ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MAI THỊ NGỌC HÀ

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH VỚI NHIỀU TẬP ĐẦU RA TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Ngành đào tạo: Toán ứng dụng
Mã số: 9 46 01 12

BẢN TÓM TẮT
LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2024

Luận án này hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Tập thể hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Trương Minh Tuyên
PGS. TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án cấp Đại học Thái Nguyên họp tại: Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, vào hồi . . . . . . giờ . . . . . . ngày . . . . . . tháng . . . . . . năm . . . .

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia
- Thư viện của Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên
- Trung tâm học liệu Đại học Thái Nguyên

Mở đầu

Mô hình bài toán chấp nhận tách (SFP) lần đầu tiên được giới thiệu và nghiên cứu bởi Censor và Elfving vào năm 1994 cho mô hình các bài toán ngược. Mô hình toán học của bài toán (SFP) được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm phần tử } x^\dagger \in C \text{ sao cho } T(x^\dagger) \in Q, \tag{SFP}$$

trong đó C và Q lần lượt là các tập con lồi, đóng và khác rỗng trong các không gian Hilbert thực H_1 và H_2, $T : H_1 \to H_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn (còn được gọi là toán tử chuyển).

Dễ thấy rằng, bài toán tìm một điểm trong một tập lồi, còn gọi là bài toán chấp nhận lồi, là một trường hợp riêng của Bài toán (SFP). Bài toán (SFP) có một số mô hình ứng dụng thực tế như bài toán tái tạo hình ảnh trong y tế, mô hình IMRT (Intensity-Modulated Radiation Therapy) trong bức xạ trị liệu, bài toán truyền dữ liệu v.v... bằng cách xây dựng các tập C, Q và toán tử T phù hợp.

Để giải Bài toán (SFP), năm 1994, Censor và Elfving đã đề xuất phương pháp lặp song song và phương pháp lặp xoay vòng dựa trên phương pháp chiếu Bregman. Tuy nhiên, các thuật toán này có hạn chế là mỗi bước lặp đều liên quan đến việc tính các ma trận nghịch đảo. Việc tính ma trận nghịch đảo tại mỗi bước lặp dẫn đến chi phí tính toán cao đối với những bài toán cỡ lớn trong thực tế. Để khắc phục hạn chế này, năm 2002, Byrne đã đề xuất thuật toán CQ trong không gian hữu hạn chiều khi các tập C và Q được chọn sao cho có thể dễ dàng tính được hình chiếu khoảng cách lên các tập này.

Bằng cách tiếp cận tối ưu, năm 2010, Xu đã phát triển thuật toán CQ để giải Bài toán (SFP) trong không gian Hilbert thực vô hạn chiều. Tác giả đã chỉ ra rằng dãy lặp xác định bởi thuật toán CQ ở đây chỉ cho sự hội tụ yếu với cỡ bước được chọn phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển đồng thời tác giả đã đưa ra một ví dụ về sự tồn tại của các tập C, Q và toán tử T trong không gian Hilbert thực vô hạn chiều để dãy lặp xác định bởi thuật toán CQ hội tụ yếu mà không hội tụ mạnh.

Đồng thời, Xu đã chỉ ra, với thuật toán CQ này, tập nghiệm của Bài toán (SFP) trùng với tập điểm bất động của ánh xạ không giãn

$S : H_1 \to H_1$ được xác định bởi:

$$S := P_C\big[I - \gamma T^*(I - P_Q)T\big]$$

với $\gamma \in (0, 2/\|T\|^2)$. Do đó, ta có thể áp dụng các phương pháp tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn, chẳng hạn phương pháp lặp Mann, phương pháp lặp Halpern, phương pháp xấp xỉ gắn kết v.v... để giải Bài toán (SFP).

Một dạng suy rộng của Bài toán (SFP) là bài toán chấp nhận tách đa tập hợp (MSSFP), được Censor và các cộng sự đề xuất và nghiên cứu vào năm 2005 và được phát biểu như sau: Cho $C_1, C_2, \ldots, C_N$ là N tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H_1 và $Q_1, Q_2, \ldots, Q_M$ là M tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H_2.

$$\text{Tìm } x^\dagger \in \bigcap_{i=1}^{N} C_i \text{ sao cho } T(x^\dagger) \in \bigcap_{j=1}^{M} Q_j\ . \tag{MSSFP}$$

Năm 2006, Xu đã mở rộng thuật toán CQ để giải Bài toán (MSSFP) dựa trên tiếp cận phương pháp điểm bất động. Tác giả đề xuất và chứng minh sự hội tụ yếu của dãy lặp được xác định bởi thuật toán lặp Picard, thuật toán lặp xoay vòng và thuật toán lặp song song giải Bài toán (MSSFP). Để thu được sự hội tụ mạnh, nhiều nhà toán học đã nghiên cứu kết hợp phương pháp CQ với phương pháp xấp xỉ gắn kết, phương pháp chiếu lai ghép, phương pháp chiếu thu hẹp, phương pháp lặp Halpern v.v... Tuy nhiên, các phương pháp này đều sử dụng cỡ bước cố định phụ thuộc vào thông tin về chuẩn của toán tử chuyển T ở mỗi bước lặp. Trong thực tế việc tính toán chuẩn của một toán tử tuyến tính bị chặn thường không đơn giản. Do vậy việc đưa ra các tiêu chuẩn để lựa chọn cỡ bước lặp khi không biết thông tin về chuẩn của toán tử chuyển là một chủ đề có ý nghĩa trong thực hành tính toán. Trong những năm gần đây, nhiều tác giả đã nghiên cứu cải tiến phương pháp CQ để giải Bài toán (SFP) hay (MSSFP) sao cho cỡ bước không phụ thuộc vào thông tin về chuẩn của toán tử chuyển.

Bài toán (SFP) có thể xem là trường hợp riêng của bài toán không điểm chung tách (SCNPP). Dạng suy rộng của Bài toán (SCNPP) là bài toán không điểm chung tách đa tập hợp (MSSCNPP) được cho như sau: Cho $A_i : H_1 \to 2^{H_1}$, $i = 1, 2, \ldots, N$ và $B_j : H_2 \to 2^{H_2}$, $j = 1, 2, \ldots, M$ là các toán tử đơn điệu cực đại trong H_1 và H_2, tương ứng.

$$\text{Tìm phần tử} \quad x^\dagger \in \cap_{i=1}^{N} A_i^{-1}(0) \cap T^{-1}\big(\cap_{j=1}^{M} B_j^{-1}(0)\big). \tag{MSSCNPP}$$

Hơn thế nữa, ta nhận thấy rằng Bài toán (SCNPP) hay Bài toán (MSSCNPP) có thể đưa về các bài toán điểm bất động chung tách tương ứng. Dạng tổng quát của bài toán điểm bất động chung tách (SCFPP) được phát biểu như sau: Cho $S_i : H_1 \to H_1$, $i = 1, 2, \ldots, N$ và $\Xi_j : H_2 \to H_2$, $j = 1, 2, \ldots, M$ là các ánh xạ không giãn trên H_1 và H_2, tương ứng. Cho $T : H_1 \to H_2$ là toán tử tuyến tính bị chặn.

$$\text{Tìm phần tử} \quad x^\dagger \in \cap_{i=1}^{N} \operatorname{Fix}(S_i) \cap T^{-1}\big(\cap_{j=1}^{M} \operatorname{Fix}(\Xi_j)\big). \tag{SCFPP}$$

Các Bài toán (SFP), (SCFPP) và (SCNPP) cùng với các bài toán liên quan khác, có thể viết ở dạng bài toán tổng quát sau: Cho X và Y là hai không gian Hilbert hoặc Banach và cho $T : X \to Y$ là một ánh xạ từ X vào Y. Giả sử (P_1) và (P_2) là hai bài toán cho trước trên X và Y, tương ứng. Xét bài toán tìm một phần tử $x^\dagger$ trong X sao cho $x^\dagger$ là một nghiệm của bài toán (P_1) và $T(x^\dagger)$ là một nghiệm của bài toán (P_2). Ta ký kiệu bài toán này là (P). Dạng tổng quát của Bài toán (P) được phát biểu như sau: Cho $X_1, X_2, \ldots, X_N$ là các không gian Hilbert hoặc Banach và cho các ánh xạ $A_i : X_i \to X_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, là các ánh xạ từ X_i vào X_{i+1}. Giả sử (P_i), $i = 1, 2, \ldots, N$, là N bài toán cho trước trên X_i, tương ứng. Khi đó dạng tổng quát của Bài toán (P) là bài toán tìm một phần tử $x^\dagger$ trong X_1 sao cho $x^\dagger$ là một nghiệm của bài toán (P_1), $A_1(x^\dagger)$ là một nghiệm của bài toán (P_2)... và $A_{N-1}(A_{N-2}(\ldots A_2(A_1(x^\dagger))))$ là một nghiệm của bài toán (P_N). Ta ký hiệu bài toán này là (GP). Có nhiều bài toán thực tế có thể được mô hình ở dạng Bài toán (GP). Chẳng hạn, bài toán cân bằng trong dây chuyền sản xuất, số lượng bán thành phẩm ở quá trình sản xuất trước phải bằng số lượng yêu cầu ở quá trình sản xuất tiếp theo. Năm 2019, Reich và Tuyen lần đầu tiên đề xuất và nghiên cứu mô hình bài toán dạng trên, gọi là bài toán chấp nhận tách tổng quát (GSFP).

Từ những phân tích trên, chúng tôi đặt ra và nghiên cứu một số lớp bài toán tổng quát hơn Bài toán (GSFP).

• Thứ nhất là bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra, viết tắt là SFPMOS. Bài toán được phát biểu như sau: Cho H, H_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ là các không gian Hilbert thực, $T_i : H \to H_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$ là các toán tử tuyến tính bị chặn, $C \subseteq H$ và $Q_i \subseteq H_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$ là các tập con lồi, đóng, khác rỗng.

$$\text{Tìm } x^\dagger \in \Omega^{\text{SFPMOS}} := C \cap (\cap_{i=1}^{N} T_i^{-1}(Q_i)) \neq \emptyset, \tag{SFPMOS}$$

tức là, $x^\dagger \in C$ và $T_i x^\dagger \in Q_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, N$.

Một ví dụ thực tế của lớp Bài toán (SFPMOS) là bài toán phân loại ảnh thông qua máy học véctơ hỗ trợ với bộ dữ liệu MNIST.

• Thứ hai là bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra, viết tắt là SCFPPMOS. Bài toán được phát biểu như sau: Cho H và H_i là các không gian Hilbert thực và $T_i : H \to H_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$ là các toán tử tuyến tính bị chặn. Cho $S_j : H \to H$, $j = 1, 2, \ldots, M$, $\Xi_k^i : \ H_i \to H_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $k = 1, 2, \ldots, M_i$ là các ánh xạ không giãn.

$$\text{Tìm phần tử } x^* \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}, \tag{SCFPPMOS}$$

trong đó $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} := \big(\cap_{j=1}^{M} \operatorname{Fix}(S_j)\big) \cap \Bigg(\cap_{i=1}^{N} T_i^{-1}\big(\cap_{k=1}^{M_i} \operatorname{Fix}(\Xi_k^i)\big)\Bigg)$.

Mục tiêu của luận án là nghiên cứu đề xuất các thuật toán giải lớp bài toán chấp nhận tách, bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra trong các không gian Hilbert thực. Cụ thể như sau:

- Nghiên cứu thuật toán kiểu CQ kết hợp với phương pháp lặp Halpern, phương pháp xấp xỉ mềm giải bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra và bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra.
- Sử dụng kỹ thuật chiếu lai ghép, kỹ thuật chiếu thu hẹp, đề xuất các thuật toán giải bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra.
- Áp dụng các thuật toán đề xuất cho một số bài toán liên quan.
- Xây dựng và tính toán ví dụ số minh họa cho các thuật toán đề xuất.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo, luận án được trình bày trong ba chương.

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Chương 2. Bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra

Chương 3. Bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Hilbert như các khái niệm và tính chất cơ bản trong không gian Hilbert, lý thuyết về tập lồi và hàm lồi, phép chiếu mêtric, dưới vi phân và cực tiểu phiếm hàm lồi, ánh xạ không giãn. Cuối cùng, chúng tôi đề cập đến ba bổ đề bổ trợ dùng để chứng minh các kết quả chính của luận án.

1.1 Sơ lược về không gian Hilbert

1.2 Dưới vi phân và bài toán cực tiểu phiếm hàm lồi

1.3 Ánh xạ không giãn

1.4 Một số bổ đề bổ trợ

Chương 2

Bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu và đề xuất một số phương pháp lặp xấp xỉ nghiệm bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra trong các không gian Hilbert thực dựa trên các tiếp cận tối ưu. Nội dung của chương được viết trên cơ sở các bài báo (CT1) và (CT2) trong Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án.

2.1 Tiếp cận tối ưu giải bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra

Đầu tiên chúng tôi phát biểu lại bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra đã đề cập trong phần Mở đầu: Cho H và H_i, $i = 1, 2, \dots, N$ là các không gian Hilbert thực; $T_i : H \to H_i$, $i = 1, 2, \dots, N$ là các toán tử tuyến tính bị chặn; $C \subseteq H$ và $Q_i \subseteq H_i$ là các tập con lồi, đóng và khác rỗng của các không gian Hilbert thực H và H_i, $i = 1, 2, \dots, N$ tương ứng.

$$\text{Tìm phần tử } x^\dagger \in C \text{ sao cho } T_i x^\dagger \in Q_i,\ \forall i = 1, 2, \dots, N. \tag{2.1}$$

Ký hiệu Ω^{SFPMOS} là tập nghiệm của Bài toán (2.1), tức là

$$\Omega^{\text{SFPMOS}} = \{x^\dagger \in C \mid T_i x^\dagger \in Q_i,\ \forall i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Trong chương này, chúng tôi luôn giả thiết $\Omega^{\text{SFPMOS}} \neq \emptyset$.

2.1.1 Tiếp cận tối ưu thứ nhất

Xét hàm $g : H \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$g(x) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \|(I - P_{Q_i}) T_i x\|^2,\ \forall x \in H.$$

Ta thấy g là một hàm lồi trên H. Ngoài ra, dễ thấy Bài toán (2.1) tương đương với bài toán tối ưu có ràng buộc:

$$\min_{x \in C} g(x).$$

Do đó, $x^\dagger$ là nghiệm của Bài toán (2.1) khi và chỉ khi

$$0 \in \nabla g(x^\dagger) + N_C(x^\dagger).$$

Điều này tương đương với

$$0 \in \sum_{i=1}^{N} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x^\dagger + N_C(x^\dagger).$$

Từ định nghĩa của nón pháp tuyến và đặc trưng của phép chiếu mêtric, bao hàm thức này tương đương với

$$x^\dagger = P_C\big[x^\dagger - \gamma \sum_{i=1}^{N} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x^\dagger\big], \tag{2.2}$$

trong đó γ là một số thực dương. Từ đẳng thức (2.2), phần tử $x^\dagger$ là nghiệm của Bài toán (2.1) khi và chỉ khi nó là điểm bất động của ánh xạ $S : H \to H$ được xác định bởi

$$S := P_C\big[I - \gamma \sum_{i=1}^{N} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i\big].$$

Từ phân tích này, chúng tôi nghiên cứu và đề xuất thuật toán sau đây xấp xỉ nghiệm Bài toán (2.1).

Thuật toán 2.1.1.

Bước 0. – Với xấp xỉ ban đầu $x_0 \in C$ tùy ý;

– Cỡ bước $\{\gamma_n\}$ thỏa mãn điều kiện

$$0 < a \leq \gamma_n \leq b < \frac{2}{N \max_{i=\overline{1,N}}\{\|T_i\|^2\}}, \ n \geq 0. \tag{γ1}$$

Đặt $n := 0$.

Bước 1. Tính

$$x_{n+1} = P_C\big[x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^{N} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n\big].. \tag{2.3}$$

Bước 2. Đặt $n := n + 1$ và quay lại **Bước 1**.

Ta có kết quả sau đây.

Định lý 2.1.1. *Dãy* $\{x_n\}$ *được xác định bởi Thuật toán 2.1.1 hội tụ yếu đến một nghiệm của Bài toán* (2.1).

Nhận xét 2.1.2. i) Khi $N = 1, H = \mathbb{R}^n$, Thuật toán 2.1.1 trở thành thuật toán CQ của Byrne đề xuất năm 2002 giải Bài toán (SFP);

ii) Khi $N = 1$, Thuật toán 2.1.1 trở thành Thuật toán của Xu đề xuất năm 2010 để giải Bài toán (SFP) trong không gian Hilbert thực vô hạn chiều.

Để thu được sự hội tụ mạnh, chúng tôi kết hợp Thuật toán 2.1.1 với phương pháp lặp Halpern. Ta có thuật toán sau đây.

Thuật toán 2.1.2.

Bước 0. – Cho trước $x_0, u \in C$.
– Cỡ bước $\{\gamma_n\}$ thỏa mãn điều kiện $(\gamma 1)$;
– Tham số $\{\alpha_n\}$ thỏa mãn điều kiện

$$\{\alpha_n\} \subset (0, 1),\ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty. \tag{α}$$

Đặt $n := 0$.

Bước 1. Tính

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) P_C\big[x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^{N} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n\big]. \tag{2.8}$$

Bước 2. Đặt $n := n + 1$ và quay lại **Bước 1**.

Sự hội tụ mạnh của Thuật toán 2.1.2 được khẳng định trong định lý dưới đây.

Định lý 2.1.3. *Dãy* $\{x_n\}$ *được xác định bởi Thuật toán 2.1.2 hội tụ mạnh về* $P_{\Omega^{\mathrm{SFPMOS}}}\, u$.

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu và đề xuất thuật toán tổng quát hơn, khi thay u bởi giá trị của một ánh xạ co.

Thuật toán 2.1.3.

Bước 0. – Cho trước $y_0 \in C$;

– Cỡ bước $\{\gamma_n\}$ thỏa mãn điều kiện $(\gamma 1)$;

– Tham số $\{\alpha_n\}$ thỏa mãn điều kiện (α);

– Ánh xạ co $f : H \to C$ với hệ số co $c \in [0, 1)$.

Đặt $n := 0$

Bước 1. Tính

$$y_{n+1} = \alpha_n f(y_n) + (1 - \alpha_n) P_C[y_n - \gamma_n \sum_{i=1}^{N} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i y_n]. \tag{2.19}$$

Bước 2. Đặt $n := n + 1$ và quay lại **Bước 1**.

Sự hội tụ mạnh của dãy lặp được sinh bởi Thuật toán 2.1.3 được thiết lập trong định lý sau.

Định lý 2.1.4. *Dãy $\{y_n\}$ được sinh bởi Thuật toán 2.1.3 hội tụ mạnh về một phần tử $x^\dagger \in \Omega^{\mathrm{SFPMOS}}$, là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân*

$$\langle (I - f)x^\dagger, y - x^\dagger \rangle \geq 0, \ \forall y \in \Omega^{\mathrm{SFPMOS}}. \qquad (\mathrm{VIP}(I - f, \Omega^{\mathrm{SFPMOS}}))$$

2.1.2 Tiếp cận tối ưu thứ hai

Xét hàm $h(x) : H \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$h(x) := (\max_{i=1,2,\dots,N} f_i)(x), \ \forall x \in H$$

và

$$f_i(x) := \frac{1}{2} \|(I - P_{Q_i}) T_i x\|^2, \ i = 1, 2, \dots, N.$$

Dễ thấy Bài toán (2.1) tương đương với bài toán tối ưu có ràng buộc

$$\min_{x \in C} h(x). \tag{2.21}$$

Từ đây phần tử $x^\dagger$ là nghiệm của Bài toán (2.21) nếu và chỉ nếu

$$0 \in \partial h(x^\dagger) + N_C(x^\dagger).$$

Mặt khác, ta có

$$\partial(\max_{i=1,2,\dots,N} f_i)(x^\dagger) \supseteq \mathrm{co}\{ \bigcup_{i \in I(x^\dagger)} \partial f_i(x^\dagger) \},$$

với $I(x^\dagger) := \big\{i \in \{1,2,\dots,N\} \mid f_i(x^\dagger) = (\max\limits_{i=1,2,\dots,N} f_i)(x^\dagger)\big\}$. Do đó, nếu phần tử $x^\dagger \in H$ thỏa mãn

$$\mathrm{co}\{\bigcup_{i\in I(x^\dagger)} \partial f_i(x^\dagger)\} + N_C(x^\dagger) \ni 0 \tag{2.22}$$

thì $x^\dagger$ là một nghiệm của Bài toán (2.21) cũng có nghĩa $x^\dagger$ là nghiệm của Bài toán (2.1).

Bao hàm thức (2.22) tương đương với

$$x^\dagger = P_C[x^\dagger - \gamma \sum_{i\in I(x^\dagger)} \lambda_i T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x^\dagger], \tag{2.23}$$

trong đó $\lambda_i \geq 0$ với mọi $i \in I(x^\dagger)$, $\sum\limits_{i\in I(x^\dagger)} \lambda_i = 1$ và γ là một số thực dương bất kỳ.

Đẳng thức (2.23) gợi ý cho chúng tôi xây dựng hai thuật toán dưới đây xấp xỉ nghiệm Bài toán (2.1) dựa trên phương pháp lặp Halpern và phương pháp xấp xỉ mềm.

Thuật toán 2.1.4.

Bước 0. Cho trước $x_0 \in C$ và tham số $\{\rho_n\} \subset [a,b] \subset (0,2)$ và đặt $n := 0$.

Bước 1. Tính

$$x_{n+1} = P_C[x_n - \gamma_n \sum_{i\in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n\}], \tag{2.24}$$

trong đó $I(x_n) = \{i \mid \|T_i x_n - P_{Q_i}T_i x_n\| = \max\limits_{i=1,2,\dots,N} \|T_i x_n - P_{Q_i}T_i x_n\|\}$, $\lambda_{i,n} \geq 0$ với mọi $i \in I(x_n)$, $\sum\limits_{i\in I(x_n)} \lambda_{i,n} = 1$ và nếu đặt $d_n = \max\limits_{i=1,2,\dots,N} \|T_i x_n - P_{Q_i}T_i x_n\|$ thì cỡ bước $\{\gamma_n\}$ được xác định bởi

$$\gamma_n = \begin{cases} \rho_n \dfrac{d_n^2}{\|\sum\limits_{i\in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n\|^2} & \text{nếu } \|\sum\limits_{i\in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I-P_{Q_i})T_i x_n\| > 0, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases} \tag{$\gamma 2$}$$

Bước 2. Đặt $n := n+1$ và quay lại **Bước 1**.

Định lý 2.1.5. *Dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi Thuật toán 2.1.4 hội tụ yếu đến một phần tử thuộc Ω^{SFPMOS}.*

Hệ quả sau đây chỉ ra rằng định lý trên vẫn đúng với một chỉ số $i_n \in I(x_n)$ cụ thể.

Hệ quả 2.1.6. *Với mỗi $x_0 \in C$, dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi phương pháp lặp sau:*

$$\begin{cases} \text{Chọn } i_n \text{ sao cho } \|T_{i_n}x_n - P_{Q_{i_n}}T_{i_n}x_n\| = \max\limits_{i=1,2,\ldots,N} \|T_ix_n - P_{Q_i}T_ix_n\|, \\ x_{n+1} = P_C[x_n - \gamma_n T_{i_n}^*(I - P_{Q_{i_n}})T_{i_n}x_n], \; n \geq 0, \end{cases}$$

trong đó $\{\gamma_n\}$ được định nghĩa bởi

$$\gamma_n = \begin{cases} \rho_n \dfrac{\|T_{i_n}x_n - P_{Q_{i_n}}T_{i_n}x_n\|^2}{\|T_{i_n}^*(I - P_{Q_{i_n}})T_{i_n}x_n\|^2}, & \text{nếu } \|T_{i_n}^*(I - P_{Q_{i_n}})T_{i_n}x_n\| > 0, \\ 0, & \text{nếu ngược lại,} \end{cases}$$

và $\{\rho_n\} \subset [a,b] \subset (0,2)$. Khi đó dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến một phần tử trong Ω^{SFPMOS}.

Bằng cách kết hợp Thuật toán 2.1.4 với phương pháp xấp xỉ mềm chúng tôi xây dựng thuật toán sau để giải Bài toán (2.1) và thiết lập được sự hội tụ mạnh.

Thuật toán 2.1.5.

Bước 0. – Với xấp xỉ ban đầu $x_0 \in C$ tùy ý;
– Tham số $\{\rho_n\} \subset [a,b] \subset (0,2)$;
– Tham số $\{\alpha_n\}$ thỏa mãn điều kiện (α);
– Ánh xạ co $f : H \to C$ với hệ số co $c \in [0,1)$.

Đặt $n := 0$.

Bước 1. Tính

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)P_C[x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_ix_n\}], \quad (2.33)$$

trong đó $I(x_n) = \{i \mid \|T_ix_n - P_{Q_i}T_ix_n\| = \max\limits_{i=1,\ldots,N} \|T_ix_n - P_{Q_i}T_ix_n\|\}$, $\lambda_{i,n} \geq 0$ với mọi $i \in I(x_n)$, $\sum\limits_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} = 1$, cỡ bước $\{\gamma_n\}$ thỏa mãn điều kiện $(\gamma 2)$.

Bước 2. Đặt $n := n+1$ và quay lại **Bước 1**.

Ta có định lý sau về sự hội tụ mạnh của Thuật toán 2.1.5.

Định lý 2.1.7. *Dãy $\{x_n\}$ xác định Thuật toán 2.1.5 hội tụ mạnh tới $x^\dagger$, là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân $VIP(I - f, \Omega^{\mathrm{SFPMOS}})$.*

Định lý trên vẫn đúng với $i_n \in I(x_n)$ cụ thể.

Hệ quả 2.1.8. *Với mỗi $x_0 \in C$, cho dãy $\{x_n\}$ là một dãy được xác định bởi phương pháp lặp:*

$$\begin{cases} \text{Chọn } i_n \text{ sao cho } \|T_{i_n}x_n - P_{Q_{i_n}}T_{i_n}x_n\| = \max\limits_{i=1,2,\ldots,N} \|T_ix_n - P_{Q_i}T_ix_n\|, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)P_C[x_n - \gamma_n T_{i_n}^*(I - P_{Q_{i_n}})T_{i_n}x_n], \ n \geq 0, \end{cases}$$

trong đó $\{\gamma_n\}$ được xác định bởi

$$\gamma_n = \begin{cases} \rho_n \dfrac{\|T_{i_n}x_n - P_{Q_{i_n}}T_{i_n}x_n\|^2}{\|T_{i_n}^*(I - P_{Q_{i_n}})T_{i_n}x_n\|^2}, & \text{nếu } \ \|T_{i_n}^*(I - P_{Q_{i_n}})T_{i_n}x_n\| > 0, \\ 0, & \text{nếu ngược lại,} \end{cases}$$

dãy $\{\rho_n\} \subset [a,b] \subset (0,2)$ và $f : H \to C$ là ánh xạ co với hệ số co $c \in [0,1)$. Nếu dãy $\{\alpha_n\}$ thỏa mãn (α) thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới $x^\dagger$, là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân $VIP(I - f, \Omega^{\text{SFPMOS}})$.

2.2 Áp dụng và ví dụ minh họa

2.2.1 Áp dụng cho bài toán chấp nhận tách tổng quát

Ta biết rằng, khi $H = H_1$, $C = C_1$, $Q_i = C_{i+1}, 1 \leq i \leq N-1$, $T_1 = A_1$, $T_2 = A_2A_1, \ldots$ và $T_{N-1} = A_{N-1}A_{N-2}\ldots A_1$ thì Bài toán (SFPMOS) trở thành Bài toán (GSFP). Do đó chúng ta có thể sử dụng các thuật toán và định lý trong Mục 2.1 để giải bài toán này. Bằng cách thay $T_1 = A_1$, $T_2 = A_2A_1, \ldots$, và $T_{N-1} = A_{N-1}A_{N-2}\ldots A_1$ thì dãy lặp xác định bởi năm thuật toán vừa đề xuất hội tụ tới nghiệm của Bài toán (GSFP).

2.2.2 Ví dụ số minh họa

Trong phần này, chúng tôi trình bày ba ví dụ số minh họa cho hiệu quả của các thuật toán đề xuất. Ví dụ 2.2.5 sử dụng các Thuật toán 2.1.1, 2.1.4, 2.1.3, 2.1.5 để giải Bài toán (GSFP) trong không gian hữu hạn chiều và dãy $\{x_n\}$ xác định bởi các Thuật toán 2.1.3, 2.1.5 hội tụ về nghiệm chính xác $x^\dagger = (0,0,0,0)$ của bài toán đang xét. Ví dụ 2.2.6 sử dụng các Thuật toán 2.1.3 và 2.1.5 giải Bài toán (SFPMOS) trong không gian hữu hạn chiều, tuy nhiên ta thấy rằng dãy $\{x_n\}$ xác định bởi hai thuật toán trên hội tụ đến một phần tử thuộc tập nghiệm của bài toán đang xét và ta ko tính được chính xác nghiệm này. Cuối cùng, Ví dụ 2.2.7 minh họa cho hiệu quả của các thuật toán đề xuất để giải Bài toán (SFPMOS) trong không gian vô hạn chiều. Trong tóm tắt này, chúng tôi trình bày vắn tắt Ví dụ 2.2.7.

Ví dụ 2.2.7. Xét trên không gian $L^2[0,1]$, cho $a_0(t) = \sin t$ và $a_i(t) = t^i$ với mọi $i = \overline{1,100}$ và ta xác định các tập con lồi, đóng và khác rỗng sau đây:

$$C = \{x \in L^2[0,1] \mid \langle a_0, x\rangle \le 1\};\ Q_i = \{x \in L^2[0,1] \mid \langle a_i, x\rangle \le 0\}.$$

Các ánh xạ chuyển $T_i : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ được xác định bởi $T_i x = ix$ với mọi $i = \overline{1,100}$. Xét bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra như sau.

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega^{\text{SFPMOS}} := C \ \cap \left(\cap_{i=1}^{100} T_i^{-1}(Q_i)\right). \tag{2.44}$$

Dễ thấy $\Omega^{\text{SFPMOS}} \neq \emptyset$ vì $0 \in \Omega^{\text{SFPMOS}}$.

Ta minh họa sự hội tụ của dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi Thuật toán 2.1.1 với tham số $\gamma_n = 10^{-6}$ và sự hội tụ của dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi Thuật toán 2.1.4 với tham số γ_n thỏa mãn Định lý 2.1.5 trong đó $\rho_n = 0.15$. Ta sử dụng điều kiện dừng $\text{TOL}_n := \|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon$, trong đó ε là một ngưỡng sai số cho trước.

Để kiểm chứng sự hội tụ của các dãy lặp xác định bởi các thuật toán này tới một phần tử thuộc tập nghiệm của bài toán đang xét, chúng ta xác định thêm tham số

$$m := \max\{\langle a_0, x_n\rangle - 1, \max_{i=\overline{1,100}}\{\langle a_i, T_i x_n\rangle\}.$$

Chú ý rằng, nếu $m \le 0$ thì x_n là một nghiệm của Bài toán (2.44).

Với phần tử ban đầu $x_0(t) = e^t$, ta thu được kết quả số của Thuật toán 2.1.1 và 2.1.4 được trình bày trong Bảng 2.4 của luận án.

Từ kết quả số được trình bày trong Bảng 2.4, ta thấy Thuật toán 2.1.4 hội tụ nhanh hơn so với Thuật toán 2.1.1 trong ví dụ này .

Tiếp theo, ta minh họa sự hội tụ của dãy $\{x_n\}$ xác định bởi Thuật toán 2.1.3 với $\alpha_n = n^{-0.5}, \gamma_n = 5.10^{-5}$ và ánh xạ co $f :\ L^2[0,1] \to C$ xác định bởi $f(x) = P_C(0.25x)$, với mọi $x \in L^2[0,1]$. Đồng thời ta cũng minh họa sự hội tụ của Thuật toán 2.1.5 với các tham số $\alpha_n = n^{-0.5}$, tham số γ_n thỏa mãn Định lý 2.1.5 trong đó $\rho_n = 1.75$ và ánh xạ co $f : L^2[0,1] \to C$ xác định bởi $f(x) = P_C(0.25x)$ với mọi $x \in L^2[0,1]$. Dễ thấy rằng $x^*(t) = 0$ là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân $\langle (I - f)x^\dagger, y - x^\dagger\rangle \ge 0,\ \forall y \in \Omega^{\text{SFPMOS}}$. Do đó, ta sử dụng điều kiện dừng $\text{TOL}_n := \|x_n\| < \varepsilon$ với ε là một ngưỡng sai số cho trước.

ε		**Thuật toán 2.1.1**	**Thuật toán 2.1.4**
10^{-4}	TOL_n	9.8880×10^{-5}	9.6610×10^{-5}
	n	138	58
	m	1.2567	0.0032
	TG (giây)	0.1136	0.0362
10^{-5}	TOL_n	9.984×10^{-6}	9.9286×10^{-6}
	n	494	65
	m	1.0543	0.0010
	TG (giây)	0.2629	0.0398
10^{-6}	TOL_n	9.9946×10^{-7}	7.3721×10^{-7}
	n	1717	73
	m	0.8486	2.7883×10^{-4}
	TG (giây)	0.6776	0.0410
10^{-14}	TOL_n	1.0000×10^{-14}	9.1730×10^{-15}
	n	3808549	129
	m	0.0057	3.1103×10^{-8}
	TG (giây)	1.2760×10^{3}	0.0621

Bảng 2.4: Kết quả tính toán số của Thuật toán 2.1.1 và 2.1.4

Ta thu được kết quả số của Thuật toán 2.1.3 và Thuật toán 2.1.5 được trình bày trong Bảng 2.5 của luận án.

	Thuật toán 2.1.3			**Thuật toán 2.1.5**		
ε	TOL_n	n	TG (giây)	TOL_n	n	TG (giây)
10^{-4}	6.2940×10^{-5}	11	0.0137	8.0584×10^{-5}	10	0.0106
10^{-5}	6.6040×10^{-6}	16	0.0174	7.7238×10^{-6}	15	0.0127
10^{-6}	9.8876×10^{-7}	21	0.0309	7.6813×10^{-7}	21	0.0218

Bảng 2.5: Kết quả tính toán số của Thuật toán 2.1.3 và 2.1.5

Bảng 2.5 cho thấy tốc độ hội tụ của Thuật toán 2.1.3 và Thuật toán 2.1.5 gần như nhau trong ví dụ này.

Chương 3

Bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu và đề xuất một số phương pháp lặp xấp xỉ nghiệm bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra trong các không gian Hilbert thực dựa trên thuật toán kiểu CQ và các thuật toán chiếu. Các kết quả của chương này được viết trên cơ sở các bài báo (CT3) và (CT4) trong Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án.

3.1 Thuật toán và sự hội tụ

Trong chương này chúng tôi xét bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra đã được đề cập trong phần Mở đầu của luận án.

3.1.1 Một thuật toán kiểu CQ

Thuật toán được đề xuất có lược đồ như sau.

Thuật toán 3.1.1.

Bước 0. – Với xấp xỉ ban đầu $x_0 \in H$ tùy ý;
– Tham số $\{\rho_n\} \subset [c, d] \subset (0, 1)$;
– Tham số $\{\alpha_n\}$ thỏa mãn điều kiện (α);
– $\{a_n\}$ là một dãy bị chặn;
– Ánh xạ co $f : H \to H$ với hệ số co $c \in [0, 1)$.
Đặt $n := 1$.

Bước 1. Tính $y_{j,n} = S_j x_n$ với mọi $j = 1, 2, \ldots, M$ và đặt

$$d_n = \max_{j=1,2,\ldots,M} \{\|y_{j,n} - x_n\|\},$$
$$L_n = \{j \in \{1, 2, \ldots, M\} \mid \|y_{j,n} - x_n\| = d_n\}.$$

Bước 2. Tính $z^i_{k,n} = \Xi^i_k(T_i x_n)$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, N$ và $k = 1, 2, \ldots, M_i$, đặt

$$d_{i,n} = \max_{k=1,2,\ldots,M_i}\{\|z^i_{k,n} - T_i x_n\|\},\ i = 1, 2, \ldots, N,$$
$$L_{i,n} = \{k \in \{1, 2, \ldots, M_i\} \mid \|z^i_{k,n} - T_i x_n\| = d_{i,n}\}, i = 1, 2, \ldots, N.$$

Bước 3. Đặt $\Gamma_n := \max\big\{d_n, \max_{i=1,2,\ldots,N}\{d_{i,n}\}\big\}$.

Nếu $d_n = \Gamma_n$ thì chọn $j_n \in L_n$ và đặt $t_n = y_{j_n,n}$, $\Theta = I$.

Ngược lại, nếu $d_{i_n,n} = \Gamma_n$ thì chọn $k_n \in L_{i_n,n}$, và đặt $t_n = z^{i_n}_{k_n,n}$, $\Theta = T_{i_n}$.

Bước 4. Tính $u_n = x_n - \delta_n \Theta^*(\Theta x_n - t_n)$, trong đó

$$\delta_n = \rho_n \frac{\|\Theta x_n - t_n\|^2}{\|\Theta^*(\Theta x_n - t_n)\|^2 + a_n}. \qquad (\delta_n)$$

Bước 5. Tính $x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)u_n$, $n \geq 0$.

Đặt $n := n + 1$ và quay lại **Bước 1**.

Định lý sau đây trình bày về sự hội tụ của dãy lặp xác định bởi Thuật toán 3.1.1.

Định lý 3.1.3. *Dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi Thuật toán 3.1.1 hội tụ mạnh tới một phần tử $x^\dagger \in \Omega^{\mathrm{SCFPPMOS}}$, là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân VIP$(I - f, \Omega^{\mathrm{SFPMOS}})$ với Ω^{SFPMOS} được thay bởi $\Omega^{\mathrm{SCFPPMOS}}$.*

3.1.2 Thuật toán chiếu lai ghép

Thuật toán 3.1.2. Với xấp xỉ ban đầu $x_0 \in H$ tùy ý, đặt $n := 1$, lược đồ xác định dãy $\{x_n\}$ bởi thuật toán chiếu lai ghép gồm năm bước với các Bước 1, 2, 3 được thực hiện như Thuật toán 3.1.1 và Bước 4, 5 được thực hiện như sau:

Bước 4. Xác định các tập con C_n và Q_n của H như sau:

$$C_n = \{z \in H \mid \|t_n - \Theta z\| \leq \|\Theta x_n - \Theta z\|\},$$
$$Q_n = \{z \in H \mid \langle x_0 - x_n, z - x_n\rangle \leq 0\}.$$

Bước 5. Tính $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0$. Đặt $n := n + 1$ và quay lại **Bước 1**.

Sự hội tụ mạnh của dãy $\{x_n\}$ được xây dựng bởi Thuật toán 3.1.2 được thể hiện trong định lý sau.

Định lý 3.1.7. *Giả sử các giả thiết của Bài toán* (SCFPPMOS) *được thoả mãn. Khi đó dãy $\{x_n\}$ được xây dựng bởi Thuật toán 3.1.2 hội tụ mạnh tới $x^\dagger = P_{\Omega^{\mathrm{SCFPPMOS}}}\, x_0$ khi $n \to \infty$.*

3.1.3 Thuật toán chiếu thu hẹp

Thuật toán 3.1.3. Với Với mỗi $x_0 \in H$, đặt $C_0 = H$ và $n := 1$, lược đồ xác định dãy $\{x_n\}$ bởi thuật toán chiếu thu hẹp gồm năm bước với các Bước 1, 2, 3, cũng được thực hiện như Thuật toán 3.1.1 và Bước 4, 5 được thực hiện như sau:

Bước 4. Xác định các tập con C_{n+1} của H như sau:

$$C_{n+1} = \{z \in C_n \mid \|t_n - \Theta z\| \leq \|\Theta x_n - \Theta z\|\}.$$

Bước 5. Tính $x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0$. Đặt $n := n + 1$ và quay lại **Bước 1**.

Định lý 3.1.12. *Giả sử các giả thiết của Bài toán* (SCFPPMOS) *được thoả mãn. Khi đó dãy $\{x_n\}$ được xây dựng bởi Thuật toán 3.1.3 hội tụ mạnh tới $x^\dagger = P_{\Omega^{\text{SCFPPMOS}}}\, x_0$.*

3.2 Một số áp dụng

3.2.1 Áp dụng cho bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra

Chúng ta xem xét bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra trong trường hợp tổng quát hơn bài toán phát biểu ở phần Mở đầu. Bài toán phát biểu như sau: Cho H, H_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ là các không gian Hilbert thực; $T_i : \; H \to H_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$ là các toán tử tuyến tính bị chặn; C_j, $j = 1, 2, \ldots, M$ là các tập con lồi, đóng của H; Q^i_k, $i = 1, 2, \ldots, N$ và $k = 1, 2, \ldots, M_i$ là các tập con lồi, đóng của H_i tương ứng.

$$\begin{aligned}&\text{Tìm phần tử } x^\dagger \in C_j,\ \forall j = 1, 2, \ldots, M \text{ sao cho}\\ &T_i x^\dagger \in Q^i_k,\ \forall i = 1, 2, \ldots, N;\ k = 1, 2, \ldots, M_i.\end{aligned} \tag{GSFPMOS}$$

Ký hiệu Ω^{GSFPMOS} là tập nghiệm của Bài toán (GSFPMOS) và ta luôn giả sử rằng $\Omega^{\text{GSFPMOS}} \neq \emptyset$.

Trong Thuật toán 3.1.1, 3.1.2 và 3.1.3 thay $S_j = P_{C_j}$ với mọi $j = 1, 2, \ldots, M$ và $\Xi^i_k = P_{Q^i_k}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, N$, $k = 1, 2, \ldots, M_i$, ta thu được các thuật toán kiểu CQ, thuật toán chiếu lai ghép và thuật toán chiếu co hẹp tương ứng để giải Bài toán (GSFPMOS) mà không cần biết thông tin về chuẩn của toán tử chuyển.

3.2.2 Bài toán điểm bất động chung tách cho ánh xạ không giãn

Áp dụng Thuật toán 3.1.1, 3.1.2 và 3.1.3 trong trường hợp $N = 1$ ta thu được ba thuật toán tương ứng giải bài toán điểm bất động chung tách cho ánh xạ không giãn.

3.2.3 Bài toán điểm bất động cho ánh xạ không giãn

Áp dụng Thuật toán 3.1.1, 3.1.2 và 3.1.3, ta cũng có các thuật toán tương ứng để giải bài toán điểm bất động cho ánh xạ không giãn được trình bày trong Hệ quả 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7 của luận án.

3.3 Ví dụ số minh họa

Phần này giới thiệu ba ví dụ số để minh họa cho tính hiệu quả của các thuật toán đề xuất. Ví dụ 3.3.1 và 3.3.2 sử dụng ba thuật toán đề xuất để giải bài toán (SFPMOS) và (SCFPPMOS) trong không gian hữu hạn chiều. Ví dụ 3.3.1 minh họa dãy lặp sinh ra bởi các thuật toán đề xuất hội tụ đến một phần tử trong tập nghiệm của bài toán nhưng ta không xác định được chính xác nghiệm này. Ví dụ 3.3.2 chỉ ra dãy lặp sinh bởi các thuật toán đề xuất hội tụ tới một nghiệm chính xác của bài toán. Ví dụ 3.3.3 giải bài toán ở Ví dụ 2.2.7 bằng phương pháp chiếu lai ghép và phương pháp chiếu thu hẹp. Trong tóm tắt này, chúng tôi trình bày vắn tắt Ví dụ 3.3.2.

Ví dụ 3.3.2. Cho các hàm lồi g, g_1, g_2, g_3 và g_4 xác định trên $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^6$ tương ứng và được xác định bởi:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 - 1)^2, \ \forall\, x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5;\\
g_1(y) &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - 5)^2, \ \forall\, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2;\\
g_2(z) &= \frac{1}{2}(2z_1 + z_2 - z_3 - 4)^2, \ \forall\, z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3;\\
g_3(u) &= \frac{1}{2}(u_1 - u_2 - u_3 + u_4 - 1)^2, \ \forall\, u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4;\\
g_4(v) &= \frac{1}{2}(v_1 + 2v_2 - v_3 + v_4 + v_5 + v_6)^2, \ \forall\, v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) \in \mathbb{R}^6.
\end{aligned}$$

Cho các ánh xạ tuyến tính bị chặn

$T_1 :\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $T_1 y = [y_1, y_2]^\top$.
$T_2 :\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $T_2 z = [z_1, z_2, z_3]^\top$.
$T_3 :\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ xác định bởi $T_3 u = [u_1, u_2, u_3, u_4]^\top$.
$T_4 :\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ xác định bởi $T_4 v = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6]^\top$.

Ma trận của các ánh xạ chuyển T_1, T_2, T_3, T_4 tương ứng như sau.

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Xét bài toán: Tìm phần tử $x^* \in \mathbb{R}^5$ sao cho

$$x^* \in \arg\min_{x \in \mathbb{R}^5} g(x); \quad T_1 x^* \in \arg\min_{y \in \mathbb{R}^2} g_1(y); \quad T_2 x^* \in \arg\min_{z \in \mathbb{R}^3} g_2(z);$$
$$T_3 x^* \in \arg\min_{u \in \mathbb{R}^4} g_3(u); \quad T_4 x^* \in \arg\min_{v \in \mathbb{R}^6} g_4(v) \ .$$

Không khó để kiểm tra được g và g_i, $i = 1, 2, 3, 4$ là các hàm lồi và $\Omega = \{(a - b + c + 3, a, b, c, 1) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ là tập nghiệm của bài toán đang xét.

Dễ thấy, bài toán trên tương đương với bài toán: Tìm phần tử $x^* \in \mathbb{R}^5$ sao cho:

$$x^* \in \nabla g^{-1}(0); T_1 x^* \in \nabla g_1^{-1}(0); T_2 x^* \in \nabla g_2^{-1}(0);$$
$$T_3 x^* \in \nabla g_3^{-1}(0); T_4 x^* \in \nabla g_4^{-1}(0).$$

Trong ví dụ này, ∇g và ∇g_i, $i = 1, 2, 3, 4$ là các toán tử đơn điệu cực đại do đó $(I + \nabla g)^{-1}$ và $(I + \nabla g_i)^{-1}$ với mọi $i = 1, 2, 3, 4$ là các ánh xạ không giãn. Vì vậy bài toán trên tương đương với bài toán tìm điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra: Tìm phần tử $x^* \in \mathbb{R}^5$ sao cho

$$x^* \in \operatorname{Fix}\left((I + \nabla g)^{-1}\right); \ T_1 x^* \in \operatorname{Fix}\left((I + \nabla g_1)^{-1}\right); \ T_2 x^* \in \operatorname{Fix}\left((I + \nabla g_2)^{-1}\right);$$
$$T_3 x^* \in \operatorname{Fix}\left((I + \nabla g_3)^{-1}\right); \quad T_4 x^* \in \operatorname{Fix}\left((I + \nabla g_4)^{-1}\right).$$

Ký hiệu Ω^{SCFPPMOS} là tập nghiệm của bài toán tìm điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra này. Khi đó

$$\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \equiv \Omega = \{(a - b + c + 3, a, b, c, 1) : \ a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Chúng tôi minh họa sự hội tụ của các Thuật toán 3.1.1; 3.1.2 và 3.1.3 trong đó các ánh xạ không giãn $S = (I + \nabla g)^{-1}; \Xi_i = (I + \nabla g_i)^{-1}$ với mọi $i = 1, 2, 3, 4$, các tham số $\alpha_n = n^{-1}, a_n = 0.00001, \rho_n = 0.95,$

$x_0 = (1, -1, 1, -1, 1)$, ánh xạ co $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ là hàm hằng xác định bởi $f(x_n) = x_0$, với mọi $n \geq 1$. Dãy $\{x_n\}$ xác định bởi các thuật toán trên sẽ hội tụ mạnh tới $x^* = P_{\Omega^{\text{SCFPPMOS}}}\, x_0 = (0.75, -0.75, 0.75, -0.75, 1)$. Trong trường hợp này, ta dễ nhận thấy $x^* = (0.75, -0.75, 0.75, -0.75, 1)$ cũng là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân $\text{VIP}(I - f, \Omega^{\text{SFPMOS}})$ trong đó thay tập Ω^{SFPMOS} bởi tập Ω^{SCFPPMOS}. Ta sử dụng điều kiện

$$\text{TOL}_n := \|x_n - x^*\| < \varepsilon,$$

với ε là một ngưỡng sai số cho trước để dừng quá trình lặp.

Với phần tử ban đầu $x_0 = (1, -1, 1, -1, 1)$, Bảng 3.3 minh họa cho sự hội tụ của ba thuật toán đề xuất.

ε		**Thuật toán 3.1.1**	**Thuật toán 3.1.2**	**Thuật toán 3.1.3**
10^{-4}	TOL_n	9.9881×10^{-5}	9.9141×10^{-5}	5.2862×10^{-5}
	n	621	175	14
	TG (giây)	0.0400	1.3368	0.0820
10^{-5}	TOL_n	9.9965×10^{-6}	9.9752×10^{-6}	4.6409×10^{-6}
	n	2526	979	19
	TG (giây)	0.1313	5.9919	0.1082
10^{-6}	TOL_n	9.9998×10^{-7}	9.9967×10^{-7}	9.1672×10^{-7}
	n	23854	3899	23
	TG (giây)	1.1318	26.6064	0.1204

Bảng 3.3: Kết quả tính toán số của Thuật toán 3.1.1; 3.1.2 và 3.1.3

Kết quả số ở Bảng 3.3 cho thấy với cùng một ngưỡng sai số, Thuật toán 3.1.3 cần thời gian và số bước lặp ít nhất, trong khi đó Thuật toán 3.1.2 cần số bước lặp ít hơn Thuật toán 3.1.1 nhưng cần nhiều thời gian hơn.

Kết luận

Luận án tập trung nghiên cứu đề xuất các thuật toán giải Bài toán (SFPMOS) và Bài toán (SCFPPMOS). Các thuật toán được nghiên cứu dựa trên phương pháp CQ, phương pháp lặp Halpern, phương pháp xấp xỉ mềm và phương pháp chiếu.

1. Những kết quả chính đã đạt được trong luận án

- Chúng tôi đề xuất được 5 thuật toán giải Bài toán (SFPMOS) (Thuật toán 2.1.1–2.1.5), đề xuất và chứng minh các định lý hội tụ yếu và hội tụ mạnh của các thuật toán này. Các thuật toán này được chúng tôi phát triển từ thuật toán CQ của Byrne cho bài toán chấp nhận tách trong không gian hữu hạn chiều dựa trên cách tiếp cận tối ưu. Ưu điểm của các Thuật toán 2.1.1–2.1.3 là sự đơn giản trong tính toán tại mỗi bước lặp. Ưu điểm của các Thuật toán 2.1.4 và 2.1.5, ngoài sự đơn giản trong tính toán tại mỗi bước lặp, là cỡ bước không phụ thuộc vào thông tin về chuẩn của các toán tử chuyển. Kết quả này được thể hiện trong công trình (CT1) và (CT2).

- Chúng tôi đề xuất được 3 thuật toán xấp xỉ nghiệm của Bài toán (SCFPPMOS) (Thuật toán 3.1.1–3.1.3) đồng thời đề xuất và chứng minh các định lý hội tụ yếu và hội tụ mạnh của các thuật toán này. Bằng việc sử dụng phương pháp CQ, kỹ thuật chiếu lai ghép và kỹ thuật chiếu thu hẹp kết hợp với phương pháp xấp xỉ mềm, chúng tôi thiết kế các thuật toán với cỡ bước tự thích nghi. Kết quả này được thể hiện trong công trình (CT3) và (CT4).

- Các thuật toán này được áp dụng cho bài toán chấp nhận tách tổng quát, bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra, bài toán điểm bất động chung tách với ánh xạ không giãn hay bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn. Các kết quả thử nghiệm số trong không gian Hilbert thực hữu hạn chiều cũng như vô hạn chiều cho thấy hiệu quả của các phương pháp đề xuất.

2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Sau đây là các hướng mà chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu sau khi hoàn thành luận án.

- Nghiên cứu về bài toán chấp nhận tách cùng với các bài toán liên quan trong không gian Banach.
- Nghiên cứu Bài toán (SFPMOS) khi ít nhất một tập ràng buộc không lồi hoặc ít nhất một ánh xạ chuyển không là ánh xạ tuyến tính.
- Nghiên cứu tính ổn định của các thuật toán khi các dữ liệu đầu vào có nhiễu.
- Nghiên cứu đánh giá tốc độ hội tụ của các thuật toán.

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án

(CT1) Reich S., Tuyen T.M., Ha M.T.N. (2020), "The split feasibility problem with multiple output sets in Hilbert spaces", *Optim. Lett.,* **14**, pp. 2335–2353 (SCIE-Q2).

(CT2) Reich S., Tuyen T.M., Ha M.T.N. (2021), "An optimization approach to solving the split feasibility problem in Hilbert spaces", *J. Global Optim.,* **70**, pp. 837–852 (SCIE-Q1).

(CT3) Kim J.K., Tuyen T.M., Ha M.T.N. (2021), "Two projection methods for solving the split common fixed point problem with multiple output sets in Hilbert spaces", *Numer. Funct. Anal. Optim.,* **42**(8), pp. 973–988 (SCIE-Q2).

(CT4) Reich S., Tuyen T.M., Thuy N.T.T., Ha M.T.N. (2022), "A new self-adaptive algorithm for solving the split common fixed point problem with multiple output sets in Hilbert spaces", *Numer. Algorithms*, **89**, pp. 1031–1047 (SCIE-Q1).