ta nhận được kết quả sau

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_f} [x^T(\tau)(S_1 + K^T S_2 K + 2K^T S_2 \Delta K(t) + \Delta^T S_2 \Delta K(t))x(\tau)] d\tau \\
&+ {}_0\mathcal{I}_{t_f}^1 {}^C D_{t_f}^\alpha(V(x(t_f))) \leq \int_0^{t_f} (\beta + \gamma\lambda_{\max}(N_d^T N_d))\omega^T(\tau)\omega(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Kết quả sau nhận được khi áp dụng Định lý 1.1.4 và Định lý 1.1.15

$$\begin{aligned}
{}_0\mathcal{I}_{t_f}^1 {}^C D_{t_f}^\alpha(V(x(t_f))) &= {}_0\mathcal{I}_{t_f}^{1-\alpha+\alpha} {}^C D_{t_f}^\alpha(V(x(t_f))) \\
&= {}_0\mathcal{I}_{t_f}^{1-\alpha} ({}_0\mathcal{I}_{t_f}^\alpha {}^C D_{t_f}^\alpha(V(x(t_f)))) \\
&= {}_0\mathcal{I}_{t_f}^{1-\alpha} (V(x(t_f)) - V(x(0))) \\
&= {}_0\mathcal{I}_{t_f}^{1-\alpha} (V(x(t_f))) - {}_0\mathcal{I}_{t_f}^{1-\alpha} (V(x(0))).
\end{aligned}$$

Áp dụng Giả thiết 4.1.1 ta có

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} ((\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d)) \omega^T(\tau) \omega(\tau) d\tau &= (\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d)) \int_0^{t_f} \omega^T(\tau) \omega(\tau) d\tau \\ &\leq (\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d)) dT_f. \end{aligned}$$

Vì vậy, từ (4.31) ta nhận được

$$J \leq (\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d)) dT_f + {}_0I_{t_f}^{1-\alpha}(V(x(0))) - {}_0I_{t_f}^{1-\alpha}(V(x(t_f))). \quad (4.32)$$

Hơn thế nữa,

$${}_0I_{t_f}^{1-\alpha}V(x(t_f)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_f} (t_f - \tau)^{-\alpha} x^T(\tau) E^T Q x(\tau) d\tau \geq 0,$$

$$\begin{aligned} {}_0I_{t_f}^{1-\alpha}(V(x(0))) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_f} (t_f - s)^{-\alpha} x^T(0) E^T Q x(0) ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \lambda_{\max}(E^T Q) \|x_0\|^2 \frac{t_f^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &= \frac{T_f^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \lambda_{\max}(P^{-1}E)^T \|x_0\|^2. \end{aligned}$$

Do đó, đánh giá sau nhận được từ bất đẳng thức (4.32)

$$J \leq (\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d)) dT_f + \frac{T_f^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \lambda_{\max}(E^T P^{-T}) \|x_0\|^2 = J^*.$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Các bất đẳng thức (4.8a) và (4.8b) trong Định lý 4.1.5 không chặt nên không thể áp dụng hiệu quả với LMI Control Toolbox trong MATLAB. Vấn đề này sẽ được giải quyết trong Định lý tiếp theo.

Định lý 4.1.6. Xét hệ (4.1) với hàm chi phí (4.3). Cho trước các số dương $c_1, c_2, (c_2 > c_1), T_f, d$ và một ma trận đối xứng xác định dương R . Giả sử Giả thiết 4.1.1 được thỏa mãn và tồn tại các số thực dương $\delta, \theta, \beta, \gamma, \mu_1, \mu_2$, một ma trận đối xứng xác định dương $\hat{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, một ma trận $\hat{\mathcal{Z}} \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ và một ma trận $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\mu_1 \Xi < \hat{\mathcal{X}} < \mu_2 \Xi, \quad (4.33a)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & D & M_d & \Pi_{16} & YS_2 & YS_2M_k & \Pi_{19} \\ * & -\delta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\theta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -S_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -S_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\sigma I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.33b)$$

$$\frac{c_1}{\mu_1} + \frac{(\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d))d}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < \frac{c_2}{\mu_2}, \quad (4.33c)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= (EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T) A^T + A(V_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T E^T + V_2 \hat{\mathcal{Z}}^T) + Y B^T + B Y^T \\ &\quad + \delta M_a M_a^T + \theta B M_k M_k^T B^T, \\ \Pi_{12} &= (EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T) N_a^T, \\ \Pi_{13} &= (EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T) N_k^T, \\ \Pi_{16} &= (EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T) S_1, \\ \Pi_{19} &= (EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T) N_k^T, \\ \Xi &= (\Sigma_r U_1^T R U_1 \Sigma_r)^{-1}, \\ \sigma &= \frac{1}{1 + \lambda_{\max}(S_2) \lambda_{\max}(M_k^T M_k)}. \end{aligned}$$

Khi đó (4.6) là hàm điều khiển phản hồi trạng thái bền vững đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (4.1) trong thời gian hữu hạn. Trong đó ma trận phản hồi trạng thái K được xác định bởi $K = Y^T (EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T)^{-T}$. Hơn thế nữa, giá trị đảm bảo chi phí J^* được xác định bởi

$$J^* = (\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d)) d T_f + \frac{T_f^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \lambda_{\max}(E^T (EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T)^{-T}) \|x_0\|^2.$$

Chứng minh. Đặt $P = EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T$ trong đó $0 < \hat{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\hat{\mathcal{Z}} \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$. Theo Bổ đề 1.7.7, $EV_2 = 0$ nên ta chứng minh được

$$P E^T = EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T E^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T E^T = EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T E^T = E P^T \geq 0.$$

Đặt $Q = P^{-T}$, khi đó Q thỏa mãn điều kiện $E^T Q = Q^T E \geq 0$. Theo Bổ đề 1.7.8, tồn tại ma trận $\mathcal{X} > 0$ và $\mathcal{Z}$ sao cho

$$Q = U_1 \mathcal{X} U_1^T E + U_2 \mathcal{Z}, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} U_1 \mathcal{X} U_1^T E + U_2 \mathcal{Z} &= (E V_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T)^{-T}, \\ \hat{\mathcal{X}} &= \Sigma_r^{-1} \mathcal{X}^{-1} \Sigma_r^{-1} \Rightarrow \mathcal{X} = \Sigma_r^{-1} \hat{\mathcal{X}}^{-1} \Sigma_r^{-1}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Khi đó, bất đẳng thức (4.8c) kéo theo điều kiện (4.33c) trong Định lý 4.1.6. Từ điều kiện (4.33a) ta có

$$\frac{1}{\mu_2} (\Sigma_r U_1^T R U_1 \Sigma_r) < \hat{\mathcal{X}}^{-1} < \frac{1}{\mu_1} \Sigma_r U_1^T R U_1 \Sigma_r. \quad (4.36)$$

Đánh giá sau nhận được khi nhân lần lượt bên trái của (4.36) với Σ_r^{-1} và nhân bên phải của (4.36) với Σ_r^{-1}

$$\mu_1 \Sigma_r^{-1} \hat{\mathcal{X}}^{-1} \Sigma_r^{-1} < U_1^T R U_1 < \mu_2 \Sigma_r^{-1} \hat{\mathcal{X}}^{-1} \Sigma_r^{-1}. \quad (4.37)$$

Tiếp tục nhân lần lượt bên trái của bất đẳng thức (4.37) với $E^T U_1$ và nhân bên phải của (4.37) với $U_1^T E$. Kết hợp (4.34), (4.35) và $E^T U_2 = 0$ ta nhận được

$$\begin{aligned} \mu_1 E^T U_1 \Sigma_r^{-1} \hat{\mathcal{X}}^{-1} \Sigma_r^{-1} U_1^T E &< E^T R E < \mu_2 E^T U_1 \Sigma_r^{-1} \hat{\mathcal{X}}^{-1} \Sigma_r^{-1} U_1^T E, \\ \mu_1 E^T Q &< E^T R E < \mu_2 E^T Q. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Tiếp theo, ta thu được điều kiện (4.8b) khi nhân lần lượt bên trái của bất đẳng thức (4.38) với Q^{-T} và nhân bên phải của (4.38) với Q^{-1} . Theo Định lý 4.1.5, (4.6) là hàm điều khiển phản hồi trạng thái đảm bảo chi phí bền vững trong thời gian hữu hạn cho hệ (4.1). Hơn nữa, ma trận phản hồi trạng thái ổn định hóa được xác định bởi $K = Y^T P^{-T} = Y^T (E V_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T)^{-T}$. Giá trị đảm bảo chi phí (4.4) là

$$J^* = (\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d)) dT_f + \frac{T_f^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \lambda_{\max}(E^T (E V_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T)^{-T}) \|x_0\|^2.$$

□

Nhận xét 4.1.7. Cho đến thời điểm hiện tại, một số công trình đã được công bố liên quan đến bài toán điều khiển đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn cho các hệ phân thứ khác nhau [52, 69, 73, 72]. Tuy nhiên, theo sự hiểu biết tốt nhất

của chúng tôi, chưa có một kết quả nào nghiên cứu về FTGCC cho các hệ phân thứ suy biến có nhiễu. Trong nghiên cứu này, bằng việc sử dụng phép tính giải tích phân thứ và lý thuyết giá trị kỳ dị cùng phương pháp biến đổi LMI, chúng tôi đã giải quyết thành công bài toán FTGCC đối với hệ phân thứ suy biến có nhiễu.

Nhận xét 4.1.8. Trong Định lý 4.1.6, các số thực c_1, c_2, T_f, d là các số dương và R là ma trận đối xứng xác định dương cho trước. Các điều kiện (4.33a) và (4.33b) là các bất đẳng thức LMI chặt, vì vậy chúng ta dễ dàng giải các điều kiện này bằng cách sử dụng LMI Control Toolbox trong MATLAB. Sau đó, áp dụng kết quả vừa thu được ta kiểm tra được điều kiện (4.33c).

Trong trường hợp không có thành phần không chắc chắn, hệ (4.1) được đưa về hệ điều khiển phân thứ suy biến sau

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + D\omega(t) + Bu(t), t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.39)$$

Với hàm điều khiển bền vững (4.6), ta nhận được hệ đóng sau

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) = [A + BK + B\Delta K(t)]x(t) + D\omega(t), t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Dựa vào Định lý 4.1.6, ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 4.1.9. Xét hệ (4.39) với hàm chi phí (4.3). Cho trước các số dương $c_1, c_2, (c_2 > c_1), T_f, d$ và một ma trận đối xứng xác định dương R . Giả sử Giả thiết 4.1.1 được thỏa mãn, tồn tại các số thực dương $\theta, \beta, \mu_1, \mu_2$, một ma trận đối xứng xác định dương $\hat{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, một ma trận $\hat{\mathcal{Z}} \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ và ma trận $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sao cho các điều kiện dưới đây được đảm bảo

$$\mu_1 \Xi < \hat{\mathcal{X}} < \mu_2 \Xi, \quad (4.40a)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & D & \Pi_{14} & YS_2 & YS_2M_k & \Pi_{17} \\ * & -\theta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\beta I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -S_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -S_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\sigma I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.40b)$$

$$\frac{c_1}{\mu_1} + \frac{\beta d}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < \frac{c_2}{\mu_2}, \quad (4.40c)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= (EV_1\hat{\mathcal{X}}V_1^T + \hat{\mathcal{Z}}V_2^T)A^T + A(V_1\hat{\mathcal{X}}V_1^TE^T + V_2\hat{\mathcal{Z}}^T) + YB^T + BY^T \\ &\quad + \theta BM_kM_k^TB^T, \\ \Pi_{12} &= (EV_1\hat{\mathcal{X}}V_1^T + \hat{\mathcal{Z}}V_2^T)N_k^T, \\ \Pi_{14} &= (EV_1\hat{\mathcal{X}}V_1^T + \hat{\mathcal{Z}}V_2^T)S_1, \\ \Pi_{17} &= (EV_1\hat{\mathcal{X}}V_1^T + \hat{\mathcal{Z}}V_2^T)N_k^T, \\ \Xi &= (\Sigma_r U_1^T R U_1 \Sigma_r)^{-1}, \\ \sigma &= \frac{1}{1 + \lambda_{\max}(S_2)\lambda_{\max}(M_k^T M_k)}. \end{aligned}$$

Khi đó, (4.6) là hàm điều khiển phản hồi trạng thái bền vững đảm bảo chi phí trong thời gian hữu hạn của hệ (4.1). Trong đó, ma trận phản hồi trạng thái K được xác định bởi $K = Y^T(EV_1\hat{\mathcal{X}}V_1^T + \hat{\mathcal{Z}}V_2^T)^{-T}$. Hơn thế nữa, giá trị đảm bảo chi phí J^* được xác định bởi

$$J^* = \beta d T_f + \frac{T_f^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \lambda_{\max}(E^T(EV_1\hat{\mathcal{X}}V_1^T + \hat{\mathcal{Z}}V_2^T)^{-T}) \|x_0\|^2.$$

4.2 Ví dụ minh họa

Trong phần này, chúng tôi trình bày hai ví dụ kèm theo mô phỏng nhằm minh họa cho các tiêu chuẩn đã được thiết lập.

Ví dụ 4.2.1. Xét hệ phân thứ Caputo suy biến sau

$$\begin{cases} E_0^C D_t^{0.8} x(t) &= [A + M_a \mathcal{F}_a(t) N_a] x(t) + [D + M_d \mathcal{F}_d(t) N_d] \omega(t) \\ &+ Bu(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (4.41)$$

trong đó $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T \in \mathbb{R}^3$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^2$ là điều khiển đầu vào, $\omega(t) \in \mathbb{R}$ là véc tơ nhiễu,

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \\ M_a &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, M_d = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ 0.7 \end{bmatrix}, \\ N_a &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & -0.5 \end{bmatrix}, \mathcal{F}_a(t) = \sin t, N_d = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \mathcal{F}_d(t) = \cos t. \end{aligned}$$

Với $u(t) = [K + M_k \mathcal{F}_k(t) N_k] x(t)$ trong đó $M_k = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$, $N_k = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{F}_k(t) = \cos t$ thì hệ (4.41) được đưa về hệ sau

$$\begin{cases} E_0^C D_t^{0.8} x(t) &= [A + BK + M_a \mathcal{F}_a(t) N_a + BM_k \mathcal{F}_k(t) N_k] x(t) \\ &+ [D + M_d \mathcal{F}_d(t) N_d] \omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (4.42)$$

Hàm chi phí liên kết với hệ (4.41) được xác định bởi công thức (4.3) với các ma trận

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Cho trước các số $c_1 = 1, c_2 = 9, T_f = 30$ và $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Xét hệ (4.41). Sử

dụng câu lệnh svd trong MATLAB, ta tính được các ma trận U_1, U_2, V_1, V_2 và Σ_r

trong Định lý 4.1.6 như sau

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tiến hành tính toán với LMI Control Toolbox trong MATLAB, các điều kiện (4.33a), (4.33b) và (4.33c) thỏa mãn với $\delta = 1.0159, \theta = 1.0339, \beta = 1.1988, \gamma = 1.2260, \mu_1 = 0.2220, \mu_2 = 1.5746,$

$$\hat{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} 0.7841 & -0.0202 \\ -0.0202 & 0.6787 \end{bmatrix}, \hat{\mathcal{Z}} = \begin{bmatrix} -0.0735 \\ 0.4615 \\ 0.7210 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -0.0001 & 0.1079 \\ 0.0927 & -0.8564 \\ 0.2857 & 0.5997 \end{bmatrix}.$$

Theo Định lý 4.1.6, hệ đóng (4.42) bị chặn trong thời gian hữu hạn theo bộ $(1, 9, 30, I, 0.01)$ và giá trị đảm bảo chi phí là $J^* = 0.7274 + 3.1858\|x_0\|^2$. Ngoài ra, ma trận phản hồi trạng thái được xác định bởi

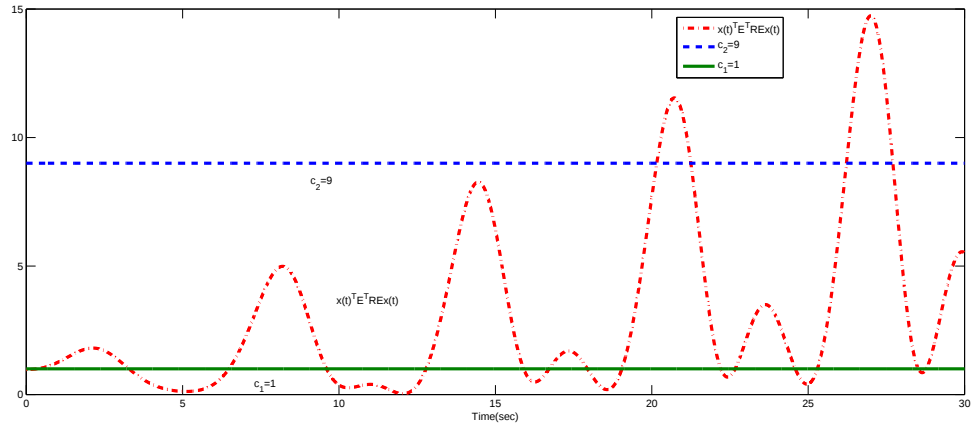
$$K = \begin{bmatrix} 0.0336 & -0.1319 & 0.3963 \\ 0.1686 & -1.8224 & 0.8318 \end{bmatrix}.$$

Trong kết quả mô phỏng, chúng tôi chọn điều kiện đầu $x_0 = (0.7, 0.7, 0.7)^T \in \mathbb{R}^3$ và nhiễu $\omega(t) = 0.1 \sin t$. Hình 4.1 minh họa phản hồi của $x^T(t)E^T R E x(t)$ của hệ (4.41) khi không có điều khiển đầu vào. Hệ mở không thỏa mãn các điều kiện bị chặn trong thời gian hữu hạn vì không thỏa mãn Định nghĩa 4.1.3. Hình 4.2 mô tả quỹ đạo theo thời gian của $x^T(t)E^T R E x(t)$ của hệ đóng (4.42). Từ Hình 4.2, ta thấy rằng hệ đóng (4.42) bị chặn trong thời gian hữu hạn tương ứng với $(1, 9, 30, I, 0.01)$.

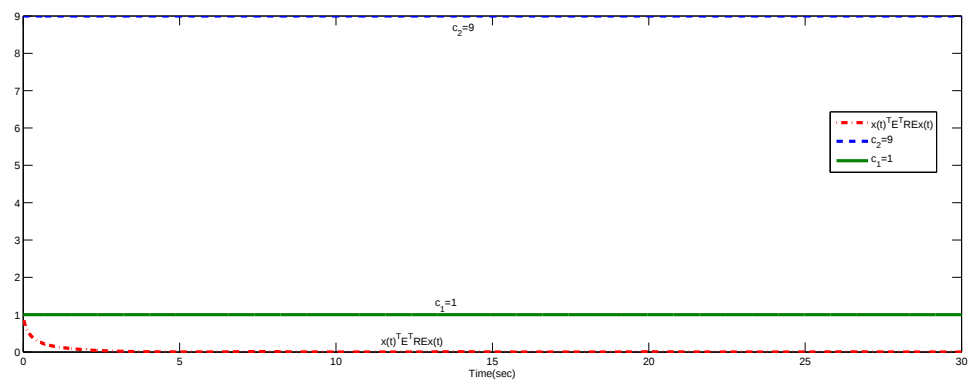
Ví dụ 4.2.2. Xét mô hình bậc phân thứ của mạch điện sau đây [38]

$$\begin{cases} E_0^C D_t^{0.2} x(t) = Ax(t) + D\omega(t) + Bu(t), t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.43)$$

trong đó $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T \in \mathbb{R}^3$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^2$ là véc tơ



Hình 4.1: Quỹ đạo của $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ mở trong Ví dụ 4.2.1



Hình 4.2: Quỹ đạo của $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ đóng trong Ví dụ 4.2.1

điều khiển đầu vào, $\omega(t) \in \mathbb{R}$ là nhiễu,

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Với hàm điều khiển bền vững $u(t) = [K + M_k \mathcal{F}_k(t) N_k]x(t)$, trong đó ma trận $M_k = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$, $N_k = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$ và $\mathcal{F}_k(t) = \sin t$ thì hệ (4.43) được đưa về hệ

$$\begin{cases} E_0^C D_t^{0.2} x(t) &= [A + BK + BM_k \mathcal{F}_k(t) N_k]x(t) + D\omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (4.44)$$

Hàm chi phí kết hợp với hệ (4.43) được xác định theo công thức (4.3) với các ma trận

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Cho trước $c_1 = 1, c_2 = 8, T_f = 10$ và $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Xét hệ điều khiển (4.43).

Sử dụng lệnh svd trong MATLAB, các ma trận U_1, U_2, V_1, V_2 và Σ_r trong Hệ quả 4.1.9 được xác định như sau

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0.0531 & -0.9986 \\ 0.9986 & 0.0531 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, V_1 = \begin{bmatrix} 0.0260 & -0.9306 \\ 0.9782 & 0.0990 \\ 0.2060 & -0.3524 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0.3651 \\ 0.1826 \\ -0.9129 \end{bmatrix}.$$

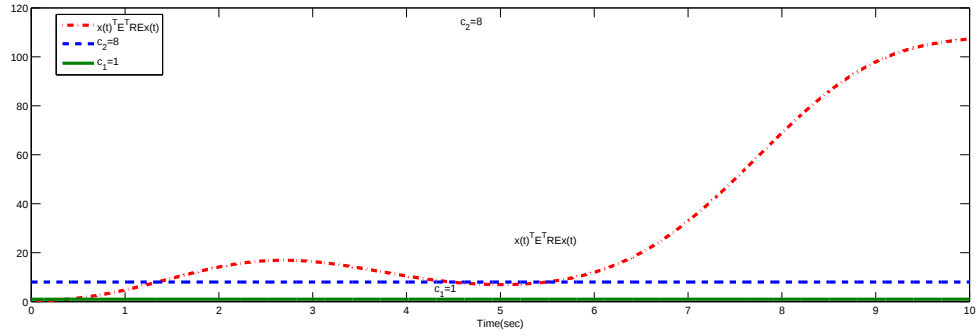
Sử dụng LMI Control Toolbox trong MATLAB, các điều kiện (4.40a), (4.40b) và (4.40c) thỏa mãn với $\theta = 4.9814, \beta = 3.2363, \mu_1 = 3.1410, \mu_2 = 8.6384$,

$$\hat{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} 0.0688 & 0.0052 \\ 0.0052 & 0.1704 \end{bmatrix}, \hat{\mathcal{Z}} = \begin{bmatrix} 0.1635 \\ -0.4863 \\ 0.0752 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -1.0873 & 0.1150 \\ 1.6731 & -0.3913 \\ -0.4765 & -2.0748 \end{bmatrix}.$$

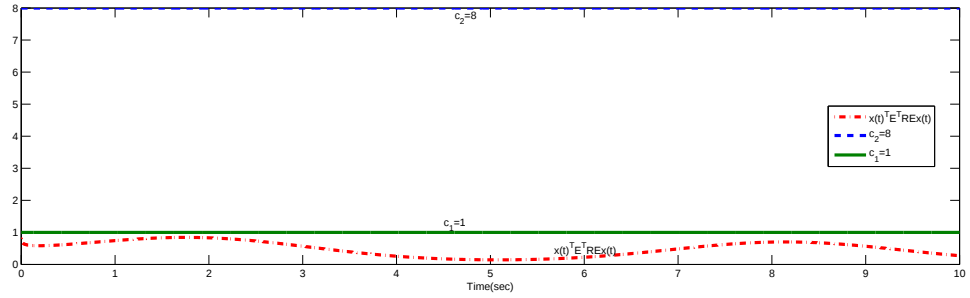
Theo Hệ quả 4.1.9, hệ đóng (4.44) bị chặn trong thời gian hữu hạn tương ứng với

bộ $(1, 8, 10, I, 0.1)$, giá trị đảm bảo chi phí là $J^* = 3.2363 + 98.7746\|x_0\|^2$. Hơn nữa, ma trận phản hồi trạng thái K được xác định bởi

$$K = \begin{bmatrix} -2.3985 & -3.1189 & 5.3601 \\ -5.6491 & -24.0296 & 23.1652 \end{bmatrix}.$$



Hình 4.3: Quỹ đạo của $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ mở trong Ví dụ 4.2.2



Hình 4.4: Quỹ đạo của $x(t)^T E^T R E x(t)$ của hệ đóng trong Ví dụ 4.2.2

Để có kết quả mô phỏng, ta chọn điều kiện đầu $x_0 = (0.08, 0.08, 0.08)^T \in \mathbb{R}^3$ và nhiễu $\omega(t) = \sqrt{0.1} \sin t$. Hình 4.3 biểu diễn phản hồi của $x^T(t) E^T R E x(t)$ của hệ (4.43) khi không có véc tơ điều khiển đầu vào. Hệ mở không bị chặn trong thời gian hữu hạn vì không thỏa mãn Định nghĩa 4.1.3. Hình 4.4 mô tả trạng thái phụ thuộc vào thời gian của $x^T(t) E^T R E x(t)$ của hệ đóng (4.44). Từ Hình 4.4 ta thấy rõ rằng hệ đóng (4.42) bị chặn trong thời gian hữu hạn theo bộ $(1, 8, 10, I, 0.1)$.

Kết luận Chương 4

Chương 4 của luận án tập trung vào nghiên cứu tính bị chặn trong thời gian hữu hạn và giải quyết bài toán FTGCC đối với hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến có tác động của nhiễu. Các kết quả thu được bao gồm:

- Chúng tôi thiết kế hàm điều khiển phản hồi trạng thái bền vững để giải bài toán FTGCC cho lớp hệ phân thứ suy biến có nhiễu.
- Các ví dụ số với mô phỏng được trình bày để minh họa cho kết quả lý thuyết đã đạt được.

Ngoài ra, bài toán nghiên cứu tính ổn định theo nghĩa Lyapunov và GCC cho hệ phân thứ suy biến phức hợp là những vấn đề mới, đòi hỏi các kỹ thuật toán học phức tạp và mở ra nhiều triển vọng trong tương lai.

Kết luận

Luận án nghiên cứu tính chất định tính cho một số lớp hệ phương trình vi phân suy biến với đạo hàm bậc nguyên và đạo hàm bậc phân thứ: Tính ổn định và ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ phương trình suy biến dương có trễ, tính bị chặn trong thời gian hữu hạn của hệ phương trình phân thứ Caputo suy biến có nhiều với thành phần không chắc chắn cùng một số bài toán định tính liên quan trong lý thuyết điều khiển.

Những kết quả mới đã đạt được trong luận án

- Thiết lập được điều kiện đủ để đảm bảo tính ổn định và ổn định hóa được dạng mũ của hệ suy biến dương rời rạc có xung với trễ hằng.
- Thiết lập điều kiện đủ cho tính bị chặn trong thời gian hữu hạn và thiết kế được hàm điều khiển phụ thuộc véc tơ trạng thái cho bài toán tiêu hao hóa trong thời gian hữu hạn của hệ phân thứ Caputo suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía.
- Thiết lập điều kiện đủ cho tính bị chặn trong thời gian hữu hạn và thiết kế được hàm điều khiển bền vững cho bài toán FTGCC của hệ phân thứ Caputo suy biến có nhiều.

Luận án đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo liên quan đến các vấn đề định tính:

- Nghiên cứu bài toán ổn định và ổn định hóa cho lớp hệ phân thứ suy biến dương rời rạc có trễ.
- Nghiên cứu bài toán ổn định theo nghĩa Lyapunov và một số bài toán điều khiển liên quan cho các lớp hệ phân thứ suy biến có trễ.
- Nghiên cứu bài toán ổn định và bị chặn trong thời gian hữu hạn cùng một số bài toán điều khiển liên quan cho các lớp hệ phân thứ suy biến phức hợp.

Các công trình đã công bố liên quan đến luận án

- (CT1) N.H. Sau, M.V. Thuan, N.T. Phuong (2024), “Exponential stability for discrete-time impulsive positive singular system with time delays”, *International Journal of Systems Science*, **55**(8), 1510–1527 (SCIE/Q1).
- (CT2) N.T. Phuong, N.H. Sau, M.V. Thuan (2023), “Finite-time dissipative control design for one-sided Lipschitz nonlinear singular Caputo fractional order systems”, *International Journal of Systems Science*, **54**(8), 1694–1712 (SCIE/Q1).
- (CT3) N.T. Phuong, N.H. Sau, M.V. Thuan, N.H Muoi (2023), “Non-fragile finite-time guaranteed cost control for a class of singular Caputo fractional order systems with uncertainties”, *Circuits, Systems, Signal Processing*, **43**, 795–820 (SCIE/Q2).

Tài liệu tham khảo

I. Tài liệu Tiếng Việt

- [1] Vũ Ngọc Phát (2001), *Nhập môn lý thuyết điều khiển Toán học*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.
- [2] Nguyễn Hữu Sáu (2017), *Tính ổn định của hệ động lực tuyến tính suy biến có trễ*, Luận án Tiến sĩ toán học, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

II. Tài liệu Tiếng Anh

- [3] M. Abbaszadeh, H.J. Marquez (2010), “Nonlinear observer design for one-sided Lipschitz systems”, *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, Baltimore, USA, 5284–5289.
- [4] M.U. Akhmet, M. Beklioglu, T. Ergenc, V.I. Tkachenko (2006), “An impulsive ratio-dependent predator–prey system with diffusion”, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **7**(5), 1255–1267.
- [5] F. Amato, M. Ariola, P. Dorato (2001), “Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances”, *Automatica*, **37**, 1459–1463.
- [6] A. Berman, R.J. Plemmons (1994), *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, SIAM, Philadelphia.
- [7] S. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan (1994), *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia.
- [8] C. Briat (2013), “Robust stability and stabilization of uncertain linear positive systems via integral linear constraints: L_1 –gain and L_∞ –gain characterization”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **23**(17), 1932–1954.

- [9] C. Briat (2017), “Dwell-time stability and stabilization conditions for linear positive impulsive and switched systems”, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **24**, 198–226.
- [10] S. Bushnaq, T. Saeed, D.F.M. Torres, A. Zeb (2021), “Control of COVID-19 dynamics through a fractional-order model”, *Alexandria Engineering Journal*, **60**(4), 3587–3592.
- [11] F. Cacace, L. Farina, R. Setola, A. Germani (2016) *Positive Systems: Theory and Applications*, Rome, Italy, Springer.
- [12] S.L. Campbell (1980), *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman, London.
- [13] L.C. Cardoso, F.L.P. Dos Santos, R.F. Camargo (2018), “Analysis of fractional-order models for hepatitis B”, *Computational and Applied Mathematics*, **37**, 4570–4586.
- [14] S. Chang, T. Peng (1972), “Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **17**(4), 474–483.
- [15] X.H. Chang, L. Zhang, J.H. Park (2015), “Robust static output feedback H_∞ control for uncertain fuzzy systems”, *Fuzzy Sets and Systems*, **273**, 87–104.
- [16] V. Chellaboina, S.P. Bhat, W.M. Haddad, D.S. Bernstein (2009), “Modeling and analysis of mass-action kinetics”, *IEEE Control Systems Magazine*, **29**(4), 60–78.
- [17] Y. Chen, Y. Bo, B. Du (2019), “Positive L_1 -filter design for continuous-time positive Markov jump linear systems: Full-order and reduced-order”, *IET Control Theory and Applications*, **13**(12), 1855–1862.
- [18] W.C. Chen (2008), “Nonlinear dynamics and chaos in a fractional-order financial system”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **36**(5), 1305–1314.
- [19] L. Chen, H. Yin, H. Wu, L. Yin, Y. Chen (2019), “Robust dissipativity and dissipation of a class of fractional-order uncertain linear systems”, *IET Control Theory and Applications*, **13**, 1454–1465.

- [20] G. Chen, J. Yang, X. Zhou (2022), “Finite-time dissipative control for discrete-time stochastic delayed systems with Markovian switching and interval parameters”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **110**, 106352.
- [21] L. Dai (1989), *Singular Control Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer, Berlin.
- [22] D. Debeljković, D.H. Owens (1985), “On Practical Stability of Singular Systems”, *Proceedings of the Melecon Conference*, Madrid, Spain, **2**, 103-105.
- [23] K. Diethelm (2010), *The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin.
- [24] P. Dorato (1961), “Short time stability in linear time-varying systems”, *In: Proceedings of the IRE International Convention Record*, **4**, 83-87.
- [25] P. Dorato (2006), *An Overview of Finite-Time Stability*, In: Current Trends in Nonlinear Systems and Control, Springer, Berlin.
- [26] P. Dorato, C.T. Abdallah, D. Famularo (1997), *Robust Finite-time Stability Design via Linear Matrix Inequalities*, In: Proceedings of the 36th, Conference on Decision and Control, San Diego, California, USA.
- [27] L. Farina, S. Rinaldi (2000), *Positive Linear Systems*, John Wiley and Sons, New York.
- [28] Z. Feng, J. Lam, H. Gao (2011), “ α -dissipativity analysis of singular time-delay systems”. *Automatica*, **47**(11), 2548–2552.
- [29] G.H. Golub, C.F.V. Loan (1996), *Matrix Computations*, Johns Hop-kins University Press, Baltimore.
- [30] V. Gokulakrishnan, R. Srinivasan, M.S. Ali, G. Rajchakit (2023), “Finite-time guaranteed cost control for stochastic nonlinear switched systems with time-varying delays and reaction-diffusion”, *International Journal of Computer Mathematics*, **100**(5), 1031–1051.

- [31] L.V. Hien, H.M. Trinh, P.N. Pathirana (2020), “On l_1 -gain control of 2 – D positive Roesser systems with directional delays: Necessary and sufficient conditions”, *Automatica*, **112**, 108720.
- [32] D.J. Hill, P.J. Moylan (1976), “The stability of nonlinear dissipative systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **21**(5), 708-711.
- [33] D.T. Hong, N.H. Sau, M.V. Thuan (2022a), “New criteria for dissipativity analysis of fractional-order static neural networks”, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **41**(4), 2221–2243.
- [34] D.T. Hong, N.H. Sau, M.V. Thuan (2022b), “Output feedback finite-time dissipative control for uncertain nonlinear fractional-order systems”, *Asian Journal of Control*, **24**(5), 2284–2293.
- [35] M. Hu, J. Xiao, X. Xiao, W. Chen (2017), “Impulsive effects on the stability and stabilization of positive systems with delays”, *Journal of the Franklin Institute*, **354**(10), 4034–4054.
- [36] S. Jiao, H. Shen, Y. Wei, X. Huang, Z. Wang (2018), “Further results on dissipativity and stability analysis of Markov jump generalized neural networks with time-varying interval delays”, *Applied Mathematics and Computation*, **336**, 338–350.
- [37] N.A. Kablar, D. Debeljkovic (1998), “Finite-time stability of timevarying linear singular systems”, Proceedings of the 37th IEEE, Conference on Decision & Control, Tampa, Floria USA.
- [38] T. Kaczorek (2011), *Selected Problems of Fractional Systems Theory*, Springer, Berlin.
- [39] T. Kaczorek (2019), “An extension of the Cayley-Hamilton theorem to different orders fractional linear systems and its application to electrical circuits”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, **66**(7), 1169–1171.
- [40] T. Kaczorek, K. Borawski (2021), *Descriptor Systems of Integer and Fractional Orders*, Springer, Berlin.

- [41] H. Kheiri, M. Jafari (2019), “Fractional optimal control of an HIV/AIDS epidemic model with random testing and contact tracing”, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **60**(1-2), 387–411.
- [42] A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo (2006), *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, Elsevier, New York.
- [43] M.P. Lazarevic, D.L. Debeljkovic (2005), “Finite time stability analysis of linear autonomous fractional order systems with delayed state”, *Asian Journal of Control*, **7**(4), 440–447.
- [44] J. Lam, S. Xu (2006), *Robust Control and Filtering of Singular Systems*, Springer, Berlin.
- [45] P.H. Leslie (1945), “On the use of matrices in certain population mathematics”, *Biometrika*, **33**(3), 183–212.
- [46] B. Li, S. Wo, J. Zhao, X. Ren (2019), “Finite-time guaranteed cost controller design for uncertain linear continuous-time singular systems”, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, **14**(12).
- [47] M. Li, L. Sun, R. Yang (2018), “Finite-time H_∞ control for a class of discrete-time nonlinear singular systems”, *Journal of the Franklin Institute*, **355**(13), 5384–5393.
- [48] Z. Li, J. Wang, H. Shao (2002), “Delay-dependent dissipative control for linear time-delay systems”, *Journal of the Franklin Institute*, **339**, 529–542.
- [49] L. Liu, H. Xing, X. Cao, Z. Fu, S. Song (2018), “Guaranteed cost finite-time control of discrete-time positive impulsive switched systems”, *Complexity*, 5790681.
- [50] X. Liu, W. Yu, L. Wang (2009), “Stability analysis of positive systems with bounded time-varying delays”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part II: Express Briefs*, **56**, 600–604.
- [51] X. Liu (1994), “Stability results for impulsive differential systems with applications to population growth models”, *Dynamics and Stability of Systems*, **9**(2), 163–174.

- [52] L. Liu, Y. Di, Y. Shang, Z. Fu, B. Fan (2021), “Guaranteed cost and finite-time non-fragile control of fractional-order positive switched systems with asynchronous switching and impulsive moments”, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **40**, 3143–3160.
- [53] D.G. Luenberger, A. Arbel (1977), “Singular dynamic Leontief systems”, *Econometrica*, **45**, 991-995.
- [54] Z. Lu, Y. Yu, Y. Chen, G. Ren, C. Xu, S. Wang, Z. Yin (2020), “A fractional-order SEIHDR model for COVID-19 with inter-city networked coupling effects”, *Nonlinear Dynamics*, **101**(3), 1717–1730.
- [55] Y. Ma, M. Chen (2016), “Finite time non-fragile dissipative control for uncertain TS fuzzy system with time-varying delay”, *Neurocomputing*, **177**, 509–514.
- [56] Y. Ma, X. Jia, D. Liu (2018), “Finite-time dissipative control for singular discrete-time Markovian jump systems with actuator saturation and partly unknown transition rates”, *Applied Mathematical Modelling*, **53**, 49–70.
- [57] Y. Ma, B. Wu, Y. Wang (2016), “Finite-time stability and finite-time boundedness of fractional order linear systems”, *Neurocomputing*, **173**, 2076-2082.
- [58] P.C. Muller(1993), “Stability of linear mechanical systems with holonomic constraints”, *Applied Mechanics Reviews*, **46**, 160-164.
- [59] P.T. Nam, P.N. Pathirana, H. Trinh (2016), “Partial state bounding with a pre-specified time of non-linear discrete systems with time-varying delays”, *IET Control Theory and Applications*, **10**(13), 1496–1502.
- [60] P. Niamsup, K. Ratchagit, V.N. Phat (2015), “Novel criteria for finite-time stabilization and guaranteed cost control of delayed neural networks”, *Neurocomputing*, **160**, 281–286.
- [61] P. Niamsup, N.T. Thanh, V. N. Phat (2022), “Finite-time H_∞ control of linear singular fractional differential equations with time-varying delay”, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **39**(2), 773–788.
- [62] I.R Petersen (1987), “A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems”, *Systems and Control Letters*, **8**(4), 351–357.

- [63] I.R. Petersen, D.C. McFarlane (1994), “Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**(9), 1971 - 1977.
- [64] V.N. Phat, N.H. Sau (2018), “Exponential stabilisation of positive singular linear discrete-time delay systems with bounded control”, *IET Control Theory and Applications*, **13**(7), 905–911.
- [65] J. Ren, F. Li, J. Fu (2020), “Robust observer-based finite-time H_∞ control for one-sided Lipschitz singular systems with uncertainties”, *IET Control Theory and Applications*, **14**(16), 2319-2328.
- [66] N.H. Sau, V.N Phat (2018), “LP approach to exponential stabilization of singular linear positive time-delay systems via memory state feedback”, *Journal of Industrial and Management Optimization*, **14**(2), 583–596.
- [67] N.H. Sau, M.V. Thuan (2023), “Impulsive stability for positive linear differential-algebraic equations with time-varying delay”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **68**(12), 7943-7950.
- [68] L.F. Shampine, P. Gahinet(2006), “Delay-differential-algebraic equations in control theory”, *Applied Numerical Mathematics*, **56**, 574–588.
- [69] Y. Shang, L. Liu, Y. Di, Z. Fu, B. Fan (2021), “Guaranteed cost and finite-time event-triggered control of fractional-order switched systems”, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, **43**(12), 2724–2733.
- [70] R.J. Smith, L.M. Wahl (2005), “Drug resistance in an immunological model of HIV-1 infection with impulsive drug effects”, *Bulletin of Mathematical Biology*, **67**(4), 783–813.
- [71] N.T. Thanh, V.N. Phat (2018), “Switching law design for finite-time stability of singular fractional-order systems with delay”, *IET Control Theory and Applications*, **13**(9), 1367–1373.
- [72] N.T. Thanh, M.V. Thuan, T.N. Tuan (2023), “New results on finite-time guaranteed cost control of uncertain polytopic fractional-order systems with time-varying delays”, *Optimal Control Applications and Methods*, **44**(5), 2504-2516.

- [73] M.V. Thuan, T.N. Binh, D.C. Huong (2020), “Finite-time guaranteed cost control of Caputo fractional-order neural networks”, *Asian Journal of Control*, **22**(2), 696–705.
- [74] M.V. Thuan, P. Niamsup, V.N. Phat (2020), “Finite-time control analysis of nonlinear fractional-order systems subject to disturbances”, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **44**, 1425–1441.
- [75] H.T. Tuan, H. Trinh (2018), “Stability of fractional-order nonlinear systems by Lyapunov direct methods”, *IET Control Theory and Applications*, **12**(17), 2417–2422.
- [76] G. Tzounas, I. Dassios, M.A.A. Murad, F. Milano (2020), “Theory and implementation of fractional order controllers for power system applications”, *IEEE Transactions on Power Systems*, **35**(6), 4622–4631.
- [77] Y. Wang, J. Zhang, M. Liu (2014), “Exponential stability of impulsive positive systems with mixed time-varying delays”, *IET Control Theory and Applications*, **8**(15), 1537–1542.
- [78] J.C. Willems (1972), “Dissipative dynamical systems-part 1: general theory”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **45**, 321–351.
- [79] S. Xu, J. Lam (2006), *Robust Control and Filtering of Singular Systems*, Springer, Berlin.
- [80] Y. Q. Xue, P. Zhao (2023), “Input-to-state consensus of nonlinear positive multi-agent systems under state feedback and impulsive control”, *International Journal of Control*, *Automation and Systems*, **21**, 2099–2111.
- [81] T. Zhan, S.P. Ma (2018), “The controller design for singular fractional-order systems with fractional order $0 < \alpha < 1$ ”, *The ANZIAM Journal*, **60**(2), 230–248.
- [82] Q.H Zhang, J.G Lu, Y.D Ma, Y. Q. Chen (2021), “Time domain solution analysis and novel admissibility conditions of singular fractional-order systems”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, **68**(2), 842–855.

- [83] L. Zhang, B. Huang, J. Lam (2003), “LMI synthesis of H_2 and mixed H_2/H_∞ controllers for singular systems”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing*, **50**(9), 615–626.
- [84] Z. Zhang, W. Jiang (2011), “Some results of the degenerate fractional differential system with delay”, *Computers and Mathematics with Applications*, **62**(3), 1284–1291.
- [85] Y. Zhang, P. Shi, S.K Nguang, Y. Song (2014), “Robust finite-time H_∞ control for uncertain discrete-time singular systems with Markovian jumps”, *The Institution of Engineering and Technology*, **8**(12), 1105-1111.
- [86] G. Zhang, Q. Zhu (2022), “Finite-time guaranteed cost control for uncertain delayed switched nonlinear stochastic systems”, *Journal of the Franklin Institute*, **359**(16), 8802–8818.
- [87] Y. Zhang (2012), “Exponential stability of impulsive discrete systems with time delays”, *Applied Mathematics Letters*, **25**(12), 2290–2297.
- [88] J. Zhang, Y. Wang, J. Xiao, Z. Guan (2014), “Stability analysis of impulsive positive systems”, *IFAC Proceedings Volumes*, **47**(3), 5987–5991.
- [89] A. Zulfiqar, M. Rehan, M. Abid (2016), “Observer design for one-sided Lipschitz descriptor systems”, *Applied Mathematical Modelling*, **40**(3), 2301–2311.