

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

**TÍNH CHẤT ĐỊNH TÍNH CỦA MỘT SỐ
LỚP HỆ SUY BIẾN VỚI ĐẠO HÀM
BẬC NGUYÊN VÀ BẬC PHÂN THỨ**

Ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 9 46 01 12

**BẢN TÓM TẮT
LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC**

Thái Nguyên – 2025

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Tập thể hướng dẫn khoa học:

Phản biện 1:
.....

Phản biện 2:
.....

Phản biện 3:
.....

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án cấp Đại học Thái Nguyên họp tại:

vào hồi giờ ngày tháng năm

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia
- Thư viện của Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên
- Trung tâm Số, Đại học Thái Nguyên

Mở đầu

Giải tích phân thứ, với hai phép toán cơ bản là đạo hàm và tích phân bậc thực hoặc phức tùy ý, được xem như một sự mở rộng và tổng quát hóa các khái niệm trong giải tích cổ điển. Có nhiều loại đạo hàm phân thứ khác nhau đã được xây dựng tùy thuộc vào cách người ta tổng quát hóa đạo hàm bậc n cho trường hợp n không nguyên như đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, đạo hàm Caputo, đạo hàm Hadamard, đạo hàm Grünwald–Letnikov, đạo hàm Marchaud...

Khi quá trình mô hình hóa kết hợp cả phương trình vi phân và phương trình đại số, kết quả thu được là một hệ phương trình vi phân suy biến. Tính ổn định là một trong những đặc tính định tính quan trọng, luôn được chú trọng khi nghiên cứu và phân tích các hệ động lực. Trong bài toán ổn định của hệ phương trình suy biến, hai hướng nghiên cứu chính thường được đề cập là tính ổn định theo nghĩa Lyapunov và tính ổn định trong thời gian hữu hạn. Tính ổn định theo nghĩa Lyapunov nghiên cứu quỹ đạo của véc tơ trạng thái trong thời gian vô hạn, tập trung đưa ra các điều kiện để đảm bảo hệ thống quay về trạng thái cân bằng trong thời gian vô hạn. Trong khi đó, tính ổn định trong thời gian hữu hạn nhấn mạnh đến việc hệ thống duy trì trạng thái ổn định trong một khoảng thời gian cụ thể. Việc nghiên cứu các tính chất định tính của hệ phương trình vi phân suy biến gặp nhiều thách thức hơn so với hệ phương trình vi phân thường. Nghiệm của hệ suy biến không phải lúc nào cũng tồn tại, ngay cả khi xét trường hợp hệ tuyến tính.

Trong lý thuyết điều khiển, ta thường gặp hệ dương, hệ mà trạng thái và đầu ra luôn không âm khi điều kiện ban đầu không âm. Khi hệ có sự thay đổi trạng thái đột ngột tại những thời điểm cụ thể, thường được gây ra bởi các nhiễu hoặc xung tức thời ta thu được hệ dương có xung. Như đã biết, độ trễ theo thời gian là một yếu tố xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật và chúng thường là nguyên nhân làm suy giảm hiệu suất hoặc gây mất ổn định cho hệ thống. Theo hiểu biết của chúng tôi, bài toán ổn định mũ cho hệ suy biến dương có xung rời rạc với trễ theo thời gian vẫn chưa được quan tâm và nghiên cứu sâu rộng.

Trong thực tế, việc giám sát và điều chỉnh đáng điệu của véc tơ trạng thái được mô tả bởi hệ phương trình vi phân trong một khoảng thời gian xác định là quan

trọng. Đến năm 1961, P. Dorato đã công bố một vài kết quả nghiên cứu bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn và sau đó vấn đề này đã nhận được sự chú ý rộng rãi từ giới nghiên cứu lý thuyết điều khiển. Một hệ phương trình vi phân có nhiều được gọi là bị chặn trong thời gian hữu hạn nếu với điều kiện ban đầu không vượt quá một ngưỡng nhất định và nhiều nằm trong một miền xác định thì vec tơ trạng thái của hệ luôn duy trì trong một phạm vi giới hạn khác trong một khoảng thời gian hữu hạn.

Hiệu suất của hệ động lực thường được biểu thị qua mối tương quan giữa các tham số đầu vào và đầu ra, giúp đánh giá khả năng tối ưu hóa của hệ thống trong việc đáp ứng các yêu cầu vận hành. Từ đây, một số bài toán định tính quan trọng khác cho hệ phương trình vi phân bậc nguyên và bậc phân thứ suy biến được đề xuất nghiên cứu như bài toán tiêu hao, bài toán đảm bảo chi phí điều khiển (GCC), bài toán điều khiển hỗn hợp H_∞ và thụ động, . v.v.

Được giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1972 bởi J.C. Willems, lý thuyết tiêu hao cung cấp một phương pháp hiệu quả trong việc phân tích tính ổn định và thiết kế hệ điều khiển. Một trong những tính chất quan trọng của hệ động lực tiêu hao là năng lượng tổng chứa trong hệ luôn giảm theo thời gian. Với công cụ là lý thuyết Lyapunov cùng sự hỗ trợ của kỹ thuật bất đẳng thức ma trận tuyến tính, đã có nhiều công bố đáng chú ý về bài toán tiêu hao cho các loại hệ động lực khác nhau.

Trong lý thuyết điều khiển, một trong những mục tiêu chính khi thiết kế hệ thống là tối ưu hóa một số tiêu chí hiệu suất, thường được gọi là “chi phí”. Ngoài việc nghiên cứu tìm các điều kiện để hàm điều khiển đảm bảo không chỉ tính ổn định của hệ thống mà điều khiển đó còn đáp ứng đầy đủ các yêu cầu về hiệu suất hoạt động. Ý tưởng về GCC được S.S.L. Chang giới thiệu năm 1969. Sau đó, năm 1972, S.S.L Chang và T.K.C Keng lần đầu tiên đưa ra bài toán điều khiển tối ưu cùng hàm chi phí điều khiển của hệ. Với công cụ là lý thuyết Lyapunov cùng sự hỗ trợ của phương pháp bất đẳng thức ma trận tuyến tính, đã có nhiều công bố đáng chú ý về bài toán kiểm soát chi phí điều khiển của các lớp hệ động lực.

Mặc dù đã có nhiều kết quả nghiên cứu đối với hệ phương trình vi phân suy biến với đạo hàm bậc nguyên và bậc phân thứ được công bố trong thời gian qua, tuy nhiên theo tìm hiểu của chúng tôi, nhiều bài toán định tính quan trọng cho các hệ phương trình vi phân suy biến vẫn chưa được nghiên cứu đầy đủ. Bài toán phân tích tính ổn định mũ cho các hệ suy biến có xung rời rạc với trễ theo thời gian là vấn đề phức tạp và vẫn còn nhiều thách thức kỹ thuật cần được giải quyết. Các nghiên cứu về bài toán tiêu hao và bài toán đảm bảo giá trị điều khiển tập trung vào các hệ với đạo hàm bậc nguyên, một số kết quả cho hệ phương trình vi phân

phân thứ, rất ít công trình nghiên cứu được công bố cho lớp hệ phân thứ suy biến. Phương pháp được các nhà nghiên cứu hay sử dụng cho các hệ với đạo hàm bậc nguyên chủ yếu thông qua việc thiết lập các hàm Lyapunov-Krasovskii phù hợp. Phương pháp này không dễ dàng mở rộng cho các hệ phương trình phân thứ suy biến vì khó khăn trong việc xây dựng hàm Lyapunov phù hợp và quá trình tính toán đạo hàm phân thứ của nó. Chính từ các phân tích nêu trên, chúng tôi chọn đề tài về tính chất định tính của một số hệ suy biến với các bài toán định tính lớn là nghiên cứu tính ổn định và ổn định hóa được dạng mũ cho hệ suy biến có xung rời rạc với trễ hằng, bài toán FTDC cho lớp hệ phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía với thành phần không chắc chắn và bài toán FTGCC cho lớp hệ phân thứ suy biến phi tuyến có nhiễu.

Trong luận án này, trước hết chúng tôi đề xuất và nghiên cứu hệ phương trình vi phân suy biến rời rạc có xung và trễ theo thời gian sau

$$\begin{cases} Ex(t+1) = Ax(t) + A_dx(t-h), \quad t \neq t_m - 1, \\ \mathbf{x}_1(t_m) = H\mathbf{x}_1(t_m - 1), m \in \mathbb{Z}^+, \\ x(s) = \eta(s), s \in \{-h, -h+1, \dots, 0\}, \end{cases}$$

trong đó $x(\cdot) := (\mathbf{x}_1(\cdot), \mathbf{x}_2(\cdot))$, $\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^r$ và $\mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$ là véc tơ trạng thái. Ma trận $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ suy biến với $\text{rank}(E) = r < n$. A, A_d, H là các ma trận hằng đã biết với số chiều phù hợp. Hằng số trễ $h \in \mathbb{N}^*$ và $\eta : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ là hàm điều kiện ban đầu. Dãy xung $\{t_m\}_{m=1}^\infty$ thỏa mãn $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \dots, t_m \rightarrow \infty$ với $m \rightarrow \infty$. Kết quả chúng tôi đưa ra trong luận án là điều kiện đủ để giải quyết bài toán ổn định và bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ suy biến dương rời rạc có xung và có trễ theo thời gian.

Trong luận án, lớp hệ tiếp theo được nghiên cứu là hệ phân thứ Caputo suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía với tham số không chắc chắn

$$\begin{cases} E {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t)F(t, x(t)) + Bu(t), t \geq 0, \\ z(t) = [C + \Delta C(t)]x(t) + W\omega(t), t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

trong đó $\alpha \in (0, 1)$ là bậc phân thứ của hệ, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển đầu vào, $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ là nhiễu đầu vào cho trước, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ là véc tơ đầu ra, x_0 là điều kiện đầu. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{n \times q}$ và $W \in \mathbb{R}^{p \times q}$ là các ma trận hằng số đã biết. $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận suy biến với $\text{rank}(E) = r < n$. Các ma trận $\Delta A(t), \Delta C(t), \Delta D(t)$ thay đổi theo thời gian và

nhiều $\omega(.) \in L^2([0, +\infty), \mathbb{R}^q)$ đáp ứng điều kiện sau

$$\exists d > 0 : \sup_{t \geq 0} \omega^T(t) \omega(t) \leq d, \forall t \in [0, T_f].$$

Luận án thu được kết quả quan trọng là thiết kế hàm điều khiển phản hồi trạng thái đảm bảo tính FTDC cho lớp hệ phân thứ Caputo suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía với các tham số không chắc chắn.

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu bài toán FTGCC của lớp hệ phân thứ Caputo suy biến

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t) + Bu(t), t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

trong đó các giả thiết về các ma trận và hàm nhiễu tương tự như trong kết quả thứ 2. Kết quả cuối cùng trong luận án là thiết kế được hàm điều khiển bền vững cho bài toán FTGCC của lớp hệ phân thứ Caputo suy biến có nhiễu.

Trong luận án này, chúng tôi đặt mục tiêu giải quyết các vấn đề sau:

- Nghiên cứu tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ của lớp hệ suy biến dương rời rạc có xung và có trễ với đạo hàm bậc nguyên.
- Nghiên cứu tính bị chặn trong thời gian hữu hạn cho hệ phân thứ Caputo suy biến Lipschitz một phía với tham số không chắc chắn và xây dựng hàm điều khiển phản hồi trạng thái cho bài toán điều khiển FTDC cho lớp hệ đang xét.
- Nghiên cứu thiết kế hàm điều khiển phản hồi trạng thái bền vững cho lớp hệ phân thứ Caputo suy biến với tham số không chắc chắn bị chặn trong thời gian hữu hạn và thỏa mãn điều kiện đảm bảo chi phí điều khiển.

Luận án được trình bày trong bốn chương, cụ thể:

Chương 1: Cơ sở toán học.

Chương 2: Bài toán ổn định và ổn định hóa được dạng mũ cho hệ suy biến dương rời rạc có xung với trễ hằng.

Chương 3: Tính tiêu hao hóa trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía.

Chương 4: Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến có nhiễu.

Chương 1

Cơ sở toán học

Chương này nhắc lại một số kiến thức toán học cơ bản là cơ sở để trình bày kết quả của các chương sau. Nội dung của Chương 1 gồm: Một số kiến thức cơ sở của giải tích phân thứ, nghiệm của hệ phương trình vi phân suy biến, bài toán ổn định và ổn định hóa được dạng mũ, bài toán bị chặn trong thời gian hữu hạn, các bài toán điều khiển liên quan như bài toán tiêu hao, bài toán GCC và một số bổ đề bổ trợ được sử dụng để chứng minh các kết quả chính của luận án.

- 1.1 Một số kiến thức cơ bản về tích phân và đạo hàm phân thứ
- 1.2 Bài toán ổn định của hệ phương trình vi phân suy biến rời rạc có trễ
- 1.3 Hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến
- 1.4 Bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn
- 1.5 Bài toán tiêu hao của hệ động lực
- 1.6 Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển
- 1.7 Một số bổ đề bổ trợ

Chương 2

Bài toán ổn định và ổn định hóa được dạng mũ cho hệ suy biến dương rời rạc có xung với trễ hằng

Chương này tập trung nghiên cứu tính ổn định của hệ phương trình vi phân suy biến dương rời rạc với tác động xung và trễ không biến thiên. Chúng tôi đưa ra các điều kiện đủ giải quyết tính ổn định mũ và thiết kế hàm điều khiển cho bài toán ổn định hóa được dạng mũ của hệ suy biến dương rời rạc có xung và trễ theo thời gian. Nội dung của chương này được trình bày dựa trên bài báo (CT1) trong danh mục các công trình khoa học đã công bố của tác giả.

2.1 Tính ổn định dạng mũ cho hệ suy biến dương rời rạc có xung với trễ theo thời gian

Xét hệ phương trình vi phân suy biến rời rạc có xung sau

$$\begin{cases} Ex(t+1) &= Ax(t) + A_dx(t-h), \quad t \neq t_m - 1, \\ \mathbf{x}_1(t_m) &= H\mathbf{x}_1(t_m - 1), \quad m \in \mathbb{Z}^+, \\ x(s) &= \eta(s), \quad s \in \{-h, -h+1, \dots, 0\}, \end{cases} \quad (2.1)$$

trong đó $x(\cdot) := (\mathbf{x}_1(\cdot), \mathbf{x}_2(\cdot))$, $\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^r$ và $\mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$ là véc tơ trạng thái. Ma trận $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ suy biến với $\text{rank}(E) = r < n$. A, A_d là các ma trận hằng đã biết với số chiều phù hợp. Giả sử rằng các ma trận E, A, A_d biểu diễn được như sau

$$E := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, A_d := \begin{pmatrix} A_{d1} & A_{d2} \\ A_{d3} & A_{d4} \end{pmatrix},$$

với $A_1, A_{d1} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $A_2, A_{d2} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $A_3, A_{d3} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$, $A_4, A_{d4} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $H \in \mathbb{R}^{r \times r}$. Hằng số trễ $h \in \mathbb{N}^*$ và $\eta : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ là hàm điều kiện ban đầu. Dãy xung $\{t_m\}_{m=1}^\infty$ thỏa mãn $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \dots, t_m \rightarrow \infty$ với $m \rightarrow \infty$.

Ký hiệu véc tơ trạng thái với giá trị ban đầu (η_1, η_2) của hệ (2.1) là $\mathbf{x}_1(t, \eta_1, \eta_2)$ và $\mathbf{x}_2(t, \eta_1, \eta_2)$.

Định nghĩa 2.1.1. Hệ (2.1) được gọi là một hệ dương có xung nếu đối với mọi $\eta(t) \succeq 0$ thì $\mathbf{x}(t, \eta(t)) \succeq 0, \forall t \geq 0$.

Định nghĩa 2.1.2. Hệ (2.1) được gọi là ổn định mũ nếu $\exists \xi > 0, \alpha \in (0, 1), \lambda \in \mathbb{R}_+^n$ sao cho với mọi $\eta(t) \succeq 0$

$$\|x(t)\| \leq \xi \alpha^t \|\eta\|_h^\dagger, t \geq 0,$$

trong đó $\|\eta\|_h^\dagger := \sup_{-h \leq s \leq 0} \|\eta(s)\|_\infty^\lambda$.

Bổ đề 2.1.3. Giả sử ma trận A_4 trong hệ (2.1) thỏa mãn điều kiện $\det(A_4) \neq 0$. Khi đó, nghiệm của hệ (2.1) tồn tại và duy nhất trên $\mathbb{Z}^+$.

Bổ đề 2.1.4. Giả sử A_4 là một ma trận Metzler và Hurwitz và A_1, A_2, A_3, H, A_d là các ma trận không âm. Khi đó, hệ (2.1) là một hệ dương có xung.

Ta luôn giả sử rằng các ma trận $A_E = A + I_n - E, A_d$ và H không âm. Một điều kiện đủ để xét tính ổn định mũ của hệ được thể hiện qua nội dung của định lý sau.

Định lý 2.1.5. Giả sử tồn tại các số $\alpha \in (0, 1), \delta \in (0, 1)$ và $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ thỏa mãn các ràng buộc sau

$$(-\alpha E + A + \alpha^{-h} A_d) \lambda \prec 0, \quad (2.2a)$$

$$R_\lambda^i = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^r h_{ij} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} > 1, i \in J_{1,r}, \quad (2.2b)$$

$$\underline{\mathfrak{T}} \geq -\frac{1}{\delta} \log_\alpha R_\lambda, \quad (2.2c)$$

trong đó $R_\lambda = \max_{1 \leq i \leq r} \{R_\lambda^i\}$. Khi đó, với thời gian duy trì tối thiểu $\underline{\mathfrak{T}}$ (nghĩa là dãy thời gian xung thỏa mãn $\inf_m \{t_m - t_{m-1}\} \geq \underline{\mathfrak{T}}, m \in \mathbb{N}^*$), hệ (2.1) ổn định mũ. Hơn thế nữa, ta có

$$\|x(t)\| \leq \|\eta\|_h^\dagger \|\lambda\| \alpha^{(1-\delta)t}, t \geq 0.$$

2.2 Tính ổn định hóa được dạng mũ cho hệ suy biến dương rời rạc có xung với trễ theo thời gian

Xét hệ điều khiển sau

$$\begin{cases} Ex(t+1) &= Ax(t) + A_dx(t-h) + Bu(t), \quad t \neq t_m - 1, \\ \mathbf{x}_1(t_m) &= H\mathbf{x}_1(t_m - 1), \quad t \in \mathbb{N}, \\ x(s) &= \eta(s), \quad s \in \{-h, -h+1, \dots, 0\}, \end{cases} \quad (2.3)$$

trong đó vectơ trạng thái $x(\cdot) := (\mathbf{x}_1(\cdot), \mathbf{x}_2(\cdot))$, với $\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^r$ và $\mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$, điều khiển đầu vào $u(t) \in \mathbb{R}^p$. Với hàm điều khiển phản hồi trạng thái

$$u(t) = Kx(t), \quad (2.4)$$

hệ (2.3) được đưa về hệ đóng sau

$$\begin{cases} Ex(t+1) &= (A + BK)x(t) + A_dx(t-h), \quad t \neq t_m - 1, \\ \mathbf{x}_1(t_m) &= H\mathbf{x}_1(t_m - 1), \quad t \in \mathbb{N}, \\ x(s) &= \eta(s), \quad s \in \{-h, -h+1, \dots, 0\}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Định lý 2.2.1. *Giả sử tồn tại hằng số $\alpha \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$, $k_j \in \mathbb{R}^p$, và $j = 1, 2, \dots, n$ sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn*

$$(A + I_n - E)_{(i,j)} \lambda_j + (B)_i^T k_j \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.6a)$$

$$(-\alpha E + A + \alpha^{-h} A_d) \lambda + B \sum_{i=1}^n k_i \prec 0, \quad (2.6b)$$

$$R_\lambda^i = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^r h_{ij} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} > 1, \quad i \in J_{1,r}, \quad (2.6c)$$

$$\underline{\mathfrak{T}} \geq -\frac{1}{\delta} \log_\alpha R_\lambda, \quad (2.6d)$$

trong đó $R_\lambda = \max_{1 \leq i \leq r} \{R_\lambda^i\}$. Khi đó, với thời gian duy trì tối thiểu $\underline{\mathfrak{T}}$ (tức là dãy thời gian xung thỏa mãn $\inf_m \{t_m - t_{m-1}\} \geq \underline{\mathfrak{T}}, m \in \mathbb{Z}^+$), hệ đóng (2.5) ổn định mũ. Hơn nữa, ma trận phản hồi trạng thái được xác định bởi

$$K = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\lambda_1} & \frac{k_2}{\lambda_2} & \dots & \frac{k_n}{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

2.3 Ví dụ minh họa

Trong phần này, chúng tôi trình bày ba ví dụ nhằm minh họa tính hiệu quả của các kết quả đạt được. Ví dụ 2.3.1 áp dụng kết quả của Định lý 2.1.5 để xét tính ổn định mũ của hệ suy biến dương. Ví dụ 2.3.2 áp dụng kết quả của Hệ quả 2.1.9 để xét tính ổn định mũ của hệ dương không suy biến, có so sánh với kết quả của G. Zhang và cộng sự (2012). Cuối cùng ví dụ 2.3.3 áp dụng kết quả của Định lý 2.2.1 để vấn đề ổn định hóa được dạng mũ. Trong phần tóm tắt này, chúng tôi trình bày ngắn gọn Ví dụ 2.3.3.

Ví dụ 2.3.3 Xét hệ phương trình vi phân suy biến (2.3), với

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3/25 & 1/10 & -1/10 \\ 1/10 & -1/10 & 1/10 \\ 1/10 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/10 & 0 \\ 1/10 & 1/10 & 0 \\ 3/20 & 1/10 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 11/100 & 1/5 \\ 1/5 & 1/10 \\ 0 & -1/10 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1/5 & 1 \\ 1 & 1/10 \end{bmatrix}.$$

Với $\alpha = 0.9$ và $\delta = 0.8$, giải các điều kiện (2.6a)-(2.6c), ta tìm được

$$k_1 = (\frac{1}{100}, \frac{1}{50}), k_2 = (\frac{1}{10}, 0), \quad k_3 = (\frac{1}{100}, \frac{1}{100}), \lambda = (\frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{200}), R_\lambda^1 = 1.2 > 1,$$

$R_\lambda^2 = 1.1 > 1$ và $R_\lambda = 1.2 > 1$. Thực hiện tính toán, ta thu được

$$A + BK + I_3 - E = \begin{bmatrix} 131/5671 & 13/500 & 1/625 \\ 19/1000 & 1/200 & 9/2000 \\ 13/1000 & 0 & 939/1000 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/10 & 0 \\ 1/10 & 1/10 & 0 \\ 3/20 & 1/10 & 0 \end{bmatrix}$$

là các ma trận không âm và $K = \begin{bmatrix} 1/15 & 2/3 & 2/3 \\ 2/15 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$. Vì vậy các khoảng cách

$t_m - t_{m-1} \geq \underline{\mathfrak{T}} \geq -\frac{1}{\delta} \log_\alpha R_\lambda \approx 2.1631, m \in \mathbb{Z}^+$. Theo Định lý 2.2.1 thì hệ đóng dương và ổn định mũ.

Để mô phỏng ta xét điều kiện đầu là $\eta(s) = (2 \ 4 \ 6)^T, s \in \{-2, -1, 0\}$. Hình 2.6 của luận án biểu diễn véc tơ trạng thái $x_1(t), x_2(t)$ và $x_3(t)$ của hệ đóng tương ứng trong trường hợp dãy xung thỏa mãn $t_m - t_{m-1} = 1$, các trạng thái tăng không bị chặn theo thời gian, phản ánh tính mất ổn định của hệ. Hình 2.7 minh họa quỹ đạo trạng thái ứng với dãy xung có khoảng thời gian duy trì $t_m - t_{m-1} = 3$, trong đó các trạng thái đều hội tụ về điểm cân bằng, hoàn toàn phù hợp với điều kiện ổn định hóa được dạng mũ đã được chứng minh ở Định lý 2.2.1.

Chương 3

Tính tiêu hao hóa trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía

Trong chương này, chúng tôi thiết kế hàm điều khiển cho bài toán tiêu hao hóa trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía. Nội dung trong chương này được xây dựng từ các kết quả đã được trình bày trong bài báo [CT2] trong danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

3.1 Phát biểu bài toán và một số định nghĩa

Xét hệ phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía sau

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t) \\ &\quad + F(t, x(t)) + Bu(t), t \geq 0, \\ z(t) &= [C + \Delta C(t)]x(t) + W\omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó $\alpha \in (0, 1)$ là bậc phân thứ của hệ, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển đầu vào, $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ là nhiễu đầu vào cho trước, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ là véc tơ đầu ra, x_0 là điều kiện ban đầu. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $W \in \mathbb{R}^{p \times q}$ và $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là các ma trận hằng số đã biết. Ma trận $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ suy biến với $\text{rank}(E) = r < n$. $\Delta A(t)$, $\Delta C(t)$, $\Delta D(t)$ là các ma trận thực thay đổi theo thời gian thỏa mãn

$$\Delta A(t) = M_a \mathcal{F}_a(t) N_a, \quad \Delta C(t) = M_c \mathcal{F}_c(t) N_c, \quad \Delta D(t) = M_d \mathcal{F}_d(t) N_d, \quad (3.2)$$

trong đó $M_a, N_a, M_c, N_c, M_d, N_d$ các ma trận hằng số đã biết và $\mathcal{F}_a(t), \mathcal{F}_c(t), \mathcal{F}_d(t)$ là các ma trận thực thỏa mãn

$$\mathcal{F}_a^T(t)\mathcal{F}_a(t) \leq I, \mathcal{F}_c^T(t)\mathcal{F}_c(t) \leq I, \mathcal{F}_d^T(t)\mathcal{F}_d(t) \leq I, \forall t \geq 0.$$

Giả thiết 3.1.1. *Nhiều $\omega(\cdot) \in L^2([0, +\infty), \mathbb{R}^q)$ thỏa mãn điều kiện sau*

$$\exists d > 0 : \sup_{t \geq 0} \omega^T(t)\omega(t) \leq d.$$

Hàm phi tuyến $F(t, x(t)) = \Delta f(t, x(t)) + f(t, x(t))$, trong đó $\Delta f(t, x(t))$ là thành phần phi tuyến chưa biết. $f(t, x(t))$ thỏa mãn $f(t, 0) = 0$ và giả thiết sau.

Giả thiết 3.1.2. *Hàm $f(t, x(t))$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía với $x(t)$ trong tập $\mathfrak{D}$, tức là tồn tại số thực $\rho \in \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$\langle f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t)), x_1(t) - x_2(t) \rangle \leq \rho \|x_1(t) - x_2(t)\|^2,$$

$\forall x_1(t), x_2(t) \in \mathfrak{D}$. Số thực ρ được gọi là hằng số Lipschitz một phía.

Giả thiết 3.1.3. *$f(t, x(t))$ thỏa mãn điều kiện bị chặn bậc hai với $x(t)$, tức là tồn tại các hằng số $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned} \|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\|^2 &\leq \mu \langle x_1(t) - x_2(t), f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t)) \rangle \\ &\quad + \nu \|x_1(t) - x_2(t)\|^2, \end{aligned}$$

với mọi $x_1(t), x_2(t) \in \mathfrak{D}$.

Giả thiết 3.1.4. *$\Delta f(t, x(t))$ thỏa mãn điều kiện*

$$\|\Delta f(t, x(t))\| \leq h \|x(t)\|, \forall x(t) \in \mathfrak{D},$$

trong đó $h > 0$ cho trước.

Khi không có tác động của véc tơ điều khiển đầu vào thì hệ (3.1) trở thành

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t) + F(t, x(t)), t \geq 0, \\ z(t) &= [C + \Delta C(t)]x(t) + W\omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Khi vắng mặt véc tơ đầu ra, hệ (3.3) đưa về hệ sau

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t) + F(t, x(t)), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Định nghĩa 3.1.5. Hệ phương trình vi phân (3.4) được gọi là

- i) Chính quy nếu tồn tại $s \in \mathbb{C}$ sao cho đa thức $\det(sE - (A + \Delta A(t)))$ không đồng nhất bằng 0. Khi đó cặp ma trận (E, A) được gọi là chính quy.
- ii) Không có xung nếu tồn tại $s \in \mathbb{C}$ sao cho

$$\deg(\det(sE - (A + \Delta A(t)))) = \text{rank}(E).$$

Định nghĩa 3.1.6. Giả sử c_1, c_2, T_f là các số dương cho trước với $c_1 < c_2$ và R là một ma trận đối xứng xác định dương. Hệ (3.4) được gọi là bị chặn trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu hệ đó là chính quy, không có xung và thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$x_0^T E^T R E x_0 \leq c_1 \Rightarrow x^T(t) E^T R E x(t) < c_2, \forall t \in [0, T_f]. \quad (3.5)$$

Định nghĩa 3.1.8 Giả sử c_1, c_2, T_f là các số dương cho trước với $c_1 < c_2$ và R là một ma trận đối xứng xác định dương. Hệ (3.3) được gọi là (Z, U, S) -tiêu hao trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn

- (i) Hệ (3.4) bị chặn trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) .
- (ii) Xét hệ (3.3) với điều kiện đầu bằng 0, $\exists \gamma > 0$ thỏa mãn ràng buộc sau

$$\int_0^{t_f} (2z^T(t)U\omega(t) + z^T(t)Zz(t) + \omega^T(t)S\omega(t))dt \geq \gamma \int_0^{t_f} \omega^T(t)\omega(t)dt,$$

trong đó $\forall t_f \in [0, T_f]$ và bất kỳ véc tơ nhiễu $\omega(t)$ khác 0 thỏa mãn Giả thiết 3.1.1, U là một ma trận thực, Z, S là các ma trận đối xứng thực với $Z \leq 0$ cho trước.

Hệ đóng nhận được với hàm điều khiển $u(t) = Kx(t)$ là

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= [A + BK + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t) \\ &\quad + F(t, x(t)), t \geq 0, \\ z(t) &= [C + \Delta C(t)]x(t) + W\omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Trong trường hợp không có véc tơ đầu ra, hệ đóng (3.6) được đưa về

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= [A + BK + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t) \\ &\quad + F(t, x(t)), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2 Tính bị chặn trong thời gian hữu hạn của hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía

Định lý 3.2.1. *Giả sử rằng các Giả thiết 3.1.1-3.1.4 được thỏa mãn. Cho trước c_1, c_2, T_f là các số dương với $c_1 < c_2$ và R là một ma trận đối xứng xác định dương. Hệ (3.7) bị chặn trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu tồn tại các số dương $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon, \delta, \theta, \sigma, \beta$, một ma trận $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ đối xứng xác định dương, một ma trận $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ không suy biến, một ma trận $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ không suy biến và một ma trận $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ thỏa mãn các điều kiện sau*

$$E^T Q = Q^T E \geq 0, \quad (3.8a)$$

$$E^T Q = E^T R^{\frac{1}{2}} \Sigma R^{\frac{1}{2}} E, \quad (3.8b)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & Q^T D & \Xi_{14} & Q^T M_a & Q^T M_d & Q^T \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \sigma N_d^T N_d - \beta I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\theta I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\sigma I & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & -\delta I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.8c)$$

$$\lambda_1 c_1 + \frac{\beta d}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < \lambda_2 c_2, \quad (3.8d)$$

trong đó

$$\Xi_{11} = A^T Q + Q^T A + L^T B^T + BL + \delta h^2 I + \theta N_a^T N_a + 2(\rho \epsilon_1 + \epsilon_2 \nu) I,$$

$$\Xi_{12} = Q^T + (\epsilon_2 \mu - \epsilon_1) I,$$

$$\Xi_{14} = \epsilon(Q^T B - BF) + L^T,$$

$$\Xi_{44} = -\epsilon F - \epsilon F^T,$$

$$\lambda_1 = \lambda_{\max}(\Sigma), \lambda_2 = \lambda_{\min}(\Sigma).$$

Ngoài ra, hàm điều khiển phản hồi trạng thái được xác định bởi $u(t) = F^{-1} Lx(t)$.

3.3 Tính tiêu hao hóa trong thời gian hữu hạn của hệ phân thứ suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía

Định lý 3.3.1. *Giả sử rằng các Giả thiết 3.1.1-3.1.4 được thỏa mãn. Cho trước c_1, c_2, T_f với $c_1 < c_2$ là các số dương và R là một ma trận đối xứng xác định*

ương. Hệ đóng (3.6) (Z, U, S) -tiêu hao trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu tồn tại các số thực dương $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon, \beta, \delta, \theta, \sigma, \kappa, \gamma$, một ma trận đối xứng xác định dương $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, một ma trận không suy biến $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, một ma trận không suy biến $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$, một ma trận $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ thỏa mãn (3.8a), (3.8b) và các điều kiện sau

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} & Q^T M_a & Q^T M_d & Q^T & C^T G^T & 0 \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Xi_{39} \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\theta I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\sigma I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\delta I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I & GM_c \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\kappa I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.9a)$$

$$S - (\gamma + \beta)I > 0, \quad (3.9b)$$

$$\lambda_1 c_1 + \frac{\beta d}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < \lambda_2 c_2, \quad (3.9c)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_{\max}(\Sigma), \lambda_2 = \lambda_{\min}(\Sigma), Z = -G^T G, \\ \Xi_{11} &= A^T Q + Q^T A + L^T B^T + BL + \delta h^2 I + \theta N_a^T N_a + \kappa N_c^T N_c + 2(\rho\epsilon_1 + \epsilon_2\nu)I, \\ \Xi_{12} &= Q^T + (\epsilon_2\mu - \epsilon_1)I, \\ \Xi_{14} &= \epsilon(Q^T B - BF) + L^T, \\ \Xi_{13} &= Q^T D - C^T ZW - C^T U, \\ \Xi_{33} &= \sigma N_d^T N_d - W^T ZW - W^T U - U^T W - \beta I, \\ \Xi_{39} &= -(W^T Z^T + U^T)M_c, \\ \Xi_{44} &= -\epsilon F - \epsilon F^T. \end{aligned}$$

Hơn nữa, điều khiển phản hồi trạng thái được xác định bởi $u(t) = F^{-1}Lx(t)$.

Định lý 3.3.2. Giả sử rằng các Giả thiết 3.1.1-3.1.4 đều thỏa mãn. Cho c_1, c_2, T_f, d với $c_1 < c_2$ là các số dương và R là một ma trận đối xứng xác định dương. Hệ đóng (3.6) (Z, U, S) -tiêu hao trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu tồn tại các số dương $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon, \beta, \delta, \theta, \sigma, \gamma, \kappa, \zeta$, một ma trận đối xứng xác định dương $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, một ma trận $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$, một ma trận không suy biến $F \in$

$\mathbb{R}^{m \times m}$ và một ma trận $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$R < \mathcal{R} < \zeta R, \quad (3.10a)$$

$$\zeta c_1 + \frac{\beta d}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < c_2, \quad (3.10b)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} & \Gamma_{15} & \Gamma_{16} & \Gamma_{17} & C^T G^T & 0 \\ * & -2\epsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{39} \\ * & * & * & \Gamma_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\theta I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\sigma I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\delta I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I & GM_c \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\kappa I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.10c)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= A^T(\mathcal{R}E + E_\perp^T \mathcal{S}) + (E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_\perp)A + L^T B^T + BL + \delta h^2 I \\ &\quad + \theta N_a^T N_a + \kappa N_c^T N_c + 2(\rho\epsilon_1 + \epsilon_2\nu)I, \\ \Gamma_{12} &= (E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_\perp) + (\epsilon_2\mu - \epsilon_1)I, \\ \Gamma_{13} &= (E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_\perp)D - C^T ZW - C^T U, \\ \Gamma_{14} &= \epsilon(E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_\perp)B - \epsilon BF + L^T, \\ \Gamma_{15} &= (E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_\perp)M_a, \\ \Gamma_{16} &= (E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_\perp)M_d, \\ \Gamma_{17} &= (E^T \mathcal{R} + \mathcal{S}^T E_\perp), \\ \Gamma_{33} &= \sigma N_d^T N_d - W^T ZW - W^T U - U^T W - \beta I, \\ \Gamma_{39} &= -(W^T Z^T + U^T)M_c, \\ \Gamma_{44} &= -\epsilon F - \epsilon F^T, \end{aligned}$$

$Z = -G^T G$ và $E_\perp \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ là phần bù trực giao của E thỏa mãn $E_\perp E = 0$, $\text{rank}(E_\perp) = n - r$. Ngoài ra, hàm điều khiển phản hồi trạng thái được xác định bởi $u(t) = F^{-1}Lx(t)$.

3.4 Ví dụ minh họa

Trong phần này, chúng tôi trình bày 02 ví dụ nhằm minh họa tính hiệu quả của các kết quả đạt được. Ví dụ 3.3.1 áp dụng kết quả của Định lý 3.3.2 để xét bài

toán tiêu hao cho hệ phân thứ suy biến với thành phần không chắc chắn. Ví dụ 3.3.2 áp dụng kết quả của Hệ quả 3.3.5 để giải bài toán FTDC trong trường hợp đặc biệt của hệ phân thứ suy biến. Trong phần tóm tắt này, chúng tôi trình bày ngắn gọn Ví dụ 3.3.1.

Ví dụ 3.4.1. Xét hệ điều khiển phân thứ suy biến sau

$$\begin{cases} E_0^C D_t^{0.8} x(t) &= [A + M_a \mathcal{F}_a(t) N_a] x(t) + [D + M_d \mathcal{F}_d(t) N_d] \omega(t) \\ &\quad + f(t, x(t)) + \Delta f(t, x(t)) + Bu(t), t \geq 0, \\ z(t) &= [C + M_c \mathcal{F}_c(t) N_c] x(t) + W \omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (3.11)$$

trong đó $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2, u(t) \in \mathbb{R}^2, \omega(t) \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}, M_a = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \\ N_a &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, \mathcal{F}_a(t) = \sin t, M_d = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, N_d = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \mathcal{F}_d(t) = \cos t, \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, M_c = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, N_c = \begin{bmatrix} 0.1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix}, \mathcal{F}_c(t) = \sin t, \\ f(t, x(t)) &= \begin{bmatrix} 0.1x_1^2(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta f(t, x(t)) = \begin{bmatrix} x_1^2(t) \\ x_1(t)x_2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Với điều khiển $u(t) = Kx(t)$, hệ đóng nhận được từ (3.11) là

$$\begin{cases} E_0^C D_t^{0.8} x(t) &= [A + M_a \mathcal{F}_a(t) N_a + BK] x(t) + [D + M_d \mathcal{F}_d(t) N_d] \omega(t) \\ &\quad + f(t, x(t)) + \Delta f(t, x(t)), t \geq 0, \\ z(t) &= [C + M_c \mathcal{F}_c(t) N_c] x(t) + W \omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Chúng ta kiểm tra được $f(t, x(t))$ đáp ứng các điều kiện trong Giả thiết 3.1.2 và Giả thiết 3.1.3 với các hằng số $\rho = 1, \mu = 0, \nu = 1$ trong tập $\mathfrak{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 5\}$. Hàm phi tuyến $\Delta f(t, x(t))$ thỏa mãn Giả thiết 3.1.4 với hằng số $h = 1$. Cho trước

$$c_1 = 1, c_2 = 1.7, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, d = 1, T_f = 10, U = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Sử dụng LMI Control Toolbox trong MATLAB, các điều kiện của Định lý 3.3.2 thỏa mãn với $\epsilon_1 = 0.7454$, $\epsilon_2 = 0.0882$, $\epsilon = 1$, $\beta = 0.5023$, $\delta = 4.0496$, $\theta = 4.0449$, $\sigma = 0.8417$, $\gamma = 0.2488$, $\kappa = 4.0865$, $\zeta = 5.9192$,

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 2.0942 & -0.0865 \\ -0.0865 & 2.8886 \end{bmatrix}, \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.0912 & 1.7755 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} -3.6720 & 9.6760 \\ -3.5282 & 2.9514 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 3.4008 & 1.0265 \\ -1.1638 & 1.4339 \end{bmatrix}.$$

Theo Định lý 3.3.2, hệ đóng (3.12) (Z, U, S) -tiêu hao vững trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ $(1, 1.7, 10, R, 1)$ và điều khiển phản hồi trạng thái

$$u(t) = \begin{bmatrix} -0.2707 & 1.7863 \\ -2.6803 & 3.5081 \end{bmatrix} x(t), \forall t \in [0, 10].$$

Để có kết quả mô phỏng, chúng tôi chọn điều kiện đầu $x_0 = (-1, 1)^T \in \mathbb{R}^2$ và nhiễu $\omega(t) = \sin t$. Hình 3.1 của luận án biểu diễn sự thay đổi theo thời gian của $x^T(t)E^T R E x(t)$ của hệ mở. Rõ ràng hệ mở không bị chặn trong thời gian hữu hạn vì chúng cũng không thỏa mãn điều kiện của Định nghĩa 3.1.6. Hình 3.2 của luận án biểu diễn quỹ đạo của $x^T(t)E^T R E x(t)$ của hệ đóng. Giá trị của $x^T(t)E^T R E x(t)$ bị giới hạn ở mức nhỏ hơn $c_2 = 1.7$ với $t \in [0, 10]$. Khi đó, hệ (3.12) bị chặn trong thời gian hữu hạn theo Định nghĩa 3.1.6. Ta xây dựng hàm hiệu suất tiêu hao

$$\gamma(t) = \frac{\int_0^{t_f} (2z^T(t)U\omega(t) + z^T(t)Zz(t) + \omega^T(t)S\omega(t))dt}{\int_0^{t_f} \omega^T(t)\omega(t)dt}, \forall t_f \in [0, 10].$$

Hình 3.3 của luận án biểu thị hàm hiệu suất tiêu hao $\gamma(t)$ luôn lớn hơn giá trị $\gamma = 0.2488$, có nghĩa là điều kiện (ii) trong Định nghĩa 3.1.8 luôn đúng. Từ các Hình 3.2 và 3.3 của luận án, dễ dàng thấy rằng hệ đóng (3.12) (Z, U, S) -tiêu hao vững trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ $(1, 1.7, 10, R, 1)$ và $\gamma = 0.2488$.

Chương 4

Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phương trình vi phân phân thứ suy biến có nhiễu

Trong chương này, chúng tôi thiết kế hàm điều khiển bền vững cho bài toán FTGCC cho lớp hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo suy biến có nhiễu. Nội dung trong chương này được xây dựng từ các kết quả đã được trình bày trong bài báo [CT3] trong danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

4.1 Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn

Xét lớp hệ phân thứ Caputo suy biến có nhiễu được mô tả bởi

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t) + Bu(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

trong đó $\alpha \in (0, 1)$ là bậc phân thứ của hệ, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển đầu vào, $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ là nhiễu véc tơ cho trước, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ là điều kiện đầu. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$ và $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là các ma trận hằng số đã biết. Ma trận $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ suy biến với $\text{rank}(E) = r < n$. Các ma trận thực $\Delta A(t)$, $\Delta D(t)$ thay đổi theo thời gian thỏa mãn

$$\Delta A(t) = M_a \mathcal{F}_a(t) N_a, \quad \Delta D(t) = M_d \mathcal{F}_d(t) N_d, \quad (4.2)$$

trong đó M_a, N_a, M_d, N_d các ma trận hằng số đã biết và $\mathcal{F}_a(t), \mathcal{F}_d(t)$ là các ma trận thực thỏa mãn

$$\mathcal{F}_a^T(t) \mathcal{F}_a(t) \leq I, \quad \mathcal{F}_d^T(t) \mathcal{F}_d(t) \leq I, \quad \forall t \geq 0.$$

Cho một số dương $T_f > 0$. Liên kết với hệ phân thứ suy biến (4.1), ta xét hàm chi phí toàn phương có dạng sau

$$J = \int_0^{T_f} [x^T(t)S_1x(t) + u^T(t)S_2u(t)]dt, \quad (4.3)$$

với $S_1 > 0$ và $S_2 > 0$ là các ma trận hằng cho trước với số chiều phù hợp.

Giả thiết 4.1.1. Hàm nhiễu $\omega(.) \in L^2([0, +\infty), \mathbb{R}^q)$ thỏa mãn điều kiện bị chặn

$$\exists d > 0 : \sup_{t \geq 0} \omega^T(t)\omega(t) \leq d.$$

Khi không có tác động của véc tơ điều khiển đầu vào thì hệ (4.1) trở thành

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]\omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Định nghĩa 4.1.2. Hệ phương trình vi phân (4.4) được gọi là

i) Chính quy nếu tồn tại $s \in \mathbb{C}$ sao cho đa thức $\det(sE - (A + \Delta A(t)))$ không đồng nhất bằng 0. Khi đó cặp ma trận (E, A) được gọi là chính quy.

ii) Không có xung nếu tồn tại $s \in \mathbb{C}$ sao cho

$$\deg(\det(sE - (A + \Delta A(t)))) = \text{rank}(E).$$

Định nghĩa 4.1.3. Cho trước c_1, c_2, T_f với $c_1 < c_2$ là các số dương và ma trận R đối xứng xác định dương. Hệ (4.4) được gọi là bị chặn trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu hệ đó là chính quy, không có xung và bất đẳng thức sau đây thỏa mãn

$$x_0^T E^T R E x_0 \leq c_1 \Rightarrow x^T(t) E^T R E x(t) < c_2, \forall t \in [0, T_f]. \quad (4.5)$$

Xét hàm điều khiển phản hồi trạng thái bền vững dưới dạng sau

$$u(t) = (K + \Delta K(t))x(t), \quad (4.6)$$

trong đó $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ là ma trận phản hồi trạng thái cần thiết kế và $\Delta K(t)$ là thành phần thay đổi theo thời gian có dạng $\Delta K(t) = M_k \mathcal{F}_k(t) N_k$, với M_k và N_k là các ma trận thực đã biết với số chiều phù hợp, $\mathcal{F}_k(t)$ là ma trận thực biến thiên thỏa mãn $\mathcal{F}_k^T(t) \mathcal{F}_k(t) \leq I, \forall t \geq 0$. Khi đó, hệ đóng thu được là

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) &= [A + \Delta A(t) + BK + B\Delta K(t)]x(t) \\ &\quad + [D + \Delta D(t)]\omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Định nghĩa 4.1.4. Cho trước các số dương $T_f, c_1, c_2, (c_2 > c_1), d$ và một ma trận đối xứng xác định dương R . Xét hệ (4.1) với hàm chi phí (4.3). Nếu tồn tại một hàm điều khiển bền vững $\hat{u}(t)$ và hằng số dương J^* sao cho hệ đóng (4.7) bị chặn trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ (c_1, c_2, T_f, R, d) và giá trị của hàm chi phí thỏa mãn $J \leq J^*$ thì J^* được gọi là giá trị đảm bảo chi phí, $\hat{u}(t)$ được gọi là hàm điều khiển đảm bảo chi phí.

Định lý 4.1.5. Xét hệ (4.1) với hàm chi phí (4.3). Cho trước các số dương $c_1, c_2, (c_2 > c_1), T_f, d$ và một ma trận đối xứng xác định dương R . Giả sử Giả thiết 4.1.1 được thỏa mãn và tồn tại các số thực dương $\delta, \theta, \beta, \gamma, \mu_1, \mu_2$, một ma trận không suy biến $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ và một ma trận $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sao cho các điều kiện dưới đây được đảm bảo

$$PE^T = EP^T \geq 0, \quad (4.8a)$$

$$\mu_1 PE^T < PE^T RE P^T < \mu_2 PE^T, \quad (4.8b)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & PN_a^T & PN_k^T & D & M_d & PS_1 & YS_2 & YS_2 M_k & PN_k^T \\ * & -\delta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\theta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -S_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -S_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\sigma I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.8c)$$

$$\frac{c_1}{\mu_1} + \frac{(\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d))d}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < \frac{c_2}{\mu_2}, \quad (4.8d)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= PA^T + YB^T + AP^T + BY^T + \delta M_a M_a^T + \theta B M_k M_k^T B^T, \\ \sigma &= \frac{1}{1 + \lambda_{\max}(S_2) \lambda_{\max}(M_k^T M_k)}. \end{aligned}$$

Khi đó (4.6) là hàm điều khiển phản hồi trạng thái bền vững đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho hệ (4.1). Trong đó, ma trận phản hồi trạng thái K được xác định bởi $K = Y^T P^{-T}$. Hơn thế nữa, giá trị đảm bảo chi phí J^* được xác định bởi

$$J^* = (\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d)) d T_f + \frac{T_f^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \lambda_{\max}(E^T P^{-T}) \|x_0\|^2.$$

Định lý 4.1.6. Xét hệ (4.1) với hàm chi phí (4.3). Cho trước các số dương $c_1, c_2, (c_2 > c_1), T_f, d$ và một ma trận đối xứng xác định dương R . Giả sử Giả thiết 4.1.1 được thỏa mãn và tồn tại các số thực dương $\delta, \theta, \beta, \gamma, \mu_1, \mu_2$, một ma trận đối xứng xác định dương $\hat{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, một ma trận $\hat{\mathcal{Z}} \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ và một ma trận $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\mu_1 \Xi < \hat{\mathcal{X}} < \mu_2 \Xi, \quad (4.9a)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & D & M_d & \Pi_{16} & YS_2 & YS_2M_k & \Pi_{19} \\ * & -\delta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\theta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -S_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -S_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\sigma I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.9b)$$

$$\frac{c_1}{\mu_1} + \frac{(\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d))d}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < \frac{c_2}{\mu_2}, \quad (4.9c)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= (EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T) A^T + A(V_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T E^T + V_2 \hat{\mathcal{Z}}^T) + Y B^T + B Y^T \\ &\quad + \delta M_a M_a^T + \theta B M_k M_k^T B^T, \\ \Pi_{12} &= (EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T) N_a^T, \\ \Pi_{13} &= (EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T) N_k^T, \\ \Pi_{16} &= (EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T) S_1, \\ \Pi_{19} &= (EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T) N_k^T, \\ \Xi &= (\Sigma_r U_1^T R U_1 \Sigma_r)^{-1}, \\ \sigma &= \frac{1}{1 + \lambda_{\max}(S_2) \lambda_{\max}(M_k^T M_k)}. \end{aligned}$$

Khi đó (4.6) là hàm điều khiển phản hồi trạng thái bền vững đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (4.1) trong thời gian hữu hạn. Trong đó ma trận phản hồi trạng thái K được xác định bởi $K = Y^T (EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T)^{-T}$. Hơn thế nữa, giá trị đảm bảo chi phí J^* được xác định bởi

$$J^* = (\beta + \gamma \lambda_{\max}(N_d^T N_d)) d T_f + \frac{T_f^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \lambda_{\max}(E^T (EV_1 \hat{\mathcal{X}} V_1^T + \hat{\mathcal{Z}} V_2^T)^{-T}) \|x_0\|^2.$$

4.2 Ví dụ minh họa

Trong phần này, chúng tôi trình bày 02 ví dụ nhằm minh họa tính hiệu quả của các kết quả đạt được. Ví dụ 4.2.1 áp dụng kết quả của Định lý 4.1.6 để xét bài toán FTGCC cho hệ phân thứ suy biến với thành phần không chắc chắn. Ví dụ 4.2.2 áp dụng kết quả của Hệ quả 4.1.9 để giải bài toán FTGCC trong trường hợp đặc biệt của hệ phân thứ suy biến. Trong phần tóm tắt này, chúng tôi trình bày ngắn gọn Ví dụ 4.2.1.

Ví dụ 4.2.1. Xét hệ phân thứ Caputo suy biến sau

$$\begin{cases} E_0^C D_t^{0.8} x(t) &= [A + M_a \mathcal{F}_a(t) N_a] x(t) + [D + M_d \mathcal{F}_d(t) N_d] \omega(t) \\ &\quad + Bu(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (4.10)$$

trong đó $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T \in \mathbb{R}^3$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^2$ là điều khiển đầu vào, $\omega(t) \in \mathbb{R}$ là véc tơ nhiễu,

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \\ M_a &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, M_d = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ 0.7 \end{bmatrix}, \\ N_a &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & -0.5 \end{bmatrix}, \mathcal{F}_a(t) = \sin t, N_d = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \mathcal{F}_d(t) = \cos t. \end{aligned}$$

Với $u(t) = [K + M_k \mathcal{F}_k(t) N_k] x(t)$ trong đó $M_k = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$, $N_k = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{F}_k(t) = \cos t$ thì hệ (4.10) được đưa về hệ sau

$$\begin{cases} E_0^C D_t^{0.8} x(t) &= [A + BK + M_a \mathcal{F}_a(t) N_a + BM_k \mathcal{F}_k(t) N_k] x(t) \\ &\quad + [D + M_d \mathcal{F}_d(t) N_d] \omega(t), t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Hàm chi phí liên kết với hệ (4.10) được xác định bởi công thức (4.3) với các ma trận

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Cho trước các số $c_1 = 1, c_2 = 9, T_f = 30$ và $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Xét hệ (4.10). Sử

dụng câu lệnh svd trong MATLAB, ta tính được các ma trận U_1, U_2, V_1, V_2 và Σ_r trong Định lý 4.1.6 như sau

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tiến hành tính toán với LMI Control Toolbox trong MATLAB, các điều kiện (4.9a), (4.9b) và (4.9c) thỏa mãn với $\delta = 1.0159, \theta = 1.0339, \beta = 1.1988, \gamma = 1.2260, \mu_1 = 0.2220, \mu_2 = 1.5746$,

$$\hat{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} 0.7841 & -0.0202 \\ -0.0202 & 0.6787 \end{bmatrix}, \hat{\mathcal{Z}} = \begin{bmatrix} -0.0735 \\ 0.4615 \\ 0.7210 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -0.0001 & 0.1079 \\ 0.0927 & -0.8564 \\ 0.2857 & 0.5997 \end{bmatrix}.$$

Theo Định lý 4.1.6, hệ đóng (4.11) bị chặn trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ $(1, 9, 30, I, 0.01)$ và giá trị đảm bảo chi phí là $J^* = 0.7274 + 3.1858\|x_0\|^2$. Ngoài ra, ma trận phản hồi trạng thái được xác định bởi

$$K = \begin{bmatrix} 0.0336 & -0.1319 & 0.3963 \\ 0.1686 & -1.8224 & 0.8318 \end{bmatrix}.$$

Trong kết quả mô phỏng, chúng tôi chọn điều kiện đầu $x_0 = (0.7, 0.7, 0.7)^T \in \mathbb{R}^3$ và nhiễu $\omega(t) = 0.1 \sin t$. Hình 4.1 của luận án minh họa phản hồi của $x^T(t)E^T R E x(t)$ của hệ (4.10) khi không có điều khiển đầu vào. Hệ mở không thỏa mãn các điều kiện bị chặn trong thời gian hữu hạn vì không thỏa mãn Định nghĩa 4.1.3. Hình 4.2 của luận án mô tả quỹ đạo theo thời gian của $x^T(t)E^T R E x(t)$ của hệ đóng (4.11). Từ Hình 4.2, ta thấy rằng hệ đóng (4.11) bị chặn trong thời gian hữu hạn tương ứng với $(1, 9, 30, I, 0.01)$.

Kết luận

Luận án nghiên cứu tính chất định tính cho một số lớp hệ phương trình vi phân suy biến với đạo hàm bậc nguyên và đạo hàm bậc phân thứ: Tính ổn định và ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ phương trình suy biến dương có trễ, tính bị chặn trong thời gian hữu hạn của hệ phương trình phân thứ Caputo suy biến có nhiều với thành phần không chắc chắn cùng một số bài toán định tính liên quan trong lý thuyết điều khiển. Những kết quả mới luận án đạt được bao gồm:

- Thiết lập được điều kiện đủ để đảm bảo tính ổn định và ổn định hóa được dạng mũ của hệ suy biến dương rời rạc có xung với trễ hằng.
- Thiết lập điều kiện đủ cho tính bị chặn trong thời gian hữu hạn và thiết kế được hàm điều khiển phụ thuộc véc tơ trạng thái cho bài toán tiêu hao hóa trong thời gian hữu hạn của hệ phân thứ Caputo suy biến thỏa mãn điều kiện Lipschitz một phía.
- Thiết lập điều kiện đủ cho tính bị chặn trong thời gian hữu hạn và thiết kế được hàm điều khiển bền vững cho bài toán FTGCC của hệ phân thứ Caputo suy biến có nhiều.

Luận án đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo liên quan đến các vấn đề định tính:

- Nghiên cứu bài toán ổn định và ổn định hóa cho lớp hệ phân thứ suy biến dương rời rạc có trễ.
- Nghiên cứu bài toán ổn định theo nghĩa Lyapunov và một số bài toán điều khiển liên quan cho các lớp hệ phân thứ suy biến có trễ.
- Nghiên cứu bài toán ổn định và bị chặn trong thời gian hữu hạn cùng một số bài toán điều khiển liên quan cho các lớp hệ phân thứ suy biến phức hợp.

Các công trình đã công bố liên quan đến luận án

- (CT1) N.H. Sau, M.V. Thuan, N.T. Phuong (2024), “Exponential stability for discrete-time impulsive positive singular system with time delays”, *International Journal of Systems Science*, **55**(8), 1510–1527 (SCIE/Q1).
- (CT2) N.T. Phuong, N.H. Sau, M.V. Thuan (2023), “Finite-time dissipative control design for one-sided Lipschitz nonlinear singular Caputo fractional order systems”, *International Journal of Systems Science*, **54**(8), 1694–1712 (SCIE/Q1).
- (CT3) N.T. Phuong, N.H. Sau, M.V. Thuan, N.H Muoi (2023), “Non-fragile finite-time guaranteed cost control for a class of singular Caputo fractional order systems with uncertainties”, *Circuits, Systems, Signal Processing*, **43**, 795–820 (SCIE/Q2).