

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MAI THỊ NGỌC HÀ

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LẬP GIẢI  
BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH VỚI NHIỀU TẬP ĐẦU RA  
TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2024

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MAI THỊ NGỌC HÀ

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LẬP GIẢI  
BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH VỚI NHIỀU TẬP ĐẦU RA  
TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Ngành đào tạo: Toán ứng dụng  
Mã số: 9.46.01.12

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Tập thể hướng dẫn khoa học:

PGS.TS. Trương Minh Tuyên

PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

Thái Nguyên – 2024

## Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan những kết quả trình bày trong luận án này, dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Trương Minh Tuyên và PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, là trung thực và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình của ai khác. Các kết quả viết chung với tập thể hướng dẫn và các cộng sự đã được sự đồng ý khi đưa vào luận án.

*Thái Nguyên, tháng 4 năm 2024*

**Nghiên cứu sinh**

**Mai Thị Ngọc Hà**

## Lời cảm ơn

Luận án này được thực hiện và hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS. Trương Minh Tuyên và PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy.

Trước hết, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới Thầy hướng dẫn, PGS.TS. Trương Minh Tuyên. Tôi vô cùng biết ơn sự giúp đỡ tận tình và quý báu mà Thầy đã dành cho tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận án. Nhờ những ý tưởng, những góp ý, hướng dẫn của Thầy, những tài liệu bổ ích mà Thầy đã cung cấp cùng với sự chu đáo, trách nhiệm và tận tâm với học trò đã khích lệ, động viên rất lớn đối với tôi, là động lực giúp tôi vượt qua khó khăn, vững tin thực hiện quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tôi xin chân thành cảm ơn PGS.TS Nguyễn Thị Thu Thủy đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, nhiệt tình giúp đỡ tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án. Cô không chỉ là người hướng dẫn mà còn như người chị động viên, chỉ bảo cho tôi cả các vấn đề trong cuộc sống, giúp tôi lấy lại tinh thần khi gặp khó khăn để tôi có thể hoàn thành luận án này.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên và các thành viên trong nhóm Xê mi na bộ môn Toán ứng dụng và Tin học đã quan tâm, trao đổi và góp ý cho tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các thầy, các anh chị và các bạn trong nhóm Xê mi na liên cơ quan Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Hà Nội, Đại học Bách khoa Hà Nội, Viện nghiên cứu cao cấp về Toán. Nhóm đã tạo điều kiện cho tôi được học hỏi và bổ sung kiến thức trong quá trình nghiên cứu.

Tôi cũng rất biết ơn Khoa Toán – Tin cũng như Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Công tác quản lý đào tạo và môi trường nghiên cứu của Khoa và Trường đã góp phần không nhỏ để luận án này được hoàn thành.

Tôi xin chân thành cảm ơn các Thầy cô và các anh chị em trong bộ môn

Khoa học Tự nhiên nói riêng, Khoa Khoa học Cơ bản và Trường Đại học Nông lâm, Đại học Thái Nguyên nói chung. Đơn vị đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi yên tâm học tập, nghiên cứu và công tác. Sự quan tâm và những lời động viên khích lệ của các thầy cô, các anh chị em và các bạn đã giúp tôi rất nhiều trong việc hoàn thành luận án của mình.

Cuối cùng tôi muốn gửi lời cảm ơn sâu sắc tới bạn bè và gia đình tôi. Anh chị em, bạn bè luôn giúp đỡ động viên tôi cả trong cuộc sống và công việc nghiên cứu khoa học. Gia đình chính là điểm tựa giúp tôi vượt qua khó khăn để hoàn thành luận án. Qua đây, tôi muốn gửi lời cảm ơn tới bố mẹ hai bên, chồng và con tôi đã luôn ở bên động viên, giúp đỡ và chia sẻ công việc gia đình cũng như kinh tế để tôi yên tâm học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Nghiên cứu sinh

Mai Thị Ngọc Hà

# Mục lục

<b>Lời cam đoan</b>	<b>ii</b>
<b>Lời cảm ơn</b>	<b>iii</b>
<b>Một số ký hiệu và chữ viết tắt</b>	<b>vii</b>
<b>Danh sách bảng</b>	<b>x</b>
<b>Danh sách hình vẽ</b>	<b>xi</b>
<b>Mở đầu</b>	<b>1</b>
<b>Chương 1 Một số kiến thức chuẩn bị</b>	<b>10</b>
1.1 Sơ lược về không gian Hilbert . . . . .	10
1.2 Dưới vi phân của hàm lồi và bài toán cực tiểu phiếm hàm lồi . .	13
1.3 Ánh xạ không giãn . . . . .	25
1.4 Một số bổ đề bổ trợ . . . . .	26
<b>Chương 2 Bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra</b>	<b>28</b>
2.1 Tiếp cận tối ưu giải bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra	28
2.1.1 Tiếp cận tối ưu thứ nhất . . . . .	29
2.1.2 Tiếp cận tối ưu thứ hai . . . . .	40
2.2 Áp dụng và ví dụ minh họa . . . . .	52
2.2.1 Áp dụng cho bài toán chấp nhận tách tổng quát . . . . .	52
2.2.2 Ví dụ số minh họa . . . . .	54
<b>Chương 3 Bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra</b>	<b>63</b>
3.1 Thuật toán và sự hội tụ . . . . .	63
3.1.1 Một thuật toán kiểu CQ . . . . .	64
3.1.2 Thuật toán chiếu lai ghép . . . . .	72
3.1.3 Thuật toán chiếu thu hẹp . . . . .	76

3.2	Một số áp dụng . . . . .	79
3.2.1	Áp dụng cho bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra	79
3.2.2	Áp dụng cho bài toán điểm bất động chung tách của ánh xạ không giãn . . . . .	80
3.2.3	Áp dụng cho bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn	83
3.3	Ví dụ số minh họa . . . . .	84
	<b>Kết luận</b>	<b>93</b>
	<b>Danh mục các công trình đã công bố</b>	<b>95</b>
	<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>96</b>

# Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$H$	không gian Hilbert thực
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$	tập hợp các số thực, số thực không âm tương ứng
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	tích vô hướng trên $H$
$\ \cdot\ $	chuẩn trên $H$
$I$	toán tử đồng nhất $I$
$T^*$	toán tử liên hợp của $T$
$x^\top$	chuyển vị của véctơ $x$
$\emptyset$	tập hợp rỗng
$\{x_n\}$	dãy $x_n$
$x_n \rightharpoonup x$	dãy $x_n$ hội tụ yếu đến $x$ khi $n \rightarrow \infty$
$x_n \rightarrow x$	dãy $x_n$ hội tụ mạnh đến $x$ khi $n \rightarrow \infty$
$\forall$	với mọi
$x \in C$	$x$ thuộc $C$
$x \notin C$	$x$ không thuộc $C$
$\exists$	tồn tại
$l^2$	không gian các dãy số thực bình phương khả tổng
$L^2[0, 1]$	không gian các hàm bình phương khả tích trên $[0, 1] \subset \mathbb{R}$
$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy $\{x_n\}$
$N_C(x_0)$	nón pháp tuyến của $C$ tại $x_0$
$\text{int } C$	phần trong của tập $C$
$\text{co } C$	bao lồi của tập $C$
$P_C$	phép chiếu mê tric từ $H$ lên tập $C$
$\sup M$	cận trên đúng của tập hợp số $M$
$\inf M$	cận dưới đúng của tập hợp số $M$



$\min M$	giá trị nhỏ nhất của tập hợp số $M$
$\max M$	giá trị lớn nhất của tập hợp số $M$
$\arg \min_{x \in C} F(x)$	tập các điểm cực tiểu của hàm $F$ trên $C$
$i_C(x)$	hàm chỉ của tập $C$
$d_C(x)$	hàm khoảng cách từ điểm $x \in H$ tới tập $C$
$\text{dom } f$	miền hữu hiệu của hàm $f$
$\text{epi } f$	trên đồ thị của hàm $f$
$\partial f(x)$	dưới vi phân của hàm $f$ tại $x$
$\nabla f(x)$	gradient của hàm $f$ tại $x$
$\cap$	phép giao của các tập hợp
$\cup$	phép hợp của các tập hợp
$\text{Fix}(S)$	tập các điểm bất động của ánh xạ $S$
$A^{-1}(0)$	tập các không điểm của toán tử $A$
$J_r^A$	toán tử giải của toán tử $A$
SFP	bài toán chấp nhận tách
$\Omega^{\text{SFP}}$	tập nghiệm của bài toán chấp nhận tách
MSSFP	bài toán chấp nhận tách đa tập
SCNPP	bài toán không điểm chung tách
MSCNPP	bài toán không điểm chung tách đa tập
SCFPP	bài toán điểm bất động chung tách
$\Omega^{\text{SCFPP}}$	tập nghiệm của bài toán điểm bất động chung tách
CFPP	bài toán điểm bất động
$\Omega^{\text{CFPP}}$	tập nghiệm của bài toán điểm bất động
GSFP	bài toán chấp nhận tách tổng quát
$\Omega^{\text{GSFP}}$	tập nghiệm của bài toán chấp nhận tách tổng quát
SFPMOS	bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra
$\Omega^{\text{SFPMOS}}$	tập nghiệm của bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra
SCFPPMOS	bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra

$\Omega^{\text{SCFPPMOS}}$	tập nghiệm của bài toán (SCFPPMOS)
TG	Thời gian

## Danh sách bảng

2.1	Kết quả tính toán số của Thuật toán 2.1.1 và 2.1.4 . . . . .	55
2.2	Kết quả tính toán số của Thuật toán 2.1.3 và 2.1.5 . . . . .	56
2.3	Kết quả tính toán số của Thuật toán 2.1.3 và 2.1.5 . . . . .	57
2.4	Kết quả tính toán số của Thuật toán 2.1.1 và Thuật toán 2.1.4	59
2.5	Kết quả tính toán số của Thuật toán 2.1.3 và 2.1.5 . . . . .	60
3.1	Kết quả tính toán số của Thuật toán 3.1.1 . . . . .	85
3.2	Kết quả tính toán số của Thuật toán 3.1.2 và 3.1.3 . . . . .	86
3.3	Kết quả tính toán số của Thuật toán 3.1.1; 3.1.2 và 3.1.3 . . . .	89
3.4	Kết quả tính toán số của Thuật toán 3.1.2 và Thuật toán 3.1.3	90

## Danh sách hình vẽ

2.1	Dáng điệu của hàm $TOL_n$ với điều kiện dừng $TOL_n < 10^{-5}$ . . .	55
2.2	Dáng điệu của hàm $TOL_n$ với điều kiện dừng $TOL_n < 10^{-5}$ . . .	56
2.3	Dáng điệu của hàm $TOL_n$ với điều kiện dừng $TOL_n < 10^{-4}$ . . .	58
2.4	Dáng điệu của hàm $TOL_n$ với điều kiện dừng $TOL_n < 10^{-6}$ . . .	60
2.5	Dáng điệu của hàm $TOL_n$ với điều kiện dừng $TOL_n < 10^{-6}$ . . .	61
3.1	Dáng điệu của hàm $TOL_n$ với điều kiện dừng $TOL_n < 10^{-6}$ . . .	86
3.2	Dáng điệu của hàm $TOL_n$ với điều kiện dừng $TOL_n < 10^{-3}$ . . .	86
3.3	Dáng điệu của hàm $TOL_n$ với điều kiện dừng $TOL_n < 10^{-4}$ . . .	90
3.4	Dáng điệu của hàm $TOL_n$ với điều kiện dừng $TOL_n < 10^{-6}$ . . .	91

# Mở đầu

## 1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Mô hình bài toán chấp nhận tách (SFP) lần đầu tiên được giới thiệu và nghiên cứu bởi Censor và Elfving vào năm 1994. Bài toán (SFP) được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm phần tử } x^\dagger \in C \text{ sao cho } T(x^\dagger) \in Q \quad (\text{SFP})$$

trong đó  $C$  và  $Q$  lần lượt là các tập con lồi, đóng và khác rỗng trong các không gian Hilbert thực  $H_1$  và  $H_2$ ,  $T : H_1 \rightarrow H_2$  là một toán tử tuyến tính bị chặn (còn được gọi là toán tử chuyển).

Mặc dù mô hình toán học của Bài toán (SFP) rất đơn giản, nhưng nó rất tổng quát vì bao hàm nhiều bài toán quan trọng khác như là một trường hợp riêng. Dễ thấy rằng, bài toán tìm một điểm trong giao của các tập lồi, còn gọi là bài toán chấp nhận lồi, là một trường hợp riêng của Bài toán (SFP). Về mặt ứng dụng trực tiếp, trong các tài liệu [7, 9, 11, 13] các tác giả đã đưa ra một số ứng dụng của Bài toán (SFP) cho một số mô hình thực tế, như bài toán tái tạo hình ảnh trong y tế, mô hình IMRT (Intensity-Modulated Radiation Therapy) trong bức xạ trị liệu, bài toán truyền dữ liệu... bằng cách xây dựng các tập  $C$ ,  $Q$  và toán tử  $T$  phù hợp.

Để giải Bài toán (SFP), năm 1994, Censor và Elfving [11] đã đề xuất phương pháp lặp song song và phương pháp lặp xoay vòng dựa trên phương pháp chiếu Bregman. Tuy nhiên, các thuật toán này và các thuật toán đề xuất sau đó (xem [7]) có hạn chế là mỗi bước lặp đều liên quan đến việc tính các ma trận nghịch đảo. Việc tính ma trận nghịch đảo tại mỗi bước lặp dẫn đến chi phí tính toán cao đối với những bài toán cỡ lớn trong thực tế. Để khắc phục hạn chế này, năm 2002, Byrne [8] đã đề xuất thuật toán CQ trong không gian hữu hạn chiều khi các tập  $C$  và  $Q$  được chọn sao cho có thể dễ dàng tính được hình chiếu lên các tập này. Trong trường hợp các tập  $C$  và  $Q$  không được cho dưới dạng đặc biệt thì việc tính toán phép chiếu lên chúng, nói chung, là khó khăn.

Bằng cách tiếp cận tối ưu, năm 2010, Xu [59] đã cải tiến thuật toán CQ để giải Bài toán (SFP) trong không gian Hilbert thực vô hạn chiều. Cụ thể hơn, với xấp xỉ ban đầu  $x_0 \in H_1$  tùy ý, dãy lặp  $\{x_n\}$  được xác định bởi

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \gamma T^*(I - P_Q)Tx_n), \quad n \geq 0, \quad (0.1)$$

ở đây  $T^*$  là toán tử liên hợp của  $T$ .

Tác giả đã chỉ ra rằng dãy lặp (0.1) chỉ cho sự hội tụ yếu với cỡ bước được chọn phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển,  $\gamma \in (0, 2/\|T\|^2)$ . Mặt khác, trong [59, Example 3.7], tác giả cũng đã chỉ ra một ví dụ về sự tồn tại của các tập  $C$ ,  $Q$  và toán tử  $T$  trong không gian Hilbert thực vô hạn chiều mà dãy lặp (0.1) chỉ hội tụ yếu mà không hội tụ mạnh. Đồng thời, tác giả [59, Proposition 3.2] đã chứng minh tập nghiệm của Bài toán (SFP) trùng với tập điểm bất động của ánh xạ không giãn  $S : H_1 \rightarrow H_1$  có dạng:

$$S := P_C[I - \gamma T^*(I - P_Q)T]$$

với  $\gamma \in (0, 2/\|T\|^2)$ . Do đó, ta có thể áp dụng các phương pháp tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn, chẳng hạn phương pháp lặp Mann [27], phương pháp lặp Halpern [21], phương pháp xấp xỉ gắn kết [28] ... để giải Bài toán (SFP).

Một dạng suy rộng của Bài toán (SFP) là bài toán chấp nhận tách đa tập hợp (MSSFP). Bài toán này được Censor và các cộng sự [12] đề xuất nghiên cứu vào năm 2005 và được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^\dagger \in \bigcap_{i=1}^N C_i \text{ sao cho } T(x^\dagger) \in \bigcap_{j=1}^M Q_j, \quad (\text{MSSFP})$$

trong đó  $C_1, C_2, \dots, C_N$  là  $N$  tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực  $H_1$ .  $Q_1, Q_2, \dots, Q_M$  là  $M$  tập con lồi, đóng, và khác rỗng của không gian Hilbert thực  $H_2$ .

Năm 2006, Xu [58] đã mở rộng thuật toán CQ để giải Bài toán (MSSFP) dựa trên tiếp cận phương pháp điểm bất động. Trong [58], tác giả đã chỉ ra tập nghiệm của Bài toán (MSSFP) trùng với tập điểm bất động chung của họ ánh xạ không giãn  $T_i : H_1 \rightarrow H_1$  được xác định bởi

$$T_i := P_{C_i}(I - \gamma \nabla g), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

ở đây  $g := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \beta_j \|Tx - P_Q Tx\|^2$ ,  $\beta_j > 0$  với mọi  $j = 1, 2, \dots, N$ . Tác giả đề xuất và chứng minh sự hội tụ yếu của dãy lặp được xác định bởi thuật toán lặp Picard, thuật toán lặp xoay vòng và thuật toán lặp song song giải Bài toán (MSSFP). Để thu được sự hội tụ mạnh, nhiều nhà toán học đã nghiên cứu kết hợp thuật toán CQ với phương pháp xấp xỉ gắn kết, phương pháp chiếu lai ghép, phương pháp chiếu thu hẹp, phương pháp lặp Halpern ... (xem [6, 14, 19, 22, 40, 41, 58] và các tài liệu được trích dẫn trong đó). Tuy nhiên, các phương pháp này đều sử dụng cỡ bước cố định phụ thuộc vào thông tin về chuẩn của toán tử chuyển  $T$  ở mỗi bước lặp. Trong thực tế việc tính toán chuẩn của một toán tử tuyến tính bị chặn thường không đơn giản. Do vậy việc đưa ra các tiêu chuẩn để lựa chọn cỡ bước lặp khi không biết thông tin về chuẩn của toán tử chuyển là một chủ đề có ý nghĩa trong thực hành tính toán. Trong những năm gần đây, nhiều tác giả đã nghiên cứu cải tiến phương pháp CQ để giải Bài toán (SFP) hay (MSSFP) sao cho cỡ bước không phụ thuộc vào thông tin về chuẩn của toán tử chuyển, chẳng hạn phương pháp tự thích nghi (xem [4, 15, 18, 23, 25, 47, 61–65]).

Bên cạnh hướng nghiên cứu về việc xây dựng các thuật toán giải hiệu quả các Bài toán (SFP) và (MSSFP), một số hướng nghiên cứu mở rộng, áp dụng các kết quả của Bài toán (SFP) hay (MSSFP) sang lớp các bài toán liên quan khác như bài toán không điểm chung tách, bài toán điểm bất động tách, bài toán điểm bất động chung tách ... và ngược lại; nghiên cứu mở rộng các kết quả từ không gian Hilbert sang không gian Bannach; nghiên cứu tính ổn định; nghiên cứu tốc độ hội tụ của các phương pháp; đặc biệt là nghiên cứu các lớp bài toán tổng quát hơn Bài toán (MSSFP) được nhiều nhà toán học quan tâm (xem [35, 36, 42, 43, 54]).

Ta biết rằng nếu  $C$  là một tập con lồi và đóng của không gian Hilbert thực  $H_1$  thì tập điểm cực tiểu của hàm chỉ

$$i_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in C, \\ \infty & \text{nếu } x \notin C, \end{cases}$$

là  $\arg \min_{H_1} i_C(x) = C$ . Do đó, ta nhận được  $C = (\partial i_C)^{-1}(0)$ , với  $\partial i_C$  là dưới vi phân của  $i_C$ . Rockafellar [33] đã chỉ ra rằng  $\partial i_C$  là một toán tử đơn điệu cực

đại. Ngoài ra,  $C$  cũng là tập không điểm của toán tử đơn điệu  $A$  xác định bởi  $A = I - P_C$ . Do đó, ta có thể xem Bài toán (SFP) là trường hợp riêng của bài toán không điểm chung tách (SCNPP). Bài toán này được phát biểu như sau: Cho  $A : H_1 \rightarrow 2^{H_1}$  và  $B : H_2 \rightarrow 2^{H_2}$  là các toán tử đơn điệu cực đại,  $T : H_1 \rightarrow H_2$  là một toán tử tuyến tính bị chặn.

$$\text{Tìm phần tử } x^\dagger \in A^{-1}(0) \cap T^{-1}(B^{-1}(0)). \quad (\text{SCNPP})$$

Một số kết quả nổi bật về các thuật toán giải Bài toán (SCNPP) có thể tham khảo trong các tài liệu [2, 10, 17, 24, 44, 45, 52] và nhiều tài liệu khác.

Dạng suy rộng của Bài toán (SCNPP) là bài toán không điểm chung tách đa tập hợp (MSSCNPP) được mô tả như sau: Cho  $A_i : H_1 \rightarrow 2^{H_1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  và  $B_j : H_2 \rightarrow 2^{H_2}$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  là các toán tử đơn điệu cực đại trong  $H_1$  và  $H_2$ , tương ứng.

$$\text{Tìm phần tử } x^\dagger \in \bigcap_{i=1}^N A_i^{-1}(0) \cap T^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^M B_j^{-1}(0)\right). \quad (\text{MSSCNPP})$$

Nếu  $A$  là một toán tử đơn điệu cực đại trong  $H_1$  thì toán tử giải của  $A$ ,  $J_r^A = (I + rA)^{-1}$  là một ánh xạ không giãn, xác định trên toàn không gian  $H_1$  và  $A^{-1}(0) = \text{Fix}(J_r^A)$  với mọi  $r > 0$ , trong đó  $\text{Fix}(J_r^A)$  là tập điểm bất động của  $J_r^A$  (xem [5, Proposition 23.38]). Như vậy, Bài toán (SCNPP) hay Bài toán (MSSCNPP) có thể đưa về các bài toán điểm bất động chung tách tương ứng. Dạng tổng quát của bài toán điểm bất động chung tách (SCFPP) được phát biểu như sau: Cho  $S_i : H_1 \rightarrow H_1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  và  $\Xi_j : H_2 \rightarrow H_2$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  là các ánh xạ không giãn trên  $H_1$  và  $H_2$ , tương ứng. Cho  $T : H_1 \rightarrow H_2$  là toán tử tuyến tính bị chặn.

$$\text{Tìm phần tử } x^\dagger \in \bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(S_i) \cap T^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^M \text{Fix}(\Xi_j)\right). \quad (\text{SCFPP})$$

Một số kết quả nghiên cứu về Bài toán (SCFPP) có thể xem tại [3, 29, 37–39, 46, 48, 49, 55, 60] và các tài liệu liên quan trong đó.

Ta nhận thấy rằng các Bài toán (SFP), (SCFPP), (SCNPP) cùng với các bài toán liên quan khác, có thể viết ở dạng bài toán tổng quát sau: Cho  $X$  và  $Y$  là hai không gian Hilbert hoặc Banach và cho  $T : X \rightarrow Y$  là một ánh xạ từ  $X$  vào  $Y$ . Giả sử  $(P_1)$  và  $(P_2)$  là hai bài toán cho trước trên  $X$  và  $Y$ ,



tương ứng. Xét bài toán tìm một phần tử  $x^\dagger$  trong  $X$  sao cho  $x^\dagger$  là một nghiệm của bài toán  $(P_1)$  và  $T(x^\dagger)$  là một nghiệm của bài toán  $(P_2)$ . Ta ký hiệu bài toán này là  $(P)$ . Dạng tổng quát của Bài toán  $(P)$  được phát biểu như sau: Cho  $X_1, X_2, \dots, X_N$  là các không gian Hilbert hoặc Banach và cho các ánh xạ  $A_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ , là các ánh xạ từ  $X_i$  vào  $X_{i+1}$ . Giả sử  $(P_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , là  $N$  bài toán cho trước trên  $X_i$ , tương ứng. Khi đó dạng tổng quát của Bài toán  $(P)$  là bài toán tìm một phần tử  $x^\dagger$  trong  $X_1$  sao cho  $x^\dagger$  là một nghiệm của bài toán  $(P_1)$ ,  $A_1(x^\dagger)$  là một nghiệm của bài toán  $(P_2)$ ,... và  $A_{N-1}(A_{N-2}(\dots A_2(A_1(x^\dagger))))$  là một nghiệm của bài toán  $(P_N)$ . Ta ký hiệu bài toán này là  $(GP)$ . Có nhiều bài toán thực tế có thể được mô hình ở dạng Bài toán  $(GP)$ . Chẳng hạn, bài toán cân bằng trong dây chuyền sản xuất, số lượng bán thành phẩm ở quá trình sản xuất trước phải bằng số lượng yêu cầu ở quá trình sản xuất tiếp theo. Năm 2019, Reich và Tuyen [31] lần đầu tiên đề xuất và nghiên cứu mô hình bài toán dạng trên, gọi là bài toán chấp nhận tách tổng quát (GSFP) như sau: Cho  $H_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  là các không gian Hilbert thực và cho  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  là các tập con lồi, đóng và khác rỗng của  $H_i$ , tương ứng. Cho  $A_i : H_i \rightarrow H_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  là các toán tử tuyến tính bị chặn sao cho

$$\Omega := C_1 \cap A_1^{-1}(C_2) \cap \dots \cap A_1^{-1}(A_2^{-1} \dots (A_{N-1}^{-1}(C_N))) \neq \emptyset.$$

$$\text{Tìm phần tử } x^\dagger \in \Omega, \quad (\text{GSFP})$$

tức là,  $x^\dagger \in C_1$ ,  $A_1 x^\dagger \in C_2, \dots, A_{N-1} A_{N-2} \dots A_1 x^\dagger \in C_N$ . Các tác giả đã đề xuất một thuật toán mới dựa trên cải tiến của thuật toán CQ, kết hợp với phương pháp xấp xỉ mềm để giải Bài toán (GSFP) và chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp xác định bởi một thuật toán đến nghiệm của Bài toán (GSFP).

Từ những phân tích trên, chúng tôi đặt ra và nghiên cứu một số lớp bài toán tổng quát hơn Bài toán (GSFP).

- Thứ nhất là bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra, viết tắt là (SFPMOS). Bài toán được phát biểu như sau: Cho  $H$ ,  $H_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  là các không gian Hilbert thực,  $T_i : H \rightarrow H_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  là các toán tử tuyến tính bị chặn,  $C \subseteq H$  và  $Q_i \subseteq H_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  là các tập con lồi, đóng, khác rỗng.

$$\text{Tìm phần tử } x^\dagger \in \Omega^{\text{SFPMOS}} := C \cap (\cap_{i=1}^N T_i^{-1}(Q_i)) \neq \emptyset, \quad (\text{SFPMOS})$$

tức là,  $x^\dagger \in C$  và  $T_i x^\dagger \in Q_i$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ .

- (a) Nếu  $N = 1$  thì Bài toán (SFPMOS) trở thành Bài toán (SFP).
- (b) Nếu  $H = H_1$ ,  $C = C_1$ ,  $Q_i = C_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq N - 1$ ,  $T_1 = A_1$ ,  $T_2 = A_2 A_1, \dots$  và  $T_{N-1} = A_{N-1} A_{N-2} \dots A_1$  thì Bài toán (SFPMOS) trở thành Bài toán (GSFP).

Một ví dụ thực tế của lớp Bài toán (SFPMOS) là bài toán phân loại ảnh thông qua máy học vectơ hỗ trợ với bộ dữ liệu MNIST (xem [50, 51]).

• Thứ hai là bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra, viết tắt là (SCFPPMOS). Bài toán được phát biểu như sau: Cho  $H$  và  $H_i$  là các không gian Hilbert thực và  $T_i : H \rightarrow H_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  là các toán tử tuyến tính bị chặn. Cho  $S_j : H \rightarrow H$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ ,  $\Xi_k^i : H_i \rightarrow H_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $k = 1, 2, \dots, M_i$  là các ánh xạ không giãn.

$$\text{Tìm phần tử } x^* \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}, \quad (\text{SCFPPMOS})$$

trong đó  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} := \left( \bigcap_{j=1}^M \text{Fix}(S_j) \right) \cap \left( \bigcap_{i=1}^N T_i^{-1} \left( \bigcap_{k=1}^{M_i} \text{Fix}(\Xi_k^i) \right) \right)$ .

- (a) Nếu  $M = M_i = 1$  và  $S_1 = P_C$ ,  $\Xi_1^i = P_{Q_i}$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$  thì Bài toán (SCFPPMOS) trở thành Bài toán (SFPMOS).
- (b) Nếu  $N = 1$  thì Bài toán (SCFPPMOS) là bài toán điểm bất động chung tách cho các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert.
- (c) Nếu  $H_i \equiv H$  và  $\Xi_k^i = I$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $k = 1, 2, \dots, M_k$  thì Bài toán (SCFPPMOS) trở thành bài toán tìm một điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn  $S_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ .

Ta thấy Bài toán (SFPMOS) và Bài toán (SCFPPMOS) chứa đựng nhiều bài toán quan trọng như bài toán chấp nhận tách, bài toán điểm bất động, bài toán chấp nhận tách tổng quát như là các trường hợp riêng [31, 50, 51]. Đây cũng là lớp bài toán đang được quan tâm nghiên cứu, đặc biệt là các phương pháp giải (xem [16, 32, 51, 53, 56]) do tính bao quát và phạm vi ứng dụng rộng rãi của bài toán chấp nhận tách và bài toán điểm bất động.

## 2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu của luận án là nghiên cứu đề xuất các thuật toán giải lớp bài toán chấp nhận tách, bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra trong các không gian Hilbert thực. Cụ thể như sau:

- Nghiên cứu thuật toán kiểu CQ kết hợp với phương pháp lặp Halpern, phương pháp xấp xỉ mềm cho bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra và bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra.
- Sử dụng kỹ thuật chiếu lai ghép, kỹ thuật chiếu thu hẹp, đề xuất thuật toán giải bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra.
- Áp dụng các thuật toán đề xuất cho một số bài toán liên quan.
- Xây dựng và tính toán ví dụ số minh họa cho các thuật toán đề xuất.

## 3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là một số lớp bài toán chấp nhận tách trong không gian Hilbert thực: Bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra; Bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra.

Phạm vi nghiên cứu: Luận án tập trung nghiên cứu đề xuất một số thuật toán mới dựa trên cải tiến, mở rộng phương pháp kiểu CQ kết hợp với phương pháp xấp xỉ mềm, phương pháp chiếu lai ghép và phương pháp chiếu thu hẹp để giải các lớp bài toán trên.

## 4. Cách tiếp cận, phương pháp nghiên cứu

Để nghiên cứu các nội dung nêu trên, chúng tôi sử dụng các kiến thức và kỹ thuật của giải tích hàm, giải tích lồi, tối ưu hóa, lý thuyết điểm bất động. Chúng tôi tiếp cận bài toán bằng cách sử dụng các kỹ thuật cổ điển như phương pháp chiếu, phương pháp lặp với các kỹ thuật khác nhau như tìm kiếm độ dài bước thích nghi, kỹ thuật lai ghép, kỹ thuật thu hẹp.

## 5. Kết quả của luận án

Một số kết quả mới đã đạt được của luận án như sau.

- Đề xuất năm thuật toán kiểu CQ kết hợp với phương pháp lặp Halpern, phương pháp xấp xỉ mềm và chứng minh sự hội của chúng. Thuật toán thứ nhất, thứ hai và thứ ba sử dụng cách tiếp cận tối ưu thứ nhất giải Bài toán (SFP MOS) trong các không gian Hilbert thực với cỡ bước lặp phụ thuộc vào thông tin về chuẩn của toán tử chuyển. Thuật toán thứ tư và thứ năm sử dụng cách tiếp cận tối ưu thứ hai với cỡ bước được xây dựng tự thích nghi giải bài toán này.
- Đề xuất thuật toán kiểu CQ, thuật toán chiếu lai ghép, thuật toán chiếu thu hẹp và chứng minh sự hội tụ của các dãy lặp sinh bởi các thuật toán này về nghiệm của Bài toán (SCFPP MOS) trong không gian Hilbert thực.
- Áp dụng các thuật toán đề xuất giải một số bài toán liên quan và thực hiện các tính toán số minh họa trong các không gian hữu hạn chiều cũng như vô hạn chiều.

Nội dung của luận án được viết dựa trên kết quả của 4 bài báo được công bố trên các tạp chí SCIE Q1/Q2. Các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại:

- Hội thảo “Những hướng mới trong tối ưu tính toán và ứng dụng”, ngày 26–27/12/2021 tại Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán.
- Hội thảo “Tối ưu và Tính toán khoa học lần thứ 20”, ngày 21–23/4/2022 tại Ba Vì.
- Hội thảo “Một số vấn đề trong Toán học đương đại”, ngày 10/11/2020 tại Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên.
- Hội nghị “Toán học Miền Trung – Tây Nguyên lần thứ 4”, ngày 25–27/8/2022 tại Trường Đại học Sư phạm – Đại học Huế.
- Xê mi na Bộ môn Toán ứng dụng và Tin học, Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên các năm 2020 – 2024.

## 6. Bố cục của luận án

Ngoài phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo, luận án được trình bày trong ba chương.

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Chương 2. Bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra

Chương 3. Bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra

# Chương 1

## Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Hilbert thực và một số kết quả bổ trợ được sử dụng trong các chương tiếp theo. Nội dung của chương được chia thành 5 mục: Mục 1.1 sơ lược lại các kiến thức về không gian Hilbert thực. Mục 1.2 nhắc lại về tập lồi và hàm lồi, một số kiến thức cơ bản về dưới vi phân của hàm lồi và bài toán cực tiểu phiếm hàm lồi. Mục 1.3 đề cập đến các kiến thức liên quan đến ánh xạ không giãn như tính lồi, đóng của tập điểm bất động và nguyên lý nửa đóng. Cuối cùng Mục 1.4 trình bày một số bổ đề bổ trợ phục vụ cho việc chứng minh các định lý chính ở các chương sau của luận án.

### 1.1 Sơ lược về không gian Hilbert

Ta luôn giả thiết  $H$  là không gian Hilbert thực với tích vô hướng và chuẩn được ký hiệu tương ứng là  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  và  $\|\cdot\|$ .

Trước hết, ta nhắc lại bất đẳng thức Cauchy–Schwarz trong mệnh đề sau đây.

**Mệnh đề 1.1.1.** [5, Fact 2.11 (Cauchy–Schwarz)] *Cho  $H$  là một không gian Hilbert thực. Khi đó,*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in H.$$

*Hơn nữa,  $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$  khi và chỉ khi tồn tại một số thực dương  $\alpha$  sao cho  $x = \alpha y$  hoặc  $y = \alpha x$ .*

**Nhận xét 1.1.2.** Dạng sơ cấp của bất đẳng thức Cauchy–Schwarz được phát biểu như sau: Cho  $a_1, a_2, \dots, a_N$  và  $b_1, b_2, \dots, b_N$  là hai bộ số thực. Khi đó ta có

bất đẳng thức sau:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_Nb_N)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_N^2).$$

Đặc biệt, khi  $b_1 = b_2 = \cdots = b_N = 1$ , ta nhận được

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_N)^2 \leq N(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2).$$

Một số đẳng thức đặc trưng trong không gian Hilbert được phát biểu trong mệnh đề dưới đây.

**Mệnh đề 1.1.3.** [5, Lemma 2.12, Corollary 2.15] *Cho  $H$  là một không gian Hilbert thực. Với mọi  $x, y \in H$  và  $t \in [0, 1]$  các khẳng định sau là đúng:*

- i)  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ .
- ii)  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$ .
- iii)  $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$ .
- iv)  $\|tx + (1 - t)y\|^2 = t\|x\|^2 + (1 - t)\|y\|^2 - t(1 - t)\|x - y\|^2$ .

**Định nghĩa 1.1.4.** Cho  $H$  là một không gian Hilbert thực.

- i) Dãy  $\{x_n\}$  trong  $H$  được gọi là *hội tụ yếu* đến phần tử  $x \in H$ , ký hiệu là  $x_n \rightharpoonup x$ , nếu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall y \in H.$$

- ii) Dãy  $\{x_n\}$  trong  $H$  được gọi là *hội tụ mạnh* đến phần tử  $x \in H$ , ký hiệu là  $x_n \rightarrow x$ , nếu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Từ tính liên tục của tích vô hướng, ta có thể suy ra nếu  $x_n \rightarrow x$  thì  $x_n \rightharpoonup x$ . Tuy nhiên, điều ngược lại thì không đúng. Chẳng hạn, xét không gian các dãy số thực bình phương khả tổng

$$l^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mid x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

và dãy  $\{e_n\} \subset l^2$  được cho bởi

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots),$$

trong đó tọa độ thứ  $n$  bằng 1 và các tọa độ còn lại thì bằng 0. Khi đó,  $e_n \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$ . Tuy nhiên dãy  $\{e_n\}$  không hội tụ mạnh về 0 khi  $n \rightarrow \infty$ , vì  $\|e_n\| = 1$  với mọi  $n \geq 1$ .

Tính compact tương đối yếu của một tập bị chặn trong không gian Hilbert thực được khẳng định trong mệnh đề sau.

**Mệnh đề 1.1.5.** [5, Lemma 2.45] *Nếu  $\{x_n\}$  là dãy bị chặn trong không gian Hilbert thực  $H$  thì dãy  $\{x_n\}$  có một dãy con hội tụ yếu.*

Mệnh đề 1.1.6 khẳng định hàm chuẩn trong không gian Hilbert thực là nửa liên tục dưới yếu.

**Mệnh đề 1.1.6.** [5, Lemma 2.42] *Cho  $H$  là không gian Hilbert thực. Nếu dãy  $\{x_n\}$  hội tụ yếu đến  $x \in H$  thì dãy  $\{x_n\}$  bị chặn và  $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ .*

Mệnh đề tiếp theo khẳng định mọi không gian Hilbert thực  $H$  đều có tính chất Kadec–Klee.

**Mệnh đề 1.1.7.** [5, Corollary 2.52] *Trong không gian Hilbert thực  $H$ , dãy  $\{x_n\}$  hội tụ yếu đến  $x \in H$  và dãy  $\{\|x_n\|\}$  hội tụ đến  $\|x\|$  khi và chỉ khi dãy  $\{x_n\}$  hội tụ mạnh  $x \in H$ .*

Mệnh đề sau đưa ra một bất đẳng thức quan trọng được sử dụng trong chứng minh một số định lý hội tụ yếu ở các chương sau của luận án.

**Mệnh đề 1.1.8.** [20, Theorem 10.1] *Cho  $H$  là một không gian Hilbert và dãy  $\{x_n\}$  hội tụ yếu đến  $x \in H$ . Khi đó,*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

với mọi  $y \in H$ ,  $y \neq x$ .

Toán tử tuyến tính bị chặn, chuẩn của toán tử tuyến tính bị chặn và toán tử liên hợp được xác định như các định nghĩa dưới đây.



**Định nghĩa 1.1.9.** Cho  $H_1$  và  $H_2$  là các không gian Hilbert thực. Một toán tử  $T : H_1 \rightarrow H_2$  được gọi là *toán tử tuyến tính* nếu

- i)  $T(x + y) = T(x) + T(y)$  với mọi  $x, y \in H_1$ ;
- ii)  $T(\alpha x) = \alpha T(x)$  với mọi  $x \in H_1$  và mọi  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Điều kiện i) và ii) trong Định nghĩa 1.1.9 tương đương với

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \text{ với mọi } x, y \in H_1 \text{ và mọi } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

**Định nghĩa 1.1.10.** Toán tử tuyến tính  $T : H_1 \rightarrow H_2$  được gọi là *bị chặn* nếu tồn tại một hằng số  $M > 0$  sao cho với mọi  $x \in H_1$  thì

$$\|Tx\| \leq M\|x\|.$$

**Định nghĩa 1.1.11.** Cho toán tử tuyến tính bị chặn  $T : H_1 \rightarrow H_2$ . *Chuẩn của toán tử*  $T$ , ký hiệu là  $\|T\|$ , được định nghĩa bởi

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

**Định nghĩa 1.1.12.** Cho  $T : H_1 \rightarrow H_2$  là toán tử tuyến tính bị chặn. Khi đó *toán tử liên hợp*  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  của toán tử  $T$  luôn tồn tại duy nhất và được xác định bởi

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \quad \forall x \in H_1, \quad \forall y \in H_2.$$

**Nhận xét 1.1.13.** [5, Fact 2.25] Toán tử liên hợp  $T^*$  cũng là toán tử tuyến tính bị chặn và  $\|T^*\| = \|T\|$ .

## 1.2 Dưới vi phân của hàm lồi và bài toán cực tiểu phiếm hàm lồi

### 1.2.1. Tập lồi và tập đóng

**Định nghĩa 1.2.1.** Cho  $C$  là một tập con khác rỗng của không gian Hilbert thực  $H$ . Tập  $C$  được gọi là

i) *tập lồi* nếu với mọi  $x, y \in C$ , mọi  $\lambda \in [0, 1]$  ta đều có

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

ii) *tập đóng* nếu mọi dãy  $\{x_n\} \subset C$  hội tụ mạnh đến phần tử  $x \in H$  thì  $x \in C$ .

iii) *tập đóng yếu* nếu mọi dãy  $\{x_n\} \subset C$  hội tụ yếu đến phần tử  $x \in H$  thì  $x \in C$ .

**Ví dụ 1.2.2.** Hình cầu đơn vị đóng  $B = \{x \in H \mid \|x\| \leq 1\}$  là một tập lồi, đóng.

**Ví dụ 1.2.3.** Cho  $C$  là một tập con trong  $\mathbb{R}^n$  và được xác định bởi

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

trong đó  $A$  là ma trận cỡ  $m \times n$  và  $b$  là ma trận cỡ  $m \times 1$ . Khi đó,  $C$  là tập lồi, đóng trong  $\mathbb{R}^n$ .

**Nhận xét 1.2.4.** Từ định nghĩa của tập lồi, ta có thể dễ dàng chứng minh một số tính chất cơ bản dưới đây.

i) Giao của một họ hữu hạn các tập lồi là tập lồi.

ii) Ảnh (nghịch ảnh) của một tập lồi qua một ánh xạ tuyến tính là tập lồi.

iii) Nếu  $C_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) là các tập lồi thì

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_m C_m$$

là tập lồi với mọi  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

iv) Bao đóng và phần trong của một tập lồi là tập lồi.

**Định nghĩa 1.2.5.** Cho  $x_1, x_2, \dots, x_m$  là các phần tử trong không gian Hilbert thực  $H$ . Một phần tử  $x \in H$  được gọi là một tổ hợp lồi của  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , nếu tồn tại  $\lambda_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) và  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$  sao cho  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ .

**Định nghĩa 1.2.6.** Cho  $C$  là một tập lồi, khác rỗng trong không gian Hilbert thực  $H$  và  $x_0 \in C$ . *Nón pháp tuyến của  $C$  tại  $x_0$* , ký hiệu là  $N_C(x_0)$ , được xác định bởi

$$N_C(x_0) := \{u \in H \mid \langle u, x - x_0 \rangle \leq 0, \forall x \in C\}.$$

**Mệnh đề 1.2.7.** [5, Proposition 6.45] Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực  $H$  và  $x_0 \in C$ . Khi đó, ta có các khẳng định sau:

- i)  $N_C(x_0)$  là một nón lồi, đóng, chứa điểm  $0$ .
- ii) Nếu  $x_0 \in \text{int}(C)$  thì  $N_C(x_0) = \{0\}$ , trong đó  $\text{int}(C)$  là phần trong của tập  $C$ .

Mối liên hệ giữa tập lồi, đóng và tập đóng yếu được thể hiện trong mệnh đề sau.

**Mệnh đề 1.2.8.** [5, Theorem 3.34] Nếu  $C$  là một tập con lồi và đóng của không gian Hilbert thực  $H$  thì  $C$  là tập đóng yếu.

**Định nghĩa 1.2.9.** Giả sử  $C$  là một tập con khác rỗng của không gian Hilbert thực  $H$ . Giao của tất cả các tập lồi chứa  $C$  được gọi là *bao lồi* của tập  $C$ , và ký hiệu là  $\text{co}(C)$ .

**Nhận xét 1.2.10.** [5, Definition 3.3]  $\text{co}(C)$  là tập lồi nhỏ nhất chứa  $C$ . Ngoài ra,  $C$  là tập lồi khi và chỉ khi  $C = \text{co}(C)$ .

**Mệnh đề 1.2.11.** [5, Proposition 3.4]  $\text{co}(C)$  trùng với tập tất cả các tổ hợp lồi của các phần tử trong  $C$ , tức là

$$\text{co}(C) = \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \mid I \text{ là tập hữu hạn, } x_i \in C, \alpha_i \geq 0, \sum_{i \in I} \alpha_i = 1 \right\}.$$

### 1.2.2. Phép chiếu mê tric

Trong mục này, chúng tôi đề cập đến phép chiếu mê tric, ánh xạ không gian và một số tính chất cơ bản. Trước hết ta có mệnh đề dưới đây.

**Mệnh đề 1.2.12.** [1, Corollary 2.10.9] Cho  $H$  là một không gian Hilbert thực,  $C$  là một tập lồi, đóng và khác rỗng của  $H$ . Khi đó với mỗi  $x \in H$ , tồn tại duy nhất phần tử  $x_0 \in C$  sao cho

$$\|x - x_0\| = \min_{y \in C} \|x - y\|.$$

Từ mệnh đề trên, ta có định nghĩa dưới đây về phép chiếu mê tric.

**Định nghĩa 1.2.13.** Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng và khác rỗng trong không gian Hilbert thực  $H$ . Ánh xạ  $P_C : H \rightarrow C$  được xác định bởi

$$\|x - P_C x\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$$

được gọi là *phép chiếu mê tric* từ  $H$  lên  $C$ .

**Ví dụ 1.2.14.** Trong không gian Hilbert thực  $H$ , ta xét phép chiếu mê tric  $P_C$  với một số trường hợp của tập con  $C$ .

- i)  $C$  là siêu phẳng  $C = \{x \in H \mid \langle u, x \rangle = a\}$ , trong đó  $u \in H$ ,  $u \neq 0$  và  $a \in \mathbb{R}$ . Khi đó,

$$P_C x = x - \frac{\langle u, x \rangle - a}{\|u\|^2} u \text{ với mọi } x \in H.$$

- ii)  $C$  là nửa không gian  $H_{u,a} = \{x \in H \mid \langle u, x \rangle \leq a\}$ , trong đó  $u \in H$ ,  $u \neq 0$  và  $a \in \mathbb{R}$ . Khi đó,

$$P_{H_{u,a}} x = x - \max \left\{ \frac{\langle u, x \rangle - a}{\|u\|^2}, 0 \right\} u \text{ với mọi } x \in H.$$

- iii)  $C$  là hình hộp trong không gian  $H = \mathbb{R}^n$ , được cho bởi

$$\text{Box}[a, b] = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x \leq b\}$$

với  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Khi đó, với mỗi  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $P_{\text{Box}[a,b]} x = p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , trong đó

$$p_i = \min \{b_i, \max\{x_i, a_i\}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- iv)  $C$  là hình cầu  $B[p, q] = \{x \in H \mid \|x - p\| \leq q\}$ ,  $q > 0$ . Khi đó,

$$P_{B[p,q]} x = p + \frac{q}{\max\{\|x - p\|, q\}} (x - p)$$

với mọi  $x \in H$ .

Đặc trưng của phép chiếu mê tric, được cho bởi mệnh đề dưới đây.

**Mệnh đề 1.2.15.** [5, Theorem 3.16 (Projection theorem)] Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực  $H$ . Điều kiện cần và đủ để ánh xạ  $P_C : H \rightarrow C$  là phép chiếu mêtric từ  $H$  lên  $C$  là

$$\langle x - P_Cx, y - P_Cx \rangle \leq 0, \quad (1.1)$$

với mọi  $x \in H$  và  $y \in C$ .

Tiếp theo là một số tính chất khác của phép chiếu mêtric.

**Mệnh đề 1.2.16.** Cho  $H$  là không gian Hilbert thực và  $C$  là tập con lồi, đóng và khác rỗng của  $H$ . Khi đó với mọi  $x, y \in H$ , ta có

- i)  $\langle x - y, P_Cx - P_Cy \rangle \geq \|P_Cx - P_Cy\|^2$ ;
- ii)  $\langle x - y, (I - P_C)x - (I - P_C)y \rangle \geq \|(I - P_C)x - (I - P_C)y\|^2$ .

*Chứng minh.* i) Từ (1.1) suy ra

$$\begin{aligned} \langle x - P_Cx, P_Cy - P_Cx \rangle &\leq 0, \forall x, y \in H. \\ \langle y - P_Cy, P_Cx - P_Cy \rangle &\leq 0, \forall x, y \in H. \end{aligned}$$

Cộng tương ứng hai vế của các bất đẳng thức trên ta nhận được điều phải chứng minh.

ii) Với mọi  $x, y \in H$ , từ i) ta có

$$\begin{aligned} &\|(I - P_C)x - (I - P_C)y\|^2 \\ &= \|x - y + P_Cy - P_Cx\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \|P_Cx - P_Cy\|^2 + 2\langle x - y, P_Cy - P_Cx \rangle \\ &= \|x - y\|^2 + \|P_Cx - P_Cy\|^2 - 2\langle x - y, P_Cx - P_Cy \rangle \\ &\leq \|x - y\|^2 - \langle x - y, P_Cx - P_Cy \rangle \\ &= \langle x - y, (I - P_C)x - (I - P_C)y \rangle. \end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề dưới đây được suy ra từ Mệnh đề 1.2.16 i) và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

**Mệnh đề 1.2.17.** [1, Proposition 2.10.15] Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực  $H$  và  $P_C$  là một phép chiếu mê tric từ  $H$  lên  $C$ . Khi đó với mọi  $x, y \in H$  ta có

$$\|P_Cx - P_Cy\| \leq \|x - y\|.$$

Mệnh đề dưới đây cho ta một tính chất đẹp liên quan đến phép chiếu mê tric. Tính chất này là quen thuộc khi ta xem xét nó trên không gian hữu hạn chiều (trong tam giác tù, bình phương độ dài cạnh tương ứng với góc tù luôn lớn hơn tổng bình phương hai cạnh còn lại).

**Mệnh đề 1.2.18.** Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực  $H$  và  $P_C$  là một phép chiếu mê tric từ  $H$  lên  $C$ . Khi đó, với mọi  $x \in H$  và  $y \in C$  ta có

$$\|x - P_Cx\|^2 + \|y - P_Cx\|^2 \leq \|x - y\|^2. \quad (1.2)$$

*Chứng minh.* Với mọi  $x \in H, y \in C$ , từ (1.1) ta có

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x - P_Cx - (y - P_Cx)\|^2 \\ &= \|x - P_Cx\|^2 - 2\langle x - P_Cx, y - P_Cx \rangle + \|y - P_Cx\|^2 \\ &\geq \|x - P_Cx\|^2 + \|y - P_Cx\|^2. \end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh. □

### 1.2.3. Hàm lồi

**Định nghĩa 1.2.19.** Cho hàm  $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$  với  $H$  là không gian Hilbert thực. Khi đó,

- i) Tập hợp  $\text{dom}(f) = \{x \in H \mid f(x) < \infty\}$  được gọi là *miền hữu hiệu* của hàm  $f$ .
- ii) Tập hợp  $\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in H \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\}$  được gọi là *trên đồ thị* của hàm  $f$ .

Nếu  $\text{dom}(f) \neq \emptyset$  thì  $f$  được gọi là *hàm chính thường*.

**Định nghĩa 1.2.20.** Cho  $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$  là một hàm số thực trên không gian Hilbert thực  $H$ . Ta nói  $f$  là một *hàm lồi* trên  $H$  nếu trên đồ thị  $\text{epi}(f)$  là một tập lồi trên  $H \times \mathbb{R}$ .

**Mệnh đề 1.2.21.** [5, Proposition 8.4] *Hàm  $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$  là hàm lồi trên không gian Hilbert thực  $H$  khi và chỉ khi với mọi  $x \in \text{dom}(f)$ ,  $y \in \text{dom}(f)$  và  $\lambda \in (0, 1)$ , ta có*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

**Ví dụ 1.2.22.** Cho  $C$  là một tập lồi của không gian Hilbert thực  $H$ .

i) Hàm chỉ của  $C$  xác định bởi

$$i_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in C, \\ \infty & \text{nếu } x \notin C \end{cases}$$

là một hàm lồi.

ii) Hàm  $f(x) = \|x\|$  với mọi  $x \in H$  là một hàm lồi.

iii) Hàm  $f(x) = \|x\|^2$  với mọi  $x \in H$  là một hàm lồi.

iv) Hàm khoảng cách từ điểm  $x \in H$  tới  $C$  với  $C$  là tập lồi và khác rỗng, được xác định bởi

$$d_C(x) = \inf_{u \in C} \|x - u\|$$

là một hàm lồi trên  $H$ .

v) Hàm  $d_C^2(x)$  là hàm lồi trên  $H$ .

Từ định nghĩa của hàm lồi ta dễ dàng chứng minh được tính lồi được bảo toàn qua một số phép toán cơ bản được thể hiện trong mệnh đề sau đây.

**Mệnh đề 1.2.23.** *Cho  $f, f_i : H \rightarrow (-\infty, \infty]$  với  $i = 1, 2, \dots, m$ , là các hàm lồi trên  $H$ . Khi đó*

i)  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$  là một hàm lồi với  $\lambda > 0$ .

ii) Hàm tổng  $\sum_{i=1}^m f_i(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x)$  là hàm lồi.

iii) Hàm  $g(x) = (\max_{1 \leq i \leq m} f_i)(x) = \max\{f_i(x) : i = 1, 2, \dots, m\}$  là một hàm lồi.

### 1.2.4. Đạo hàm và dưới vi phân của hàm lồi

**Định nghĩa 1.2.24.** Cho hàm  $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$  và  $x_0 \in H$ . Khi đó,

- i) Hàm  $f$  được gọi là *khả vi Fréchet* tại điểm  $x_0$  nếu tồn tại một phần tử  $v \in H$  sao cho

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle v, h \rangle}{\|h\|} = 0, h \in H, h \neq 0.$$

Trong trường hợp này, phần tử  $v$  nếu tồn tại, là duy nhất và được gọi là đạo hàm Fréchet của  $f$  tại  $x_0$ , được ký hiệu bởi  $f'_F(x_0)$  hoặc  $\nabla f(x_0)$ .

- ii) Hàm  $f$  được gọi là *khả vi Gâteaux* tại điểm  $x_0$  nếu tồn tại một phần tử  $v \in H$  sao cho với mỗi  $d \in H$  ta có

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0) - t\langle v, d \rangle}{t} = 0, t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

Trong trường hợp này, phần tử  $v$  nếu tồn tại, là duy nhất và được gọi là đạo hàm Gâteaux của  $f$  tại  $x_0$ , được ký hiệu bởi  $f'_G(x_0)$ .

**Chú ý 1.2.25.** Nếu hàm  $f$  khả vi Fréchet tại  $x_0$  thì nó khả vi Gâteaux tại  $x_0$  và  $f'_G(x_0) = \nabla f(x_0)$ .

**Ví dụ 1.2.26.** Cho  $H_1$  và  $H_2$  là hai không gian Hilbert thực và  $T : H_1 \rightarrow H_2$  là một toán tử tuyến tính bị chặn. Cho  $Q$  là một tập con lồi và đóng của  $H_2$ . Xét hàm  $f : H_1 \rightarrow (-\infty, \infty]$  xác định bởi

$$f(x) = \frac{1}{2} \|(I - P_Q)Tx\|^2 \text{ với mọi } x \in H_1.$$

Khi đó,  $f$  khả vi Fréchet tại mọi  $x \in H$  và  $\nabla f(x) = T^*(I - P_Q)Tx$ .

Thật vậy, lấy bất kỳ  $x_0 \in H$  và đặt  $v = T^*(I - P_Q)Tx_0$ . Khi đó, với mọi  $h \in H$ , ta có

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle v, h \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|(I - P_Q)T(x_0 + h)\|^2 - \frac{1}{2} \|(I - P_Q)Tx_0\|^2 - \langle v, h \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\|T(x_0 + h) - P_Q T(x_0 + h)\|^2 - \|Tx_0 - P_Q Tx_0\|^2) - \langle v, h \rangle \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2}(\|T(x_0 + h) - P_Q T x_0\|^2 - \|T x_0 - P_Q T x_0\|^2) - \langle v, h \rangle \\
&= \frac{1}{2}(\|(I - P_Q)T x_0 + Th\|^2 - \|T x_0 - P_Q T x_0\|^2) - \langle v, h \rangle \\
&= \frac{1}{2}(\|(I - P_Q)T x_0\|^2 + \|Th\|^2 - \|(I - P_Q)T x_0\|^2) \\
&\quad + \langle (I - P_Q)T x_0, Th \rangle - \langle v, h \rangle \\
&= \frac{1}{2}\|Th\|^2 + \langle T^*(I - P_Q)T x_0, h \rangle - \langle v, h \rangle \\
&= \frac{1}{2}\|Th\|^2 + \langle v, h \rangle - \langle v, h \rangle \\
&= \frac{1}{2}\|Th\|^2.
\end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned}
&f(x_0) - f(x_0 + h) + \langle v, h \rangle \\
&= \frac{1}{2}\|(I - P_Q)T x_0\|^2 - \frac{1}{2}\|(I - P_Q)T(x_0 + h)\|^2 + \langle v, h \rangle \\
&= \frac{1}{2}(\|T x_0 - P_Q T x_0\|^2 - \|(I - P_Q)T(x_0 + h)\|^2) + \langle v, h \rangle \\
&\leq \frac{1}{2}(\|T x_0 - P_Q T(x_0 + h)\|^2 - \|(I - P_Q)T(x_0 + h)\|^2) + \langle v, h \rangle \\
&= \frac{1}{2}(\|T x_0 + Th - P_Q T(x_0 + h) - Th\|^2) - \|(I - P_Q)T(x_0 + h)\|^2 + \langle v, h \rangle \\
&= \frac{1}{2}(\|(I - P_Q)T(x_0 + h)\|^2 + \|Th\|^2 - \|(I - P_Q)T(x_0 + h)\|^2) \\
&\quad - \langle (I - P_Q)T(x_0 + h), Th \rangle + \langle v, h \rangle \\
&= \frac{1}{2}\|Th\|^2 - \langle (I - P_Q)T(x_0 + h), Th \rangle + \langle v, h \rangle \\
&= \frac{1}{2}\|Th\|^2 - \langle (I - P_Q)T(x_0 + h), Th \rangle + \langle (I - P_Q)T x_0, Th \rangle \\
&= \frac{1}{2}\|Th\|^2 + \langle P_Q T(x_0 + h) - P_Q T x_0 - Th, Th \rangle \\
&= \frac{1}{2}\|Th\|^2 + \langle P_Q T(x_0 + h) - P_Q T x_0, Th \rangle - \langle Th, Th \rangle \\
&\leq \frac{1}{2}\|Th\|^2 + \|P_Q T(x_0 + h) - P_Q T x_0\| \cdot \|Th\| - \|Th\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|Th\|^2.
\end{aligned}$$

Kết hợp các đánh giá trên, ta nhận được

$$|f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle v, h \rangle| \leq \frac{1}{2}\|Th\|^2 \leq \frac{1}{2}\|T\|^2 \cdot \|h\|^2.$$

Suy ra

$$\frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle v, h \rangle|}{\|h\|} \leq \frac{1}{2} \|T\|^2 \cdot \|h\| \rightarrow 0$$

khi  $h \rightarrow 0$ .

Do đó  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle v, h \rangle}{\|h\|} = 0$ . Điều này có nghĩa là  $f$  khả vi Fréchet tại mọi  $x \in H$  và  $\nabla f(x) = T^*(I - P_Q)Tx$ .

**Định nghĩa 1.2.27.** Cho hàm  $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$  là một hàm lồi. Dưới vi phân của  $f$  là toán tử đa trị  $\partial f : H \rightarrow 2^H$  và được xác định bởi

$$\partial f(x) := \{v \in H \mid f(y) - f(x) \geq \langle v, y - x \rangle, \forall y \in H\}$$

với mọi  $x \in H$ . Hàm  $f$  được gọi là *khả dưới vi phân* tại  $x \in H$  nếu  $\partial f(x) \neq \emptyset$  và mỗi phần tử của  $\partial f(x)$  được gọi là *dưới gradient* của  $f$  tại  $x$ .

**Ví dụ 1.2.28.** Hàm chỉ  $i_C$  của tập lồi  $C$  có dưới vi phân tại mỗi điểm  $x_0 \in C$  là

$$\partial i_C(x_0) = \{p \mid \langle p, x - x_0 \rangle \leq 0, \forall x \in C\} = N_C(x_0).$$

**Mệnh đề 1.2.29.** [5, Proposition 17.31] Nếu  $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$  là hàm lồi, chính thường, khả vi Gâteaux tại  $x_0 \in H$  với đạo hàm Gâteaux tại  $x_0$  là  $f'_G(x_0)$ . Khi đó

$$\partial f(x_0) = \{f'_G(x_0)\}.$$

**Mệnh đề 1.2.30.** [5, Proposition 16.6] Cho hàm  $f : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$  là một hàm lồi, chính thường và  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Khi đó, với mỗi  $x \in H$ , ta có  $\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x)$ .

Dưới đây là nội dung của Định lý Moreau–Rockafellar.

**Định lý 1.2.31.** [30, Theorem 3.30] Giả sử  $f_1, f_2, \dots, f_m$  là các hàm lồi, chính thường trên không gian Hilbert thực  $H$ . Khi đó, với mọi  $x \in H$ , ta có

$$\partial(f_1 + f_2 + \dots + f_m)(x) \supset \partial f_1(x) + \partial f_2(x) + \dots + \partial f_m(x).$$

Ngoài ra, nếu tại điểm  $x^\dagger \in \bigcap_{i=1}^m \text{dom} f_i$ , tất cả các hàm  $f_1, f_2, \dots, f_m$  liên tục (có thể trừ ra một hàm) thì

$$\partial(f_1 + f_2 + \dots + f_m)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) + \dots + \partial f_m(x).$$

**Mệnh đề 1.2.32.** Cho  $f_i : H \rightarrow (-\infty, \infty]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  là các hàm lồi. Khi đó, với  $x^\dagger \in \bigcap_{i=1}^N \text{dom } f_i$ , ta có

$$\partial(\max_{i=1,2,\dots,N} f_i)(x^\dagger) \supseteq \text{co}\left\{ \bigcup_{i \in I(x^\dagger)} \partial f_i(x^\dagger) \right\},$$

trong đó  $I(x^\dagger) := \{i \in \{1, 2, \dots, N\} \mid f_i(x^\dagger) = (\max_{i=1,2,\dots,N} f_i)(x^\dagger)\}$ .

*Chứng minh.* Đặt  $h(x) = (\max_{i=1,2,\dots,N} f_i)(x)$  với mọi  $x \in H$ . Giả sử  $v$  là một phần tử bất kì sao cho  $v \in \text{co}\{\cup_{i \in I(x^\dagger)} \partial f_i(x^\dagger)\}$ . Khi đó tồn tại  $\lambda_i \geq 0$  và  $v_i \in \partial f_i(x^\dagger)$  với  $i \in I(x^\dagger)$  sao cho  $\sum_{i \in I(x^\dagger)} \lambda_i = 1$  và

$$v = \sum_{i \in I(x^\dagger)} \lambda_i v_i, \quad v_i \in \partial f_i(x^\dagger).$$

Từ định nghĩa của dưới vi phân, với mọi  $x \in H$ , ta thu được

$$\begin{aligned} \langle v, x - x^\dagger \rangle &= \sum_{i \in I(x^\dagger)} \lambda_i \langle v_i, x - x^\dagger \rangle \\ &\leq \sum_{i \in I(x^\dagger)} \lambda_i (f_i(x) - f_i(x^\dagger)) \\ &= \sum_{i \in I(x^\dagger)} \lambda_i f_i(x) - \sum_{i \in I(x^\dagger)} \lambda_i f_i(x^\dagger) \\ &\leq \sum_{i \in I(x^\dagger)} \lambda_i \max_{i=1,2,\dots,N} f_i(x) - \max_{i=1,2,\dots,N} f_i(x^\dagger) \\ &= \max_{i=1,2,\dots,N} f_i(x) - \max_{i=1,2,\dots,N} f_i(x^\dagger) \\ &= h(x) - h(x^\dagger). \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến bất đẳng thức

$$\langle v, x - x^\dagger \rangle \leq h(x) - h(x^\dagger).$$

Do đó ta nhận được  $v \in \partial h(x^\dagger) = \partial(\max_{i=1,2,\dots,N} f_i)(x^\dagger)$ .

Vậy  $\partial h(x^\dagger) = \partial(\max_{i=1,2,\dots,N} f_i)(x^\dagger) \supseteq \text{co}\{\cup_{i \in I(x^\dagger)} \partial f_i(x^\dagger)\}$ .

Mệnh đề được chứng minh. □

### 1.2.5. Bài toán cực tiểu phiếm hàm lồi

Xét bài toán cực tiểu không ràng buộc sau

$$\min_{x \in H} f(x), \quad (1.3)$$

trong đó  $H$  là không gian Hilbert thực và  $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$  là hàm chính thường (gọi là *hàm mục tiêu*).

**Định nghĩa 1.2.33.** Một phần tử  $x^\dagger \in H$  được gọi là:

- i) Điểm cực tiểu toàn cục nếu  $f(x^\dagger) \leq f(x)$  với mọi  $x \in H$ ;
- ii) Điểm cực tiểu địa phương nếu tồn tại một số  $\delta > 0$  sao cho  $f(x^\dagger) \leq f(x)$  với mọi  $x \in H$  thỏa mãn  $\|x - x^\dagger\| < \delta$ .

**Mệnh đề 1.2.34.** [5, Proposition 11.4] *Nếu  $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$  là hàm lồi, chính thường thì mỗi điểm cực tiểu địa phương của  $f$  là điểm cực tiểu toàn cục.*

**Mệnh đề 1.2.35.** [5, Theorem 16.3 (Fermat's rule)] *Cho  $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$  là hàm lồi, chính thường, khả dưới vi phân. Khi đó,  $x^\dagger$  là điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán (1.3) khi và chỉ khi  $0 \in \partial f(x^\dagger)$ .*

Tiếp theo, xét bài toán cực tiểu có ràng buộc

$$\min_{x \in C} f(x), \quad (1.4)$$

trong đó  $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$  và  $C$  là tập con khác rỗng của không gian Hilbert thực  $H$  (được gọi là *tập ràng buộc*).

Ta có mệnh đề dưới đây về điều kiện tối ưu cho bài toán cực tiểu phiếm hàm lồi có ràng buộc.

**Mệnh đề 1.2.36.** [30, Proposition 3.61] *Cho  $C \subseteq H$  là tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực  $H$  và  $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$  là một hàm lồi, chính thường và nửa liên tục dưới trên  $H$ . Giả sử  $f$  liên tục tại một điểm nào đó trên  $C$  hoặc có một điểm trong của  $C$  tại đó giá trị của  $f$  là hữu hạn. Khi đó  $x^\dagger$  là một điểm cực tiểu của bài toán tối ưu có ràng buộc (1.4) khi và chỉ khi  $0 \in \partial f(x^\dagger) + N_C(x^\dagger)$ .*

### 1.3 Ánh xạ không giãn

**Định nghĩa 1.3.1.** Cho  $C$  là một tập con khác rỗng của không gian Hilbert thực  $H$  và ánh xạ  $S : C \rightarrow H$ . Khi đó, ánh xạ  $S$  được gọi là:

i) *L-liên tục Lipschitz trên  $C$*  nếu tồn tại hằng số  $L \geq 0$  sao cho

$$\|S(x) - S(y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in C.$$

ii) *co* nếu nó là ánh xạ  $L$ -liên tục Lipschitz với hệ số  $L \in [0, 1)$ .

iii) *không giãn* nếu nó là ánh xạ  $L$ -liên tục Lipschitz với hệ số  $L = 1$ , tức là

$$\|S(x) - S(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in C.$$

**Định nghĩa 1.3.2.** Phần tử  $x \in C$  được gọi là một *điểm bất động* của ánh xạ không giãn  $S : C \rightarrow H$  nếu  $S(x) = x$ . Tập tất cả các điểm bất động của  $S$  được ký hiệu là  $\text{Fix}(S)$ .

**Ví dụ 1.3.3.** Nếu  $C$  là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực  $H$  thì  $P_C$  là một ánh xạ không giãn và tập điểm bất động của phép chiếu mêtric  $P_C$  chính là tập  $C$ , tức là  $\text{Fix}(P_C) = C$ .

Thật vậy, với mọi  $x \in H, y \in H$  ta có

$$\|(x - y) - (P_Cx - P_Cy)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|P_Cx - P_Cy\|^2 - 2\langle x - y, P_Cx - P_Cy \rangle.$$

Từ Mệnh đề 1.2.16 i), ta có

$$\|(x - y) - (P_Cx - P_Cy)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|P_Cx - P_Cy\|^2.$$

Do đó  $\|P_Cx - P_Cy\|^2 \leq \|x - y\|^2$  với mọi  $x \in H, y \in H$ . Vậy  $P_C$  là một ánh xạ không giãn.

Mặt khác, theo (1.2) ta suy ra  $\langle x - P_Cx, x - P_Cx \rangle \leq 0, \forall x \in C$  điều này tương đương  $\|x - P_Cx\|^2 \leq 0$ . Do đó  $\|x - P_Cx\| = 0, \forall x \in C$ , tức là  $x = P_Cx, \forall x \in C$ . Vậy  $\text{Fix } P_C = C$ .

Tính lồi và đóng của tập điểm bất động của ánh xạ không giãn  $S$  được trình bày trong mệnh đề dưới đây.

**Mệnh đề 1.3.4.** [5, Corollary 4.24] Cho  $C$  là tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực  $H$  và  $S : C \rightarrow H$  là một ánh xạ không giãn. Khi đó  $\text{Fix}(S)$  là tập lồi và đóng.

Tính nửa đóng của ánh xạ  $I - S$  khi  $S$  là ánh xạ không giãn được phát biểu trong mệnh đề sau.

**Mệnh đề 1.3.5.** [5, Theorem 4.27] Cho  $C$  là tập con lồi, đóng của không gian Hilbert thực  $H$  và  $S : C \rightarrow C$  là ánh xạ không giãn. Khi đó  $I - S$  là nửa đóng, tức là với bất kỳ dãy  $\{x_n\}$  trong  $C$  hội tụ yếu đến phần tử  $x \in C$  và dãy  $\{(I - S)x_n\}$  hội tụ mạnh đến  $y$  thì ta có  $(I - S)(x) = y$ .

## 1.4 Một số bổ đề bổ trợ

Để chứng minh các kết quả chính của luận án, chúng tôi cần sử dụng 3 bổ đề sau đây.

**Bổ đề 1.4.1.** [57, Lemma 2.5] Cho  $\{s_n\}$  là một dãy không âm,  $\{\alpha_n\}$  là một dãy trong  $(0, 1)$  và  $\{c_n\}$  là một dãy số thực thỏa mãn hai điều kiện sau:

- i)  $s_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)s_n + \alpha_n c_n$ .
- ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n \leq 0$ .

Khi đó,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ .

**Bổ đề 1.4.2.** [26, Lemma 3.1] Cho  $\{s_n\}$  là một dãy số thực không giảm theo nghĩa là tồn tại một dãy con  $\{s_{n_k}\}$  sao cho

$$s_{n_k} \leq s_{n_{k+1}}, \quad \forall k \geq 0.$$

Cho một dãy số nguyên  $\{\tau(n)\}$  với  $n > n_0$  được xác định bởi

$$\tau(n) := \max\{n_0 \leq k \leq n \mid s_k < s_{k+1}\}.$$

Khi đó  $\tau(n) \rightarrow \infty$  khi  $n \rightarrow \infty$  và với mọi  $n > n_0$ , ta có

$$\max\{s_{\tau(n)}, s_n\} \leq s_{\tau(n)+1}.$$

**Bổ đề 1.4.3.** [34, Lemma 2.6] Cho  $\{s_n\}$  là một dãy không âm,  $\{\alpha_n\}$  là một dãy trong khoảng  $(0, 1)$  sao cho  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$  và cho  $\{b_n\}$  là một dãy số thực thỏa mãn

$$s_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)s_n + \alpha_n b_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Nếu  $\limsup_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} \leq 0$  với mọi dãy con  $\{s_{n_k}\}$  của dãy  $\{s_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $\liminf_{k \rightarrow \infty} (s_{n_{k+1}} - s_{n_k}) \geq 0$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ .

## Chương 2

### Bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu và đề xuất một số phương pháp lặp xấp xỉ nghiệm bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra trong các không gian Hilbert thực dựa trên tiếp cận tối ưu lồi có ràng buộc ứng với các hàm mục tiêu khác nhau. Bố cục của chương được chia làm hai mục. Mục 2.1 trình bày việc xây dựng thuật toán và chứng minh sự hội tụ của các dãy lặp thu được. Mục 2.2 trình bày một áp dụng cho bài toán chấp nhận tách tổng quát và đưa ra một số ví dụ số minh họa. Nội dung của chương được viết trên cơ sở các bài báo (CT1) và (CT2) trong Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án.

#### 2.1 Tiếp cận tối ưu giải bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra

Để tiện cho việc trình bày, chúng tôi phát biểu lại bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra đã đề cập trong phần Mở đầu: Cho  $H$  và  $H_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) là các không gian Hilbert thực;  $T_i : H \rightarrow H_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) là các toán tử tuyến tính bị chặn;  $C \subseteq H$  và  $Q_i \subseteq H_i$  tương ứng là các tập con lồi, đóng và khác rỗng của các không gian Hilbert thực  $H$  và  $H_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

$$\text{Tìm phần tử } x^\dagger \in C \text{ sao cho } T_i x^\dagger \in Q_i, \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1)$$

Ký hiệu  $\Omega^{\text{SFP MOS}}$  là tập nghiệm của Bài toán (2.1), tức là

$$\Omega^{\text{SFP MOS}} = \{x^\dagger \in C \mid T_i x^\dagger \in Q_i, \forall i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Trong chương này, chúng tôi luôn giả thiết  $\Omega^{\text{SFP MOS}} \neq \emptyset$ .



### 2.1.1 Tiếp cận tối ưu thứ nhất

Xét hàm  $g : H \rightarrow \mathbb{R}$  được cho bởi

$$g(x) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|(I - P_{Q_i})T_i x\|^2, \quad \forall x \in H.$$

Ta thấy  $g$  là một hàm lồi trên  $H$ . Ngoài ra, dễ thấy Bài toán (2.1) tương đương với bài toán tối ưu có ràng buộc:

$$\min_{x \in C} g(x).$$

Do đó, theo Mệnh đề 1.2.36,  $x^\dagger$  là nghiệm của Bài toán (2.1) khi và chỉ khi

$$0 \in \nabla g(x^\dagger) + N_C(x^\dagger).$$

Theo Ví dụ 1.2.26, điều này tương đương với

$$0 \in \sum_{i=1}^N T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x^\dagger + N_C(x^\dagger).$$

Từ định nghĩa của nón pháp tuyến và đặc trưng của phép chiếu mê tric (Mệnh đề 1.2.15), bao hàm thức này tương đương với

$$x^\dagger = P_C \left[ x^\dagger - \gamma \sum_{i=1}^N T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x^\dagger \right], \quad (2.2)$$

trong đó  $\gamma$  là một số thực dương. Dạng thức (2.2) chỉ ra rằng phần tử  $x^\dagger$  là nghiệm của Bài toán (2.1) khi và chỉ khi nó là điểm bất động của ánh xạ  $S : H \rightarrow H$  được xác định bởi

$$S := P_C \left[ I - \gamma \sum_{i=1}^N T_i^*(I - P_{Q_i})T_i \right].$$

Từ phân tích này, chúng tôi nghiên cứu và đề xuất thuật toán sau đây xấp xỉ nghiệm Bài toán (2.1).

**Thuật toán 2.1.1.**

**Bước 0.** – Với xấp xỉ ban đầu  $x_0 \in C$  tùy ý;

– Cơ bước  $\{\gamma_n\}$  thỏa mãn điều kiện

$$0 < a \leq \gamma_n \leq b < \frac{2}{N \max_{i=1, N} \{\|T_i\|^2\}}, \quad n \geq 0. \quad (\gamma 1)$$

Đặt  $n := 0$ .

**Bước 1.** Tính

$$x_{n+1} = P_C \left[ x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n \right]. \quad (2.3)$$

**Bước 2.** Đặt  $n := n + 1$  và quay lại **Bước 1**.

Ta có kết quả sau đây.

**Định lý 2.1.1.** *Dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi Thuật toán 2.1.1 hội tụ yếu đến một nghiệm của Bài toán (2.1).*

*Chứng minh.* Trước hết, ta chứng minh dãy  $\{x_n\}$  được sinh bởi Thuật toán 2.1.1 là bị chặn và  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\| = 0$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Thật vậy, với mỗi  $p \in \Omega^{\text{SFP MOS}}$  ta có  $p \in C$  và  $T_i p \in Q_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Do đó  $P_{Q_i} T_i p = T_i p$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Từ tính chất không giãn của ánh xạ  $P_C$  (Mệnh đề 1.2.17) và bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, ta nhận được

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &= \|P_C [x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n] - p\|^2 \\ &= \|P_C [x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n] - P_C p\|^2 \\ &\leq \|x_n - p - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n\|^2 \\ &= \|x_n - p\|^2 - 2\gamma_n \langle x_n - p, \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n \rangle \\ &\quad + \gamma_n^2 \left\| \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|x_n - p\|^2 - 2\gamma_n \langle x_n - p, \sum_{i=1}^N T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n \rangle \\
&\quad + \gamma_n^2 N \sum_{i=1}^N \|T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n\|^2 \\
&\leq \|x_n - p\|^2 - 2\gamma_n \langle x_n - p, \sum_{i=1}^N T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n \rangle \\
&\quad + \gamma_n^2 N \sum_{i=1}^N \|T_i\|^2 \cdot \|(I - P_{Q_i})T_i x_n\|^2 \\
&\leq \|x_n - p\|^2 - 2\gamma_n \langle x_n - p, \sum_{i=1}^N T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n \rangle \\
&\quad + \gamma_n^2 N \max_{1,2,\dots,N} \{\|T_i\|^2\} \sum_{i=1}^N \|(I - P_{Q_i})T_i x_n\|^2. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Mặt khác, từ định nghĩa toán tử liên hợp, Mệnh đề 1.2.16 ii) và đẳng thức  $P_{Q_i}T_i p = T_i p$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , ta lại có

$$\begin{aligned}
&\langle x_n - p, \sum_{i=1}^N T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n \rangle \\
&= \sum_{i=1}^N \langle x_n - p, T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n \rangle \\
&= \sum_{i=1}^N \langle T_i x_n - T_i p, (I - P_{Q_i})T_i x_n - (I - P_{Q_i})T_i p \rangle \\
&\geq \sum_{i=1}^N \|T_i x_n - P_{Q_i}T_i x_n\|^2. \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Từ (2.4) và (2.5) suy ra

$$\|x_{n+1} - p\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 + \gamma_n (\gamma_n N \max_{1,2,\dots,N} \{\|T_i\|^2\} - 2) \sum_{i=1}^N \|T_i x_n - P_{Q_i}T_i x_n\|^2. \tag{2.6}$$

Điều kiện ( $\gamma_1$ ) dẫn đến

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\| \leq \dots \leq \|x_0 - p\|.$$

Do đó,  $\{\|x_n - p\|\}$  là dãy giảm và bị chặn dưới và vì thế tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ . Mặt khác, từ (2.6) ta thấy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma_n(2 - \gamma_n N \max_{1,2,\dots,N} \{\|T_i\|^2\}) \sum_{i=1}^N \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\|^2 \\ &\leq \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện  $(\gamma 1)$ , ta nhận được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.7)$$

Tiếp theo, vì dãy  $\{x_n\}$  bị chặn nên tồn tại một dãy con  $\{x_{n_k}\}$  của  $\{x_n\}$  sao cho  $x_{n_k} \rightarrow q$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Ngoài ra, dễ thấy  $C$  là tập đóng yếu vì  $C$  là một tập con lồi, đóng của  $H$ . Vì  $\{x_{n_k}\} \subset C$  và  $x_{n_k} \rightarrow q$  nên theo tính chất của tập đóng yếu  $C$ , ta có  $q \in C$ . Hơn nữa, vì  $T_i$  là toán tử tuyến tính bị chặn nên  $T_i x_{n_k} \rightarrow T_i q$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Sử dụng (2.7), nguyên lý nửa đóng (Mệnh đề 1.3.5) ta thu được  $T_i q - P_{Q_i} T_i q = 0$ , tức là  $T_i q \in Q_i$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ . Vì vậy,  $q \in \Omega^{\text{SFP MOS}}$ , nghĩa là  $q$  là một nghiệm của Bài toán (2.1).

Giả sử  $\{x_{n_m}\}$  là một dãy con khác của dãy  $\{x_n\}$  sao cho  $x_{n_m} \rightarrow \bar{q}$  với  $\bar{q} \neq q$ . Bằng cách lập luận hoàn toàn tương tự như trên, chúng ta cũng nhận được  $\bar{q} \in \Omega^{\text{SFP MOS}}$ . Sử dụng Mệnh đề 1.1.8 và sự tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$  với mỗi  $p \in \Omega^{\text{SFP MOS}}$ , ta có

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\| &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - q\| \\ &< \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - \bar{q}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{q}\| \\ &= \liminf_{m \rightarrow \infty} \|x_{n_m} - \bar{q}\| < \liminf_{m \rightarrow \infty} \|x_{n_m} - q\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\|. \end{aligned}$$

Điều này là vô lý. Do đó, ta suy ra  $x_n \rightarrow q$  khi  $n \rightarrow \infty$ .

Định lý được chứng minh.  $\square$

**Nhận xét 2.1.2.** i) Khi  $N = 1, H = \mathbb{R}^n$ , Thuật toán 2.1.1 trở thành thuật toán CQ của Byrne [8] đề xuất năm 2002 giải Bài toán (SFP);

ii) Khi  $N = 1$ , Thuật toán 2.1.1 trở thành thuật toán xác định bởi dãy lặp 0.1 của Xu đề xuất năm 2010 để giải Bài toán (SFP) trong không gian Hilbert thực vô hạn chiều.

Để thu được sự hội tụ mạnh, chúng tôi kết hợp Thuật toán 2.1.1 với phương pháp lặp Halpern. Ta có thuật toán sau đây.

**Thuật toán 2.1.2.**

**Bước 0.** – Cho trước  $x_0, u \in C$ .

- Cỡ bước  $\{\gamma_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $(\gamma 1)$ ;
- Tham số  $\{\alpha_n\}$  thỏa mãn điều kiện

$$\{\alpha_n\} \subset (0, 1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty. \quad (\alpha)$$

Đặt  $n := 0$ .

**Bước 1.** Tính

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) P_C \left[ x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n \right]. \quad (2.8)$$

**Bước 2.** Đặt  $n := n + 1$  và quay lại **Bước 1**.

Sự hội tụ mạnh của Thuật toán 2.1.2 được khẳng định trong định lý dưới đây.

**Định lý 2.1.3.** *Dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi Thuật toán 2.1.2 hội tụ mạnh về  $P_{\Omega^{\text{SFP MOS}}}$   $u$ .*

*Chứng minh.* Trước hết, ta chỉ ra dãy  $\{x_n\}$  được sinh bởi Thuật toán 2.1.2 là bị chặn.

Thật vậy, với mỗi  $p \in \Omega^{\text{SFP MOS}}$ , ta có  $p \in C$  và  $T_i p \in Q_i, \forall i = 1, 2, \dots, N$ . Vì thế ta cũng có  $T_i p = P_{Q_i} T_i p, i = 1, 2, \dots, N$ . Từ tính lồi của hàm  $\|\cdot\|^2$ , ta đánh giá được

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &= \|\alpha_n u + (1 - \alpha_n) P_C \left[ x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n \right] - p\|^2 \\ &= \|\alpha_n (u - p) + (1 - \alpha_n) (P_C [x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n] - p)\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|u - p\|^2 + (1 - \alpha_n) \|P_C [x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n] - p\|^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Sử dụng lập luận tương tự như trong chứng minh Định lý 2.1.1, ta thu được

$$\begin{aligned} \|P_C[x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n] - p\|^2 &\leq \|x_n - p\|^2 \\ &+ \gamma_n(\gamma_n N \max_{1,2,\dots,N} \{\|T_i\|^2\} - 2) \sum_{i=1}^N \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\|^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Thay (2.10) vào (2.9) ta nhận được bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\|^2 + \alpha_n\|u - p\|^2 \\ &+ (1 - \alpha_n)\gamma_n(\gamma_n N \max_{1,2,\dots,N} \{\|T_i\|^2\} - 2) \sum_{i=1}^N \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\|^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Từ điều kiện  $(\gamma_1)$  vào bất đẳng thức (2.11), ta có

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\|^2 + \alpha_n\|u - p\|^2 \\ &\leq \max\{\|x_n - p\|^2, \|u - p\|^2\} \\ &\quad \vdots \\ &\leq \max\{\|x_0 - p\|^2, \|u - p\|^2\}. \end{aligned}$$

Vậy dãy  $\{x_n\}$  bị chặn.

Tiếp theo, ta chỉ ra dãy  $\{x_n\}$  hội tụ mạnh về  $P_{\Omega_{\text{SFP MOS}}}u$ . Thật vậy, nếu đặt  $x^\dagger := P_{\Omega_{\text{SFP MOS}}}u$  thì ta có

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 &= \langle x_{n+1} - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle \\ &= \langle \alpha_n(u - x^\dagger) + (1 - \alpha_n)(P_C[x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n] - x^\dagger), x_{n+1} - x^\dagger \rangle \\ &= (1 - \alpha_n)\langle P_C[x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n] - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle \\ &\quad + \alpha_n\langle u - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle \\ &\leq \frac{1 - \alpha_n}{2}(\|P_C[x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n] - x^\dagger\|^2 + \|x_{n+1} - x^\dagger\|^2) \\ &\quad + \alpha_n\langle u - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle \\ &\leq \frac{1 - \alpha_n}{2}(\|x_n - x^\dagger\|^2 + \|x_{n+1} - x^\dagger\|^2) + \alpha_n\langle u - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle. \end{aligned}$$

Từ ước lượng trên dẫn đến

$$2\|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 \leq (1 - \alpha_n)\|x_n - x^\dagger\|^2 + (1 - \alpha_n)\|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 + 2\alpha_n\langle u - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle.$$

Do đó, ta nhận được

$$(1 + \alpha_n)\|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 \leq (1 - \alpha_n)\|x_n - x^\dagger\|^2 + 2\alpha_n\langle u - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle.$$

Hơn nữa, vì  $\|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 \leq (1 + \alpha_n)\|x_{n+1} - x^\dagger\|^2$  nên

$$\|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 \leq (1 - \alpha_n)\|x_n - x^\dagger\|^2 + 2\alpha_n\langle u - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle. \quad (2.12)$$

Nếu đặt  $s_n := \|x_n - x^\dagger\|^2 \geq 0$  và  $c_n := 2\langle u - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle$  thì bất đẳng thức (2.12) có thể viết thành

$$s_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)s_n + \alpha_n c_n. \quad (2.13)$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra  $s_n \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$  bằng cách xét 2 trường hợp có thể xảy ra như sau.

**Trường hợp 1.** Dãy  $\{s_n\}$  giảm theo nghĩa tồn tại một số tự nhiên  $N_0$  sao cho  $\{s_n\}$  là một dãy giảm với mọi  $n \geq N_0$ . Khi đó, từ tính bị chặn của  $\{s_n\}$  suy ra dãy  $\{s_n\}$  hội tụ. Trong (2.11), thay  $p = x^\dagger \in \Omega^{\text{SFP MOS}}$ , ta nhận được

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - x^\dagger\|^2 + \alpha_n\|u - x^\dagger\|^2 \\ &\quad + (1 - \alpha_n)\gamma_n(\gamma_n N \max_{1,2,\dots,N}\{\|T_i\|^2\} - 2) \sum_{i=1}^N \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\|^2. \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức này suy ra

$$\begin{aligned} &(1 - \alpha_n)\gamma_n(2 - \gamma_n N \max_{1,2,\dots,N}\{\|T_i\|^2\}) \sum_{i=1}^N \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\|^2 \\ &\leq \|x_n - x^\dagger\|^2 - \|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 + \alpha_n(\|u - x^\dagger\|^2 - \|x_n - x^\dagger\|^2) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Sử dụng các điều kiện đặt lên các dãy  $\{\alpha_n\}$  và  $\{\gamma_n\}$ , ta thu được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.14)$$

Vì  $\{x_n\} \subset C$  nên  $x_n = P_C x_n$ . Ngoài ra, ta chú ý rằng

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\| &= \|\alpha_n u + (1 - \alpha_n) P_C [x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n] - x_n\| \\
&\leq \alpha_n \|x_n - u\| + (1 - \alpha_n) \|P_C [x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n] - P_C x_n\| \\
&\leq \alpha_n \|x_n - u\| + (1 - \alpha_n) \gamma_n \left\| \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\| \\
&\leq \alpha_n \|x_n - u\| + (1 - \alpha_n) \gamma_n \sum_{i=1}^N \|T_i\| \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\|.
\end{aligned}$$

Kết hợp bất đẳng thức này với điều kiện  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  và (2.14), ta nhận được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \quad (2.15)$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh  $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n \leq 0$ . Giả sử  $\{x_{n_k}\}$  là một dãy con của dãy  $\{x_n\}$  sao cho

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n &= 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle u - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle \\
&= 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle u - x^\dagger, x_n - x^\dagger \rangle \quad (\text{theo (2.15)}) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u - x^\dagger, x_{n_k} - x^\dagger \rangle.
\end{aligned}$$

Vì  $\{x_{n_k}\}$  bị chặn nên cũng tồn tại một dãy con  $\{x_{n_{k_l}}\}$  của  $\{x_{n_k}\}$  sao cho  $x_{n_{k_l}} \rightharpoonup x^*$ . Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng  $x_{n_k} \rightharpoonup x^*$ . Sử dụng (2.14),  $\{x_n\} \subset C$  và lập luận tương tự như chứng minh Định lý 2.1.1 ta cũng có  $x^* \in \Omega^{\text{SFPMOS}}$ . Ngoài ra, vì  $x^\dagger = P_{\Omega^{\text{SFPMOS}}} u$  nên áp dụng bất đẳng thức (1.1) ta nhận được

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle u - x^\dagger, x_{n_k} - x^\dagger \rangle = \langle u - x^\dagger, x^* - x^\dagger \rangle \leq 0.$$

Như vậy, tất cả các điều kiện của Bổ đề 1.4.1 được thỏa mãn nên  $s_n \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$ , tức là  $x_n \rightarrow x^\dagger = P_{\Omega^{\text{SFPMOS}}} u$ .

**Trường hợp 2.** Giả sử  $\{s_n\}$  là dãy không giảm đến vô cùng theo nghĩa tồn tại dãy con  $\{s_{n_k}\}$  của dãy  $\{s_n\}$  sao cho

$$s_{n_k} \leq s_{n_{k+1}}, \quad \forall k \geq 0. \quad (2.16)$$



Ta định nghĩa dãy số nguyên  $\{\tau(n)\}$  với mọi  $n \geq n_0$  ( $n_0$  đủ lớn) bởi

$$\tau(n) := \max\{n_0 \leq k \leq n \mid s_k < s_{k+1}\}.$$

Khi đó, dãy  $\{\tau(n)\}$  là một dãy tăng và  $\tau(n) \rightarrow \infty$  khi  $n \rightarrow \infty$ . Từ (2.16) dẫn đến  $s_{\tau(n)} < s_{\tau(n)+1}$  với mọi  $n \geq n_0$  hay  $s_{\tau(n)+1} - s_{\tau(n)} > 0$  với mọi  $n \geq n_0$ .

Từ (2.13) ta có

$$s_{\tau(n)+1} \leq (1 - \alpha_{\tau(n)})s_{\tau(n)} + \alpha_{\tau(n)}c_{\tau(n)}.$$

Từ các đánh giá trên, ta nhận được

$$0 \leq s_{\tau(n)+1} - s_{\tau(n)} \leq \alpha_{\tau(n)}(c_{\tau(n)} - s_{\tau(n)}) \leq \alpha_{\tau(n)} \sup_n \{s_{\tau(n)} + |c_{\tau(n)}|\}. \quad (2.17)$$

Vì  $\sup_n s_{\tau(n)} + |c_{\tau(n)}| < \infty$  và  $\alpha_{\tau(n)} \rightarrow 0$  khi  $\tau(n) \rightarrow \infty$  nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{\tau(n)+1} - s_{\tau(n)}) = 0. \quad (2.18)$$

Chúng minh tương tự như Trường hợp 1, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i x_{\tau(n)} - P_{Q_i} T_i x_{\tau(n)}\| = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

và

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} c_{\tau(n)} \leq 0.$$

Từ (2.17) ta có  $\alpha_{\tau(n)}(c_{\tau(n)} - s_{\tau(n)}) \geq 0$  mà  $\alpha_{\tau(n)} > 0$  nên  $s_{\tau(n)} \leq c_{\tau(n)}$  và vì vậy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_{\tau(n)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} c_{\tau(n)} \leq 0.$$

Như vậy  $0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} s_{\tau(n)} \leq 0$ . Từ đây suy ra  $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_{\tau(n)} = 0$ . Kết hợp với

(2.18), ta được  $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_{\tau(n)+1} = 0$ . Áp dụng Bổ đề 1.4.2 với mọi  $n > n_0$  ta có

đánh giá sau.

$$0 \leq s_n \leq \max\{s_{\tau(n)}, s_n\} \leq s_{\tau(n)+1} \rightarrow 0.$$

Đánh giá giá này chứng tỏ  $s_n \rightarrow 0$ , tức là dãy  $\{x_n\}$  hội tụ mạnh tới  $x^\dagger = P_{Q_{\text{SFP MOS}}} u$ . Định lý được chứng minh.  $\square$

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu và đề xuất thuật toán tổng quát hơn, khi thay  $u$  bởi giá trị của một ánh xạ co.

**Thuật toán 2.1.3.****Bước 0.** – Cho trước  $y_0 \in C$ ;

- Cỡ bước  $\{\gamma_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $(\gamma 1)$ ;
- Tham số  $\{\alpha_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $(\alpha)$ ;
- Ánh xạ co  $f : H \rightarrow C$  với hệ số co  $c \in [0, 1)$ .

Đặt  $n := 0$ **Bước 1.** Tính

$$y_{n+1} = \alpha_n f(y_n) + (1 - \alpha_n) P_C [y_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i y_n]. \quad (2.19)$$

**Bước 2.** Đặt  $n := n + 1$  và quay lại **Bước 1**.

Sự hội tụ mạnh của dãy lặp được sinh bởi Thuật toán 2.1.3 được thiết lập trong định lý sau.

**Định lý 2.1.4.** *Dãy  $\{y_n\}$  được sinh bởi Thuật toán 2.1.3 hội tụ mạnh về một phần tử  $x^\dagger \in \Omega^{\text{SFPMOS}}$ , là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân*

$$\langle (I - f)x^\dagger, y - x^\dagger \rangle \geq 0, \quad \forall y \in \Omega^{\text{SFPMOS}}. \quad (\text{VIP}(I - f, \Omega^{\text{SFPMOS}}))$$

*Chứng minh.* Vì  $f$  là ánh xạ co nên  $P_{\Omega^{\text{SFPMOS}}} f$  cũng là ánh xạ co. Theo nguyên lý ánh xạ co Banach,  $P_{\Omega^{\text{SFPMOS}}} f$  có duy nhất một điểm bất động  $x^\dagger$  và là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân  $\text{VIP}(I - f, \Omega^{\text{SFPMOS}})$ .

Sử dụng Định lý 2.1.3 và thay  $u$  bởi  $f(x^\dagger)$  trong (2.8), ta có dãy  $\{x_n\}$  hội tụ mạnh tới  $P_{\Omega^{\text{SFPMOS}}} f(x^\dagger) = x^\dagger$ . Do đó  $\|x_n - x^\dagger\| \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$ .

Vì ta có

$$\|y_n - x^\dagger\| \leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - x^\dagger\|$$

nên để chứng minh  $\|y_n - x^\dagger\| \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$ , ta sẽ chỉ ra  $\|y_n - x_n\| \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$ . Thật vậy, với mỗi số tự nhiên  $n$ , đặt

$$d_n := P_C [x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n],$$

$$e_n := P_C [y_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i y_n].$$

Từ Mệnh đề 1.2.16 ii) và điều kiện  $(\gamma 1)$ , ta có

$$\begin{aligned}
\|e_n - d_n\|^2 &\leq \|y_n - x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^N T_i^*((I - P_{Q_i})T_i y_n - (I - P_{Q_i})T_i x_n)\|^2 \\
&= \|y_n - x_n\|^2 - 2\gamma_n \langle x_n - y_n, \sum_{i=1}^N T_i^*((I - P_{Q_i})T_i y_n - (I - P_{Q_i})T_i x_n) \rangle \\
&\quad + \gamma_n^2 \left\| \sum_{i=1}^N T_i^*((I - P_{Q_i})T_i y_n - (I - P_{Q_i})T_i x_n) \right\|^2 \\
&\leq \|y_n - x_n\|^2 - 2\gamma_n \sum_{i=1}^N \langle T_i x_n - T_i y_n, (I - P_{Q_i})T_i y_n - (I - P_{Q_i})T_i x_n \rangle \\
&\quad + \gamma_n^2 \left( \sum_{i=1}^N \|T_i^*((I - P_{Q_i})T_i y_n - (I - P_{Q_i})T_i x_n)\|^2 \right) \\
&\leq \|y_n - x_n\|^2 - 2\gamma_n \sum_{i=1}^N \|(I - P_{Q_i})T_i y_n - (I - P_{Q_i})T_i x_n\|^2 \\
&\quad + \gamma_n^2 N \max_{1,2,\dots,N} \{\|T_i\|^2\} \sum_{i=1}^N \|(I - P_{Q_i})T_i y_n - (I - P_{Q_i})T_i x_n\|^2 \\
&\leq \|y_n - x_n\|^2 \\
&\quad - \gamma_n (2 - \gamma_n N \max_{1,2,\dots,N} \{\|T_i\|^2\}) \sum_{i=1}^N \|(I - P_{Q_i})T_i y_n - (I - P_{Q_i})T_i x_n\|^2 \\
&\leq \|y_n - x_n\|^2.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên dẫn đến

$$\|e_n - d_n\| \leq \|y_n - x_n\|.$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - x_{n+1}\| &= \|\alpha_n(f(y_n) - f(x^\dagger)) + (1 - \alpha_n)(d_n - e_n)\| \\
&\leq \alpha_n \|f(y_n) - f(x^\dagger)\| + (1 - \alpha_n) \|e_n - d_n\| \\
&\leq c\alpha_n \|y_n - x^\dagger\| + (1 - \alpha_n) \|y_n - x_n\| \\
&\leq c\alpha_n (\|y_n - x_n\| + \|x_n - x^\dagger\|) + (1 - \alpha_n) \|y_n - x_n\| \\
&= [1 - (1 - c)\alpha_n] \|y_n - x_n\| + c\alpha_n \|x_n - x^\dagger\| \\
&= [1 - (1 - c)\alpha_n] \|y_n - x_n\| + (1 - c)\alpha_n \frac{c\|x_n - x^\dagger\|}{1 - c}. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Do đó, nếu đặt  $s_n = \|y_n - x_n\|$  và  $c_n = \frac{c\|x_n - x^\dagger\|}{1-c}$  thì từ (2.20) ta thu được

$$s_{n+1} \leq [1 - (1-c)\alpha_n]s_n + (1-c)\alpha_n c_n.$$

Dễ thấy  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-c)\alpha_n = 0$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} (1-c)\alpha_n = \infty$ . Vì  $\|x_n - x^\dagger\| \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$  nên  $c_n = \frac{c\|x_n - x^\dagger\|}{1-c} \rightarrow 0$ . Như vậy, các điều kiện của Bổ đề 1.4.1 được thỏa mãn nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$  hay  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = 0$ . Vì thế, ta cũng có

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x^\dagger\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^\dagger\| \rightarrow 0.$$

Điều này suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x^\dagger\| = 0$ , tức là dãy  $\{y_n\}$  hội tụ mạnh đến  $x^\dagger$ .

Định lý được chứng minh.  $\square$

### 2.1.2 Tiếp cận tối ưu thứ hai

Trong các Thuật toán 2.1.1, 2.1.2 và 2.1.3, ở mỗi bước lặp cỡ bước  $\gamma_n$  đều phụ thuộc vào thông tin của chuẩn của các toán tử chuyển  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Ta biết rằng, trong trường hợp tổng quát việc tính hay ước lượng chuẩn của toán tử tuyến tính bị chặn thường không đơn giản. Do đó, ta cần xây dựng các thuật toán lặp mà mỗi bước lặp đều không phụ thuộc vào chuẩn của các toán tử chuyển này. Với cách tiếp cận sau đây, chúng tôi đã xây dựng được các thuật toán với cỡ bước tự thích nghi để xấp xỉ nghiệm Bài toán (2.1).

Xét hàm  $h : H \rightarrow \mathbb{R}$  được xác định bởi

$$h(x) := \left( \max_{i=1,2,\dots,N} f_i \right)(x), \quad \forall x \in H$$

và

$$f_i(x) := \frac{1}{2} \|(I - P_{Q_i})T_i x\|^2, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Dễ thấy Bài toán (2.1) tương đương với bài toán tối ưu có ràng buộc

$$\min_{x \in C} h(x). \quad (2.21)$$

Theo Mệnh đề 1.2.36, phần tử  $x^\dagger$  là nghiệm của Bài toán (2.21) nếu và chỉ nếu

$$0 \in \partial h(x^\dagger) + N_C(x^\dagger).$$

Mặt khác, theo Mệnh đề 1.2.32, ta có

$$\partial\left(\max_{i=1,2,\dots,N} f_i\right)(x^\dagger) \supseteq \text{co}\left\{\bigcup_{i \in I(x^\dagger)} \partial f_i(x^\dagger)\right\},$$

với  $I(x^\dagger) := \{i \in \{1, 2, \dots, N\} \mid f_i(x^\dagger) = (\max_{i=1,2,\dots,N} f_i)(x^\dagger)\}$ . Do đó, nếu phần tử  $x^\dagger \in H$  thỏa mãn

$$\text{co}\left\{\bigcup_{i \in I(x^\dagger)} \partial f_i(x^\dagger)\right\} + N_C(x^\dagger) \ni 0 \quad (2.22)$$

thì  $x^\dagger$  là một nghiệm của Bài toán (2.21) cũng có nghĩa  $x^\dagger$  là nghiệm của Bài toán (2.1).

Bao hàm thức (2.22) tương đương với

$$x^\dagger = P_C\left[x^\dagger - \gamma \sum_{i \in I(x^\dagger)} \lambda_i T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x^\dagger\right], \quad (2.23)$$

trong đó  $\lambda_i \geq 0$  với mọi  $i \in I(x^\dagger)$ ,  $\sum_{i \in I(x^\dagger)} \lambda_i = 1$  và  $\gamma$  là một số thực dương bất kỳ.

Đẳng thức (2.23) gợi ý cho chúng tôi xây dựng hai thuật toán dưới đây xấp xỉ nghiệm Bài toán (2.1) dựa trên phương pháp lặp Halpern và phương pháp xấp xỉ mềm.

#### Thuật toán 2.1.4.

**Bước 0.** Cho trước  $x_0 \in C$  và tham số  $\{\rho_n\} \subset [a, b] \subset (0, 2)$  và đặt  $n := 0$ .

**Bước 1.** Tính

$$x_{n+1} = P_C\left[x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n\right], \quad (2.24)$$

trong đó  $I(x_n) = \{i \mid \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\| = \max_{i=1,2,\dots,N} \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\|\}$ ,  $\lambda_{i,n} \geq 0$  với mọi  $i \in I(x_n)$ ,  $\sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} = 1$  và nếu đặt  $d_n = \max_{i=1,2,\dots,N} \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\|$  thì cỡ bước  $\{\gamma_n\}$  được xác định bởi

$$\gamma_n = \begin{cases} \frac{\rho_n d_n^2}{\left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n \right\|^2} & \text{nếu } \left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n \right\| > 0, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases} \quad (\gamma 2)$$

**Bước 2.** Đặt  $n := n + 1$  và quay lại **Bước 1**.

Sự hội tụ của Thuật toán 2.1.4 được khẳng định trong định lý sau đây.

**Định lý 2.1.5.** *Dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi Thuật toán 2.1.4 hội tụ yếu đến một phần tử thuộc  $\Omega^{\text{SFP MOS}}$ .*

*Chứng minh.* Đầu tiên, ta chứng minh dãy  $\{x_n\}$  bị chặn và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Thật vậy, với mỗi  $p \in \Omega^{\text{SFP MOS}}$ , ta có  $p \in C$  và  $T_i p \in Q_i, \forall i = 1, 2, \dots, N$ . Do đó, ta có  $P_{Q_i} T_i p = T_i p, i = 1, 2, \dots, N$ . Hơn nữa, ta quan sát thấy rằng

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &= \|P_C[x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n] - p\|^2 \\ &= \|P_C[x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n] \\ &\quad - P_C[p - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i p]\|^2 \\ &\leq \|x_n - p - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n\|^2 \\ &= \|x_n - p\|^2 - 2\gamma_n \langle x_n - p, \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n \rangle \\ &\quad + \gamma_n^2 \left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n \right\|^2 \\ &= \|x_n - p\|^2 - 2\gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} \langle x_n - p, T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n \rangle \\ &\quad + \gamma_n^2 \left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n \right\|^2 \\ &= \|x_n - p\|^2 - 2\gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} \langle T_i(x_n - p), (I - P_{Q_i})(T_i x_n - T_i p) \rangle \\ &\quad + \gamma_n^2 \left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n \right\|^2 \\ &\leq \|x_n - p\|^2 - 2\gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} \|(I - P_{Q_i})T_i x_n\|^2 \\ &\quad + \gamma_n^2 \left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n \right\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|x_n - p\|^2 - 2\gamma_n d_n^2 \\ &\quad + \gamma_n^2 \left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\|^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ta xét hai trường hợp có thể xảy ra đối với tham số  $\gamma_n$ .

**Trường hợp 1:**  $\gamma_n = 0$ .

Trong trường hợp này, ta thấy  $x_{n+1} = P_C x_n$  và  $\sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n = 0$ .

Sử dụng Mệnh đề 1.2.16, ta thu được

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n, x_n - p \right\rangle \\ &= \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} \langle T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n, T_i x_n - T_i p \rangle \\ &\geq \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\|^2 \\ &= d_n^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Từ đánh giá trên suy ra  $d_n = 0$ , tức là

$$\|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\| = 0, \quad \forall i \in I(x_n).$$

Từ định nghĩa của  $I(x_n)$  dẫn đến

$$\|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.26)$$

Ngoài ra, vì  $x_{n+1} = P_C x_n$  nên

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|. \quad (2.27)$$

**Trường hợp 2:**  $\gamma_n = \rho_n \frac{d_n^2}{\left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\|^2}$ .

Từ (2.25) suy ra

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &= \|x_n - p\|^2 - \gamma_n (2d_n^2 + \gamma_n \left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\|^2) \\ &= \|x_n - p\|^2 - 2\rho_n \frac{d_n^4}{\left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\|^2} \\ &\quad - \rho_n^2 \frac{d_n^4}{\left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\|^4} \left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\|^2 \end{aligned}$$

$$= \|x_n - p\|^2 - \rho_n(2 - \rho_n) \frac{d_n^4}{\left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\|^2}. \quad (2.28)$$

Do vậy, chúng ta cũng thu được

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|. \quad (2.29)$$

Từ (2.27) và (2.29), ta thấy trong cả hai trường hợp của tham số  $\gamma_n$  thì

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|, \quad \forall n \geq 0.$$

Vậy dãy  $\{x_n\}$  bị chặn và do đó tồn tại giới hạn hữu hạn  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ .

Từ (2.28) ta lại có

$$0 \leq \rho_n(2 - \rho_n) \frac{d_n^4}{\left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\|^2} \leq \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2 \rightarrow 0.$$

Hơn nữa, vì  $\{\rho_n\} \subset [a, b] \subset (0, 2)$  nên

$$\frac{d_n^2}{\left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\|} \rightarrow 0. \quad (2.30)$$

Với mỗi  $i \in I(x_n)$ , ta có

$$\lambda_{i,n} d_n \|T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n\| \leq \lambda_{i,n} d_n^2 \|T_i\|.$$

Điều này chỉ ra rằng

$$d_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} \|T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n\| \leq d_n^2 \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} \|T_i\| \leq d_n^2 \max_{i \in I(x_n)} \{\|T_i\|\}.$$

Kết hợp bất đẳng thức trên và đánh giá

$$\left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\| \leq \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} \|T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n\|,$$

ta thu được

$$d_n \left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\| \leq d_n^2 \max_{i \in I(x_n)} \{\|T_i\|\}.$$



Bất đẳng thức này tương đương với

$$d_n \leq \max_{i \in I(x_n)} \{\|T_i\|\} \frac{d_n^2}{\|\sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n\|}.$$

Kết hợp đánh giá trên với (2.30), ta có thể kết luận  $d_n \rightarrow 0$  và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\| = 0, \forall i \in I(x_n).$$

Sử dụng định nghĩa của  $I(x_n)$ , ta cũng có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\| = 0, \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.31)$$

Từ (2.26) và (2.31) ta suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.32)$$

trong cả hai Trường hợp 1 và Trường hợp 2.

Tiếp theo, ta cần chứng minh dãy  $\{x_n\}$  hội tụ yếu đến  $q \in \Omega^{\text{SFPMOS}}$ . Thật vậy, vì dãy  $\{x_n\}$  bị chặn nên tồn tại dãy con  $\{x_{n_k}\}$  của dãy  $\{x_n\}$  sao cho  $x_{n_k} \rightharpoonup q$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Ngoài ra, dễ thấy  $C$  đóng yếu và  $\{x_n\} \subset C$  nên  $q \in C$ .

Vì  $T_i$  là toán tử tuyến tính bị chặn nên  $T_i x_{n_k} \rightharpoonup T_i q$ , với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ . Hơn nữa, vì  $P_{Q_i}$  là một ánh xạ không giãn nên theo (2.32) ta có  $\{\|T_i x_{n_k} - P_{Q_i} T_i x_{n_k}\|\} \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Như vậy, các điều kiện của nguyên lý nửa đóng (xem Mệnh đề 1.3.5) được thỏa mãn nên  $T_i q - P_{Q_i} T_i q = 0$  hay  $T_i q \in Q_i$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ . Vậy  $q \in \Omega^{\text{SFPMOS}}$ .

Để chứng minh dãy  $\{x_n\}$  hội tụ yếu đến phần tử  $q \in \Omega^{\text{SFPMOS}}$ , ta cần chứng minh  $q$  là điểm tụ yếu duy nhất của dãy  $\{x_n\}$ . Giả sử  $\{x_{n_m}\}$  là một dãy con khác của dãy  $\{x_n\}$  sao cho  $x_{n_m} \rightharpoonup \bar{q}$  với  $\bar{q} \neq q$ . Chứng minh tương tự như trên ta cũng có  $\bar{q} \in \Omega^{\text{SFPMOS}}$ .

Áp dụng Mệnh đề 1.1.8 và theo định nghĩa về sự tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ , với mọi  $p \in \Omega^{\text{SFPMOS}}$ , ta có

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\| &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - q\| < \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - \bar{q}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{q}\|, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{q}\| &= \liminf_{m \rightarrow \infty} \|x_{n_m} - \bar{q}\| < \liminf_{m \rightarrow \infty} \|x_{n_m} - q\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\|. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến mâu thuẫn nên  $x_{n_m} \rightharpoonup q$ . Vậy  $x_n \rightharpoonup q$  khi  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Hệ quả sau đây chỉ ra rằng định lý trên vẫn đúng với một chỉ số  $i_n \in I(x_n)$  cụ thể.

**Hệ quả 2.1.6.** Với mỗi  $x_0 \in C$ , dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi phương pháp lặp sau:

$$\begin{cases} \text{Chọn } i_n \text{ sao cho } \|T_{i_n}x_n - P_{Q_{i_n}}T_{i_n}x_n\| = \max_{i=1,2,\dots,N} \|T_i x_n - P_{Q_i}T_i x_n\|, \\ x_{n+1} = P_C[x_n - \gamma_n T_{i_n}^*(I - P_{Q_{i_n}})T_{i_n}x_n], \quad n \geq 0, \end{cases}$$

trong đó  $\{\gamma_n\}$  được định nghĩa bởi

$$\gamma_n = \begin{cases} \rho_n \frac{\|T_{i_n}x_n - P_{Q_{i_n}}T_{i_n}x_n\|^2}{\|T_{i_n}^*(I - P_{Q_{i_n}})T_{i_n}x_n\|^2}, & \text{nếu } \|T_{i_n}^*(I - P_{Q_{i_n}})T_{i_n}x_n\| > 0, \\ 0, & \text{nếu ngược lại,} \end{cases}$$

và  $\{\rho_n\} \subset [a, b] \subset (0, 2)$ . Khi đó dãy  $\{x_n\}$  hội tụ yếu đến một phần tử trong  $\Omega^{\text{SFP MOS}}$ .

*Chứng minh.* Chọn  $i_n \in I(x_n)$  và áp dụng Định lý 2.1.5 với  $\lambda_{i_n, n} = 1$  và  $\lambda_{i, n} = 0$  với mọi  $i \neq i_n$ , ta có điều cần chứng minh.  $\square$

Bằng cách kết hợp Thuật toán 2.1.4 với phương pháp xấp xỉ mềm, chúng tôi xây dựng thuật toán sau để giải Bài toán (2.1) và thiết lập được sự hội tụ mạnh.

### Thuật toán 2.1.5.

**Bước 0.** – Với xấp xỉ ban đầu  $x_0 \in C$  tùy ý;

- Tham số  $\{\rho_n\} \subset [a, b] \subset (0, 2)$ ;
- Tham số  $\{\alpha_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $(\alpha)$ ;
- Ánh xạ co  $f : H \rightarrow C$  với hệ số co  $c \in [0, 1)$ .

Đặt  $n := 0$ .

**Bước 1.** Tính

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) P_C[x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i, n} T_i^*(I - P_{Q_i})T_i x_n], \quad (2.33)$$

trong đó  $I(x_n) = \{i \mid \|T_i x_n - P_{Q_i}T_i x_n\| = \max_{i=1,\dots,N} \|T_i x_n - P_{Q_i}T_i x_n\|\}$ ,  $\lambda_{i, n} \geq 0$  với mọi  $i \in I(x_n)$ ,  $\sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i, n} = 1$ , cỡ bước  $\{\gamma_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $(\gamma 2)$ .

**Bước 2.** Đặt  $n := n + 1$  và quay lại **Bước 1**.

Ta có định lý sau về sự hội tụ mạnh của Thuật toán 2.1.5.

**Định lý 2.1.7.** *Dãy  $\{x_n\}$  xác định Thuật toán 2.1.5 hội tụ mạnh tới  $x^\dagger$ , là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân  $VIP(I - f, \Omega^{\text{SFP MOS}})$ .*

*Chứng minh.* Đầu tiên, ta chứng minh dãy  $\{x_n\}$  và  $\{f(x_n)\}$  bị chặn. Thật vậy, lấy  $p \in \Omega^{\text{SFP MOS}}$ . Khi đó, ta dễ thấy  $p \in C$ ,  $T_i p \in Q_i$  và  $T_i p = P_{Q_i} T_i p$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|\alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) P_C [x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n] - p\| \\
&\leq \alpha_n \|f(x_n) - p\| + (1 - \alpha_n) \|P_C [x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n] - p\| \\
&\leq \alpha_n (\|f(x_n) - f(p)\| + \|f(p) - p\|) \\
&\quad + (1 - \alpha_n) \|P_C [x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n] - p\| \\
&\leq \alpha_n (c \|x_n - p\| + \|f(p) - p\|) \\
&\quad + (1 - \alpha_n) \|P_C [x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n] - p\|.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Lập luận tương tự như chứng minh Định lý 2.1.5, ta nhận được bất đẳng thức

$$\|P_C [x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n] - p\| \leq \|x_n - p\|.$$

Thay bất đẳng thức trên vào (2.34) ta thu được

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq \alpha_n c \|x_n - p\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - p\| + \alpha_n \|f(p) - p\| \\
&= [1 - \alpha_n(1 - c)] \|x_n - p\| + \alpha_n \|f(p) - p\| \\
&= [1 - \alpha_n(1 - c)] \|x_n - p\| + \alpha_n(1 - c) \frac{\|f(p) - p\|}{1 - c} \\
&\leq \max \left\{ \|x_n - p\|, \frac{\|f(p) - p\|}{1 - c} \right\} \\
&\quad \vdots \\
&\leq \max \left\{ \|x_0 - p\|, \frac{\|f(p) - p\|}{1 - c} \right\}.
\end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức này, ta suy ra dãy  $\{x_n\}$  bị chặn và vì  $f$  là ánh xạ co nên dãy  $\{f(x_n)\}$  cũng bị chặn.

Tiếp theo, ta chứng minh dãy  $\{x_n\}$  hội tụ mạnh đến  $x^\dagger$ , là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân VIP( $I - f, \Omega^{\text{SFPMOS}}$ ). Thật vậy, vì  $f$  là ánh xạ co nên  $P_{\Omega^{\text{SFPMOS}}}f$  cũng là ánh xạ co. Theo định lý điểm bất động của Banach tồn tại duy nhất một điểm bất động  $x^\dagger$  của ánh xạ  $P_{\Omega^{\text{SFPMOS}}}f$ , tức là  $P_{\Omega^{\text{SFPMOS}}}f(x^\dagger) = x^\dagger$ . Điều này tương đương với

$$\langle f(x^\dagger) - x^\dagger, y - x^\dagger \rangle \leq 0, \quad \forall y \in \Omega^{\text{SFPMOS}},$$

hay ta có thể viết

$$\langle x^\dagger - f(x^\dagger), y - x^\dagger \rangle \geq 0, \quad \forall y \in \Omega^{\text{SFPMOS}}.$$

Vậy  $x^\dagger$  là nghiệm của bất đẳng thức biến phân VIP( $I - f, \Omega^{\text{SFPMOS}}$ ). Sử dụng tính lồi của hàm số  $\|\cdot\|^2$  và công thức xác định dãy lặp  $\{x_n\}$  bởi (2.33), ta có

$$\begin{aligned} & \|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 \\ &= \|\alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) P_C[x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n] - x^\dagger\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|f(x_n) - x^\dagger\|^2 + (1 - \alpha_n) \|P_C[x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n] - x^\dagger\|^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Lập luận tương tự như chứng minh Định lý 2.1.5, ta nhận được

$$\begin{aligned} & \|P_C[x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n] - x^\dagger\|^2 \\ &\leq \begin{cases} \|x_n - x^\dagger\|^2, & \text{nếu } \gamma_n = 0, \\ \|x_n - x^\dagger\|^2 - \rho_n(2 - \rho_n) \frac{d_n^4}{\|\sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n\|^2}, & \\ & \text{nếu } \gamma_n = \frac{d_n^2}{\|\sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n\|^2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Từ (2.35) và (2.36) ta có

$$(\|x_n - x^\dagger\|^2 - \|x_{n+1} - x^\dagger\|^2) + \alpha_n \|f(x_n) - x^\dagger\|^2$$

$$\geq \begin{cases} 0, & \text{nếu } \gamma_n = 0, \\ \rho_n(2 - \rho_n) \frac{d_n^4}{\left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\|^2} & \\ \text{nếu } \gamma_n = \frac{d_n^2}{\left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\|^2}. & \end{cases} \quad (2.37)$$

Khi  $\gamma_n = 0$  thì

$$\|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.38)$$

Đặt  $t_n := P_C[x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^*(I - P_{Q_i}) T_i x_n]$ , ta thu được

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 &= \langle \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)t_n - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle \\ &= (1 - \alpha_n) \langle t_n - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle + \alpha_n \langle f(x_n) - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle \\ &\leq \frac{1 - \alpha_n}{2} (\|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 + \|t_n - x^\dagger\|^2) + \alpha_n \langle f(x_n) - f(x^\dagger), x_{n+1} - x^\dagger \rangle \\ &\quad + \alpha_n \langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle \\ &\leq \frac{1 - \alpha_n}{2} (\|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 + \|t_n - x^\dagger\|^2) + \frac{\alpha_n}{2} (c^2 \|x_n - x^\dagger\|^2 + \|x_{n+1} - x^\dagger\|^2) \\ &\quad + \alpha_n \langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle \\ &\leq \frac{1 - \alpha_n}{2} (\|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 + \|t_n - x^\dagger\|^2) + \frac{\alpha_n}{2} (c \|x_n - x^\dagger\|^2 + \|x_{n+1} - x^\dagger\|^2) \\ &\quad + \alpha_n \langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle. \end{aligned}$$

Do đó

$$\|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 \leq (1 - \alpha_n) \|t_n - x^\dagger\|^2 + \alpha_n c \|x_n - x^\dagger\|^2 + 2\alpha_n \langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle.$$

Từ (2.36), ta lại có

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 &\leq [1 - (1 - c)\alpha_n] \|x_n - x^\dagger\|^2 + 2\alpha_n \langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle \\ &= [1 - (1 - c)\alpha_n] \|x_n - x^\dagger\|^2 + (1 - c)\alpha_n \frac{2\langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle}{1 - c}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Nếu đặt  $s_n := \|x_n - x^\dagger\|^2$  và  $c_n := \frac{2\langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle}{1 - c}$  thì bất đẳng thức (2.39) có thể được viết dưới dạng sau:

$$s_{n+1} \leq [1 - (1 - c)\alpha_n] s_n + (1 - c)\alpha_n c_n. \quad (2.40)$$

Chúng ta sẽ chứng minh  $s_n \rightarrow 0$  bằng cách xét hai trường hợp có thể xảy ra.

**Trường hợp 1.** Dãy  $\{s_n\}$  giảm theo nghĩa tồn tại  $N_0 \geq 0$  sao cho dãy  $\{s_n\}$  luôn giảm với  $n \geq N_0$ . Vì dãy  $\{s_n\}$  giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên nó hội tụ. Sử dụng các điều kiện của  $\rho_n \subset [a, b] \subset (0, 2)$ ,  $\alpha_n \rightarrow 0$ , tính bị chặn của hàm  $\{f(x_n)\}$  và (2.37)–(2.38) (chú ý rằng nếu  $\gamma_n = 0$ , thì  $\|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\| = 0$ ), ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.41)$$

Vì  $\{x_n\} \subset C$  nên

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|\alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) P_C [x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n] - x_n\| \\ &\leq \alpha_n \|x_n - f(x_n)\| \\ &\quad + (1 - \alpha_n) \|P_C [x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n] - P_C x_n\| \\ &\leq \alpha_n \|x_n - f(x_n)\| + (1 - \alpha_n) \gamma_n \left\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n \right\| \\ &\leq \alpha_n \|x_n - u\| + (1 - \alpha_n) \gamma_n \|T_i\| \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\|. \end{aligned}$$

Kết hợp (2.41) với điều kiện  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ , chúng ta thu được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \quad (2.42)$$

Tiếp theo, ta chứng minh  $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n \leq 0$ . Giả sử dãy  $\{x_{n_k}\}$  là một dãy con của dãy  $\{x_n\}$  sao cho

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x_n - x^\dagger \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x_{n_k} - x^\dagger \rangle.$$

Vì dãy  $\{x_{n_k}\}$  bị chặn nên tồn tại dãy con  $\{x_{n_{k_l}}\}$  của  $\{x_{n_k}\}$  sao cho  $x_{n_{k_l}} \rightharpoonup x^*$ . Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng  $x_{n_k} \rightharpoonup x^*$ . Ta sẽ chứng minh  $x^* \in \Omega^{\text{SFPMOS}}$ . Vì dãy  $\{x_n\} \subset C$  nên  $x^* \in C$ . Vì  $x_{n_k} \rightharpoonup x^*$  và  $T_i$  là toán tử tuyến tính bị chặn nên  $T_i x_{n_k} \rightharpoonup T_i x^*$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ . Áp dụng Mệnh đề 1.3.5 và sử dụng (2.41), ta có  $T_i x^* \in Q_i$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ . Vì vậy  $x^* \in \Omega^{\text{SFPMOS}}$ .

Vì  $x^\dagger$  là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân VIP( $I - f, \Omega^{\text{SFP MOS}}$ ) nên

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x_n - x^\dagger \rangle = \langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x^* - x^\dagger \rangle \leq 0.$$

Kết hợp với (2.42) và  $\frac{2}{1-c} > 0, \forall c \in [0, 1)$  ta thu được

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{2}{1-c} \langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x^* - x^\dagger \rangle \leq 0.$$

Như vậy tất cả các điều kiện của Bổ đề 1.4.1 được thỏa mãn nên ta suy ra  $s_n \rightarrow 0$  hay  $x_n \rightarrow x^\dagger = P_{\Omega^{\text{SFP MOS}}} f(x^\dagger)$ .

**Trường hợp 2.** Giả sử dãy  $\{s_n\}$  không giảm. Để áp dụng Bổ đề 1.4.1, ta định nghĩa một dãy số nguyên  $\{\tau(n)\}$  với mọi  $n \geq n_0$  (với  $n_0$  đủ lớn) bởi

$$\tau(n) = \max\{k \leq n : s_k < s_{k+1}\}.$$

Chú ý rằng  $\tau(n)$  là một dãy tăng sao cho  $\tau(n) \rightarrow \infty$  khi  $n \rightarrow \infty$  và  $s_{\tau(n)} < s_{\tau(n)+1}$  với mọi  $n \geq n_0$ . Từ (2.40), ta thu được

$$0 < s_{\tau(n)+1} - s_{\tau(n)} \leq 2\alpha_{\tau(n)} \langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x_{\tau(n)+1} - x^\dagger \rangle.$$

Vì  $\alpha_{\tau(n)} \rightarrow 0$  và  $\{x_n\}$  bị chặn nên suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{\tau(n)+1} - s_{\tau(n)}) = 0. \quad (2.43)$$

Lập luận tương tự Trường hợp 1, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i x_{\tau(n)} - P_{Q_i} T_i x_{\tau(n)}\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

và  $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_{\tau(n)} \leq 0$ .

Mặt khác, ta lại có

$$s_{\tau(n)+1} \leq (1 - (1 - c)\alpha_{\tau(n)})s_{\tau(n)} + (1 - c)\alpha_{\tau(n)}c_{\tau(n)},$$

với  $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_{\tau(n)} \leq 0$ . Sử dụng kết quả  $s_{\tau(n)+1} > s_{\tau(n)}$  và  $\alpha_{\tau(n)} > 0$  ta thu được  $(1 - c)s_{\tau(n)} \leq c_{\tau(n)}$ .

Vì  $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_{\tau(n)} \leq 0$  nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\tau(n)} = 0$ . Kết hợp điều này với (2.43) ta suy ra

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\tau(n)+1} = 0$ . Từ các phân tích trên, ta nhận thấy

$$0 \leq s_n \leq \max\{s_{\tau(n)}, s_n\} \leq s_{\tau(n)+1} \rightarrow 0.$$

Từ đây suy ra  $s_n \rightarrow 0$ , tức là dãy  $\{x_n\}$  hội tụ mạnh đến  $x^\dagger = P_{\Omega^{\text{SFP MOS}}} f(x^\dagger)$ . Định lý được chứng minh.  $\square$

Định lý trên vẫn đúng với  $i_n \in I(x_n)$  cụ thể.

**Hệ quả 2.1.8.** Với mỗi  $x_0 \in C$ , cho dãy  $\{x_n\}$  là một dãy được xác định bởi phương pháp lặp:

$$\begin{cases} \text{Chọn } i_n \text{ sao cho } \|T_{i_n}x_n - P_{Q_{i_n}}T_{i_n}x_n\| = \max_{i=1,2,\dots,N} \|T_i x_n - P_{Q_i}T_i x_n\|, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)P_C[x_n - \gamma_n T_{i_n}^*(I - P_{Q_{i_n}})T_{i_n}x_n], \quad n \geq 0, \end{cases}$$

trong đó  $\{\gamma_n\}$  được xác định bởi

$$\gamma_n = \begin{cases} \rho_n \frac{\|T_{i_n}x_n - P_{Q_{i_n}}T_{i_n}x_n\|^2}{\|T_{i_n}^*(I - P_{Q_{i_n}})T_{i_n}x_n\|^2}, & \text{nếu } \|T_{i_n}^*(I - P_{Q_{i_n}})T_{i_n}x_n\| > 0, \\ 0, & \text{nếu ngược lại,} \end{cases}$$

dãy  $\{\rho_n\} \subset [a, b] \subset (0, 2)$  và  $f : H \rightarrow C$  là ánh xạ co với hệ số co  $c \in [0, 1)$ . Nếu dãy  $\{\alpha_n\}$  thỏa mãn  $(\alpha)$  thì dãy  $\{x_n\}$  hội tụ mạnh tới  $x^\dagger$ , là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân VIP( $I - f, \Omega^{\text{SFP MOS}}$ ).

## 2.2 Áp dụng và ví dụ minh họa

### 2.2.1 Áp dụng cho bài toán chấp nhận tách tổng quát

Chúng tôi áp dụng các thuật toán đề xuất cho bài toán chấp nhận tách tổng quát (GSFP). Ta biết rằng, khi  $H = H_1$ ,  $C = C_1$ ,  $Q_i = C_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq N - 1$ ,  $T_1 = A_1$ ,  $T_2 = A_2 A_1, \dots$  và  $T_{N-1} = A_{N-1} A_{N-2} \dots A_1$  thì Bài toán (2.1) trở thành Bài toán (GSFP). Do đó chúng ta có thể sử dụng các thuật toán và định lý trong Mục 2.1 để giải bài toán này.

Từ Định lý 2.1.1 và Định lý 2.1.3 ta thu được hai kết quả sau.

**Định lý 2.2.1.** Cho  $T_1 = A_1$ ,  $T_2 = A_2 A_1, \dots$ ,  $T_{N-1} = A_{N-1} A_{N-2} \dots A_1$ . Nếu dãy  $\{\gamma_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $(\gamma 1)$  thì dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi  $x_0 \in C_1$  và

$$x_{n+1} = P_{C_1} \left[ x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^{N-1} T_i^*(I - P_{C_{i+1}})T_i x_n \right]$$

hội tụ yếu tới một phần tử  $x^\dagger \in \Omega^{\text{GSFP}}$ .



**Định lý 2.2.2.** Cho  $T_1 = A_1, T_2 = A_2A_1, \dots, T_{N-1} = A_{N-1}A_{N-2} \dots A_1$ . Dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi  $x_0 \in C_1$  và

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) P_{C_1} \left[ x_n - \gamma_n \sum_{i=1}^{N-1} T_i^* (I - P_{C_{i+1}}) T_i x_n \right],$$

trong đó  $f : H \rightarrow C$  là một ánh xạ co từ  $H$  vào  $C$  với hệ số co  $c \in [0, 1)$ . Nếu dãy  $\{\gamma_n\}$  và  $\{\alpha_n\}$  thỏa mãn các điều kiện  $(\gamma 1)$  và  $(\alpha)$  tương ứng, thì dãy  $\{x_n\}$  hội tụ mạnh tới một phần tử  $x^\dagger \in \Omega^{\text{GSFP}}$ , là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân  $\text{VIP}(I - f, \Omega^{\text{SFP MOS}})$  với  $\Omega^{\text{SFP MOS}}$  được thay bởi  $\Omega^{\text{GSFP}}$ .

Từ Định lý 2.1.5 và Định lý 2.1.7, ta thu được kết quả sau cho Bài toán (GSFP), ở đó, cỡ bước được xây dựng không phụ thuộc vào thông tin về chuẩn của các toán tử chuyển.

**Định lý 2.2.3.** Cho  $T_1 = A_1, T_2 = A_2A_1, \dots, T_{N-1} = A_{N-1}A_{N-2} \dots A_1$ . Với mỗi  $x_0 \in C$ , dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi

$$x_{n+1} = P_C \left[ x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n \right],$$

trong đó  $I(x_n) = \{i : \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\| = \max_{i=1,2,\dots,N-1} \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\|\}$ ,  $\lambda_{i,n} \geq 0$  với mọi  $i \in I(x_n)$  và  $\sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} = 1$ . Nếu dãy  $\{\gamma_n\}$  được xác định bởi  $(\gamma 2)$  thì dãy  $\{x_n\}$  hội tụ yếu tới phần tử  $x^\dagger \in \Omega^{\text{GSFP}}$ .

**Định lý 2.2.4.** Cho  $T_1 = A_1, T_2 = A_2A_1, \dots, T_{N-1} = A_{N-1}A_{N-2} \dots A_1$ . Với mỗi  $x_0 \in C$ , dãy  $\{x_n\}$  được xây dựng như sau

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) P_C \left[ x_n - \gamma_n \sum_{i \in I(x_n)} \lambda_i T_i^* (I - P_{Q_i}) T_i x_n \right],$$

trong đó  $f : H \rightarrow C$  là một ánh xạ co từ  $H$  vào  $C$  với hệ số co  $c \in [0, 1)$ ,  $I(x_n) = \{i : \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\| = \max_{i=1,2,\dots,N-1} \|T_i x_n - P_{Q_i} T_i x_n\|\}$ ,  $\lambda_{i,n} \geq 0$  với mọi  $i \in I(x_n)$  và  $\sum_{i \in I(x_n)} \lambda_{i,n} = 1$ . Nếu  $\{\alpha_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $(\alpha)$  và  $\{\gamma_n\}$  được xác định bởi  $(\gamma 2)$  thì dãy  $\{x_n\}$  hội tụ mạnh tới phần tử  $x^\dagger \in \Omega^{\text{GSFP}}$ , là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân  $\text{VIP}(I - f, \Omega^{\text{SFP MOS}})$  với  $\Omega^{\text{SFP MOS}}$  được thay bởi  $\Omega^{\text{GSFP}}$ .

## 2.2.2 Ví dụ số minh họa

Mục này đưa ra và tính toán một số ví dụ minh họa. Chương trình thực nghiệm được viết bằng ngôn ngữ MATLAB phiên bản 7.0 và được chạy trên LAPTOP Dell, intel(R) Core(TM) i5 – 5280U, CPU @1.60 GHZ upto 1.80GHZ và 4GB RAM.

**Ví dụ 2.2.5.** Cho các tập con lồi, đóng và khác rỗng

$$C = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid \langle a_0, x \rangle \leq b_0\}, \quad Q_1 = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid \langle a_1, y \rangle \leq b_1\},$$

$$Q_2 = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a_2, z \rangle \leq b_2\}, \quad Q_3 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \langle a_3, v \rangle \leq b_3\}$$

với  $a_0 = [1, 1, -2, -1, 1]^\top$ ;  $a_1 = [2, -, 1 - 3, 1]^\top$ ;  $a_2 = [1, -2, 1]^\top$ ;  $a_3 = [1, -1]^\top$ ;  $b_0 = 1$ ;  $b_1 = 0$ ;  $b_2 = 0$ ;  $b_3 = 0$ .

Cho các ánh xạ tuyến tính  $T_1 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $T_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  có các ma trận biểu diễn tương ứng là:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta xét bài toán chấp nhận tách tổng quát: Tìm phần tử  $x^* \in \mathbb{R}^5$  sao cho

$$x^* \in \Omega^{\text{GSFP}} := \{x^* \in C \mid T_1 x^* \in Q_1, T_2 T_1 x^* \in Q_2, T_3 T_2 T_1 x^* \in Q_3\}.$$

Dễ thấy  $\Omega^{\text{GSFP}} \neq \emptyset$  vì  $0 \in \Omega^{\text{GSFP}}$ .

Trước hết, ta minh họa sự hội tụ của dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi Định lý 2.2.1 với  $\gamma_n = \frac{1}{3 \cdot \max_{i=1,3}\{\|T_i\|^2\}}$  và Định lý 2.2.3 với  $\rho_n = 1.95$ . Chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn dừng  $\text{TOL}_n < \varepsilon$ , trong đó  $\varepsilon$  là một ngưỡng sai số cho trước và hàm  $\text{TOL}_n$  được xác định bởi

$$\text{TOL}_n := \frac{1}{4} \left( \|x_n - P_C x_n\|^2 + \|T_1 x_n - P_{Q_1} T_1 x_n\|^2 + \|T_2 T_1 x_n - P_{Q_2} T_2 T_1 x_n\|^2 \right. \\ \left. + \|T_3 T_2 T_1 x_n - P_{Q_3} T_3 T_2 T_1 x_n\|^2 \right).$$

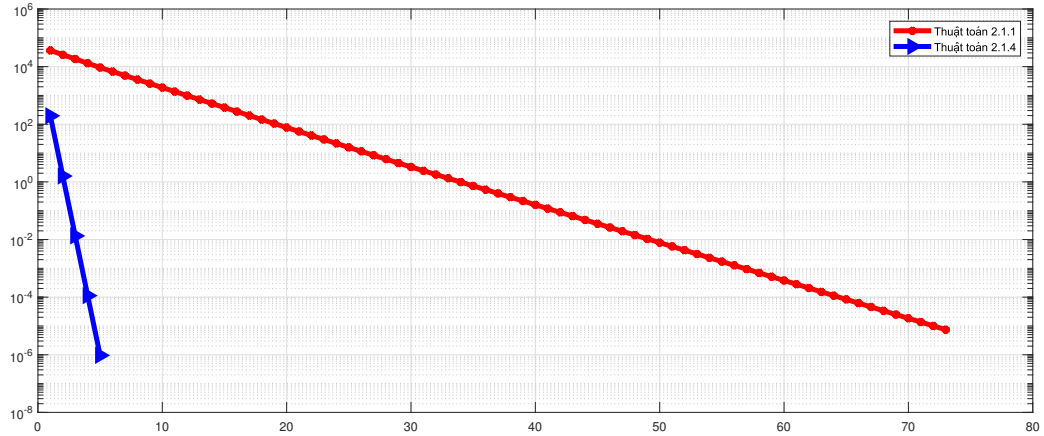
Với xấp xỉ ban đầu  $x_0 = (2, 3, 4, 5, 6)$ , các kết quả tính toán số được thể hiện trong Bảng 2.1.

$\varepsilon$	Thuật toán 2.1.1			Thuật toán 2.1.4		
	TOL <sub>n</sub>	n	TG (giây)	TOL <sub>n</sub>	n	TG (giây)
10 <sup>-3</sup>	9.3837 × 10 <sup>-4</sup>	57	0.0019	1.1286 × 10 <sup>-4</sup>	4	0.0069
10 <sup>-4</sup>	8.3493 × 10 <sup>-5</sup>	65	0.0086	9.5238 × 10 <sup>-7</sup>	5	0.0122
10 <sup>-5</sup>	7.4290 × 10 <sup>-6</sup>	73	0.0087	9.5238 × 10 <sup>-7</sup>	5	0.0120

Bảng 2.1: Kết quả tính toán số của Thuật toán 2.1.1 và 2.1.4

Bảng 2.1 cho thấy để đạt cùng một ngưỡng sai số, số bước lặp ở Thuật toán 2.1.4 ít hơn nhiều so với Thuật toán 2.1.1, tuy nhiên thời gian chạy của Thuật toán 2.1.4 lại lâu hơn.

Dáng điệu của hàm TOL<sub>n</sub> được biểu diễn như trong Hình 2.1.



Hình 2.1: Dáng điệu của hàm TOL<sub>n</sub> với điều kiện dừng TOL<sub>n</sub> < 10<sup>-5</sup>

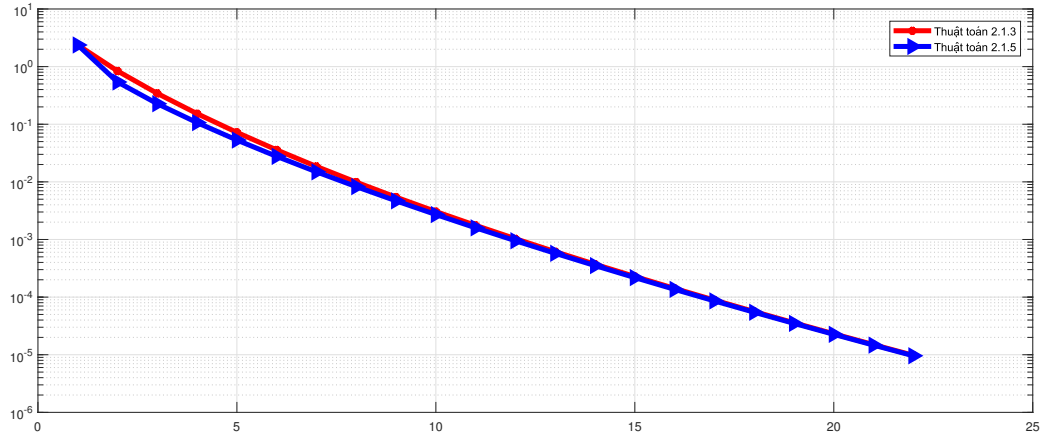
Tiếp theo, ta minh họa sự hội tụ của dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi Định lý 2.2.2 và Định lý 2.2.4 với xấp xỉ ban đầu  $x_0 = (2, 3, 4, 5, 6)$ ,  $\gamma_n = \frac{1}{3 \cdot \max_{i=1,3}\{\|T_i\|^2\}}$ ,  $\alpha_n = n^{-0.25}$ ,  $\rho_n = 1.95$  với mọi  $n \geq 1$  và ánh xạ co  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow C$  xác định bởi  $f(x) = P_C(0.25x)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}^5$ . Dễ thấy rằng  $x^\dagger = (0, 0, 0, 0, 0)$  là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân  $\langle (I - f)x^\dagger, y - x^\dagger \rangle \geq 0, \forall y \in \Omega^{\text{GSFP}}$ . Ta sử dụng điều kiện dừng TOL<sub>n</sub> :=  $\|x_n\| < \varepsilon$  với  $\varepsilon$  là ngưỡng sai số cho trước. Các kết quả số được trình bày trong Bảng 2.2.

Bảng 2.2 cho thấy để đạt cùng một ngưỡng sai số, số bước lặp của Thuật toán 2.1.3 và Thuật toán 2.1.5 là như nhau. Thời gian chạy của Thuật toán 2.1.3

$\varepsilon$	Thuật toán 2.1.3			Thuật toán 2.1.5		
	TOL <sub>n</sub>	n	TG (giây)	TOL <sub>n</sub>	n	TG (giây)
10 <sup>-3</sup>	6.1425 × 10 <sup>-4</sup>	13	0.0054	9.5105 × 10 <sup>-4</sup>	12	0.0097
10 <sup>-4</sup>	8.8734 × 10 <sup>-5</sup>	17	0.0055	8.5941 × 10 <sup>-5</sup>	17	0.0098
10 <sup>-5</sup>	9.7727 × 10 <sup>-6</sup>	22	0.0056	9.5968 × 10 <sup>-6</sup>	22	0.0188

Bảng 2.2: Kết quả tính toán số của Thuật toán 2.1.3 và 2.1.5

nhỏ hơn thời gian chạy của Thuật toán 2.1.5. Dạng điệu của hàm TOL<sub>n</sub> được biểu diễn trong Hình 2.2

Hình 2.2: Dạng điệu của hàm TOL<sub>n</sub> với điều kiện dừng TOL<sub>n</sub> < 10<sup>-5</sup>

**Ví dụ 2.2.6.** Cho các hình cầu  $S, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  tương ứng được xác định bởi

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{10} \mid \|x - a\|^2 \leq R^2\}, \quad S_1 = \{x \in \mathbb{R}^{20} \mid \|x - a_1\|^2 \leq R_1^2\},$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^{30} \mid \|x - a_2\|^2 \leq R_2^2\}, \quad S_3 = \{x \in \mathbb{R}^{40} \mid \|x - a_3\|^2 \leq R_3^2\},$$

$$S_4 = \{x \in \mathbb{R}^{50} \mid \|x - a_4\|^2 \leq R_4^2\}, \quad S_5 = \{x \in \mathbb{R}^{60} \mid \|x - a_5\|^2 \leq R_5^2\},$$

với các tọa độ của tâm  $a, a_1, a_2, a_3$  được lấy bất kì trong khoảng đóng  $[-1, 1]$ , các bán kính  $R, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$  được lấy bất kì trên khoảng đóng  $[10, 20], [20, 40], [30, 60], [40, 80], [50, 100], [60, 120]$  tương ứng. Các toán tử tuyến tính bị chặn  $T_1 : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^{20}, T_2 : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^{30}, T_3 : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^{40}, T_4 : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^{50}$  và  $T_5 : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^{60}$  có các phần tử của ma trận biểu diễn được lấy ngẫu nhiên trong đoạn  $[-5, 5]$ .

Ta xét bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra: Tìm phần tử  $x^\dagger \in \mathbb{R}^{10}$  sao cho

$$x^\dagger \in \Omega^{\text{SFP MOS}} := \{x^\dagger \in S \mid T_i(x^\dagger) \in S_i, i = 1, 2, \dots, 5\}.$$

Trong bài toán này, vì  $0 \in \Omega^{\text{SFP MOS}}$  nên  $\Omega^{\text{SFP MOS}} \neq \emptyset$ .

Trước hết, ta minh họa sự hội tụ của dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi Thuật toán 2.1.3 với các tham số  $\alpha_n = n^{-1}$ ;  $\gamma_n = \frac{1}{5(\sum_{i=1}^5 \|T_i\|^2)}$ , ánh xạ co  $f : \mathbb{R}^{10} \rightarrow S$  xác định bởi  $f(x) = 0.975x$ , với mọi  $x \in \mathbb{R}^{10}$  thỏa mãn các điều kiện trong các Định lý 2.1.1; Định lý 2.1.4. Trong ví dụ này, ta xét điều kiện dừng của Thuật toán 2.1.3 là  $\text{TOL}_n < \varepsilon$ , trong đó hàm  $\text{TOL}_n$  được xác định bởi

$$\begin{aligned} \text{TOL}_n := & \frac{1}{6} \left( \|x_n - P_S^{\mathbb{R}^{10}} x_n\|^2 + \|T_1 x_n - P_{S_1}^{\mathbb{R}^{20}} T_1 x_n\|^2 + \|T_2 x_n - P_{S_2}^{\mathbb{R}^{30}} T_2 x_n\|^2 \right. \\ & \left. + \|T_3 x_n - P_{S_3}^{\mathbb{R}^{40}} T_3 x_n\|^2 + \|T_4 x_n - P_{S_4}^{\mathbb{R}^{50}} T_4 x_n\|^2 + \|T_5 x_n - P_{S_5}^{\mathbb{R}^{60}} T_5 x_n\|^2 \right) \end{aligned}$$

với mọi  $n \geq 1$  và  $\varepsilon$  là một ngưỡng sai số cho trước. Chú ý rằng ở bước lặp thứ  $n$ , nếu  $\text{TOL}_n = 0$  thì  $x_n \in \Omega^{\text{SFP MOS}}$ , tức là  $x_n$  là một nghiệm của bài toán đang xét.

Tiếp theo, ta minh họa sự hội tụ của dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi Thuật toán 2.1.5 với  $\alpha_n = n^{-1}$ , tham số  $\gamma_n$  thỏa mãn Định lý 2.1.5 và  $\rho_n = 1.95$ , ánh xạ co  $f : \mathbb{R}^{10} \rightarrow S$  xác định bởi  $f(x) = \frac{x}{10000}$  với mọi  $x \in \mathbb{R}^{10}$ . Chúng tôi sử dụng điều kiện dừng  $\text{TOL}_n := \|x_n\| < \varepsilon$  với mọi  $n \geq 1$ ,  $\varepsilon$  là một ngưỡng sai số cho trước.

Giả sử các tọa độ của điểm ban đầu  $x_0$  được lấy ngẫu nhiên trong khoảng  $[-2, 2]$ . Chúng ta thu được bảng kết quả số (Bảng 2.3) cho mỗi thuật toán tương ứng.

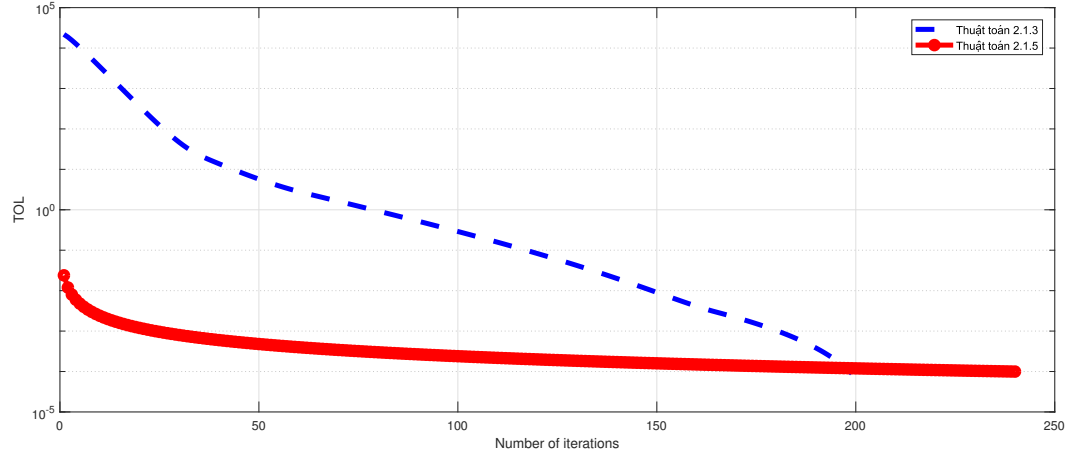
	Thuật toán 2.1.3			Thuật toán 2.1.5		
$\varepsilon$	$\text{TOL}_n$	$n$	TG (giây)	$\text{TOL}_n$	$n$	TG (giây)
$10^{-4}$	$8.9233 \times 10^{-5}$	199	0.0349	$9.9663 \times 10^{-5}$	240	0.0163
$10^{-5}$	$5.5145 \times 10^{-6}$	206	0.0419	$9.9978 \times 10^{-6}$	2393	0.0447
$10^{-6}$	$1.8667 \times 10^{-7}$	208	0.0658	$9.9997 \times 10^{-7}$	23931	0.3899

Bảng 2.3: Kết quả tính toán số của Thuật toán 2.1.3 và 2.1.5

Bảng 2.3 cho thấy với cùng một ngưỡng sai số, số vòng lặp ở Thuật toán 2.1.5 nhiều hơn so với Thuật toán 2.1.3. Khi  $\varepsilon$  nhỏ đi 10 lần thì số vòng lặp của

Thuật toán 2.1.3 tăng không đáng kể trong khi đó số vòng lặp của Thuật toán 2.1.5 tăng lên gấp gần 10 lần. Mặc dù số bước lặp khá lớn ở Thuật toán 2.1.5 nhưng thời gian thực thi ở cả hai thuật toán đều rất nhanh.

Dáng điệu của hàm  $TOL_n$  trong mỗi thuật toán được mô tả trong Hình 2.3.



Hình 2.3: Dáng điệu của hàm  $TOL_n$  với điều kiện dừng  $TOL_n < 10^{-4}$

Dưới đây là một ví dụ trong không gian Hilbert vô hạn chiều.

**Ví dụ 2.2.7.** Xét  $H := L^2[0, 1]$  với tích vô hướng

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \text{ với mọi } f = f(t), g = g(t) \in L^2[0, 1]$$

và chuẩn  $\|f\| = \left( \int_0^1 f^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}}$  với mọi  $f = f(t) \in L^2[0, 1]$ .

Cho  $a_0(t) = \sin t$  và  $a_i(t) = t^i$  với mọi  $t \in [0, 1]$  và  $i = \overline{1, 100}$ , ta xác định các tập con lồi, đóng và khác rỗng sau đây.

$$C = \{x \in L^2[0, 1] \mid \langle a_0, x \rangle \leq 1\};$$

$$Q_i = \{x \in L^2[0, 1] \mid \langle a_i, x \rangle \leq 0\}, \quad i = 1, 2, \dots, 100.$$

Các ánh xạ chuyển  $T_i : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$  được xác định bởi  $T_i x = ix$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, 100$ . Xét bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra như sau.

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega^{\text{SFP MOS}} := C \cap \left( \bigcap_{i=1}^{100} T_i^{-1}(Q_i) \right), \quad \forall i = \overline{1, 100}. \quad (2.44)$$

Để thấy  $\Omega^{\text{SFPMOS}} \neq \emptyset$  vì  $0 \in \Omega^{\text{SFPMOS}}$ .

Ta minh họa sự hội tụ của dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi Thuật toán 2.1.1 với tham số  $\gamma_n = 10^{-6}$  và sự hội tụ của dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi Thuật toán 2.1.4 với tham số  $\gamma_n$  thỏa mãn Định lý 2.1.5 trong đó  $\rho_n = 0.15$ . Ta sử dụng điều kiện dừng  $\text{TOL}_n := \|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon$ , trong đó  $\varepsilon$  là một ngưỡng sai số cho trước.

Để kiểm chứng sự hội tụ của các dãy lặp xác định bởi các thuật toán này tới một phần tử thuộc tập nghiệm của bài toán đang xét, chúng ta xác định thêm tham số

$$m := \max\{\langle a_0, x_n \rangle - 1, \max_{i=1,100} \{\langle a_i, T_i x_n \rangle\}\}.$$

Chú ý rằng, nếu  $m \leq 0$  thì  $x_n$  là một nghiệm của Bài toán (2.44).

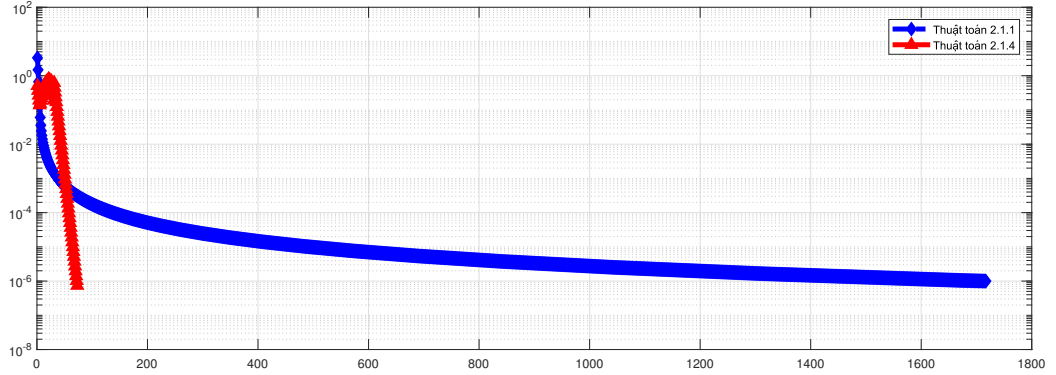
Với phần tử ban đầu  $x_0(t) = e^t$ , ta thu được kết quả số của Thuật toán 2.1.1 và 2.1.4 được trình bày trong Bảng 2.4.

$\varepsilon$		<b>Thuật toán 2.1.1</b>	<b>Thuật toán 2.1.4</b>
$10^{-4}$	$\text{TOL}_n$	$9.8880 \times 10^{-5}$	$9.6610 \times 10^{-5}$
	$n$	138	58
	$m$	1.2567	0.0032
	TG (giây)	0.1136	0.0362
$10^{-5}$	$\text{TOL}_n$	$9.984 \times 10^{-6}$	$9.9286 \times 10^{-6}$
	$n$	494	65
	$m$	1.0543	0.0010
	TG (giây)	0.2629	0.0398
$10^{-6}$	$\text{TOL}_n$	$9.9946 \times 10^{-7}$	$7.3721 \times 10^{-7}$
	$n$	1717	73
	$m$	0.8486	$2.7883 \times 10^{-4}$
	TG (giây)	0.6776	0.0410
$10^{-14}$	$\text{TOL}_n$	$1.0000 \times 10^{-14}$	$9.1730 \times 10^{-15}$
	$n$	3808549	129
	$m$	0.0057	$3.1103 \times 10^{-8}$
	TG (giây)	$1.2760 \times 10^3$	0.0621

Bảng 2.4: Kết quả tính toán số của Thuật toán 2.1.1 và Thuật toán 2.1.4

Từ kết quả số được trình bày trong Bảng 2.4, ta thấy Thuật toán 2.1.4 hội tụ nhanh hơn so với Thuật toán 2.1.1.

Dáng điệu của hàm  $TOL_n$  trong Bảng 2.4 được mô tả trong Hình 2.4.



Hình 2.4: Dáng điệu của hàm  $TOL_n$  với điều kiện dừng  $TOL_n < 10^{-6}$

Tiếp theo, ta minh họa sự hội tụ của dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi Thuật toán 2.1.3 với  $\alpha_n = n^{-0.5}$ ,  $\gamma_n = 5.10^{-5}$  và ánh xạ co  $f : L^2[0, 1] \rightarrow C$  xác định bởi  $f(x) = P_C(0.25x)$ , với mọi  $x \in L^2[0, 1]$ . Đồng thời ta cũng minh họa sự hội tụ của Thuật toán 2.1.5 với các tham số  $\alpha_n = n^{-0.5}$ , tham số  $\gamma_n$  thỏa mãn Định lý 2.1.5 trong đó  $\rho_n = 1.75$  và ánh xạ co  $f : L^2[0, 1] \rightarrow C$  xác định bởi  $f(x) = P_C(0.25x)$  với mọi  $x \in L^2[0, 1]$ . Dễ thấy rằng  $x^*(t) = 0$  là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân  $\langle (I - f)x^\dagger, y - x^\dagger \rangle \geq 0$ ,  $\forall y \in \Omega^{\text{SFPMOS}}$ . Do đó, ta sử dụng điều kiện dừng  $TOL_n := \|x_n\| < \varepsilon$  với  $\varepsilon$  là một ngưỡng sai số cho trước.

Ta thu được kết quả số của Thuật toán 2.1.3 và Thuật toán 2.1.5 được trình bày trong Bảng 2.5.

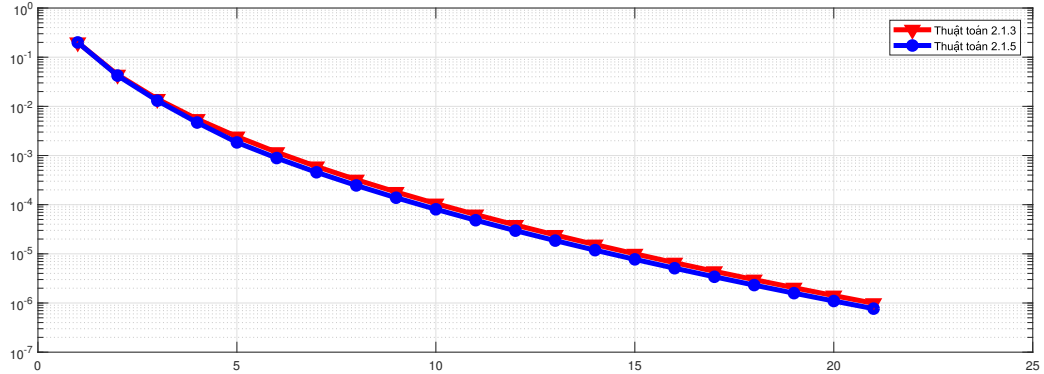
$\varepsilon$	Thuật toán 2.1.3			Thuật toán 2.1.5		
	$TOL_n$	$n$	TG (giây)	$TOL_n$	$n$	TG (giây)
$10^{-4}$	$6.2940 \times 10^{-5}$	11	0.0137	$8.0584 \times 10^{-5}$	10	0.0106
$10^{-5}$	$6.6040 \times 10^{-6}$	16	0.0174	$7.7238 \times 10^{-6}$	15	0.0127
$10^{-6}$	$9.8876 \times 10^{-7}$	21	0.0309	$7.6813 \times 10^{-7}$	21	0.0218

Bảng 2.5: Kết quả tính toán số của Thuật toán 2.1.3 và 2.1.5

Bảng 2.5 cho thấy tốc độ hội tụ của Thuật toán 2.1.3 và Thuật toán 2.1.5 gần như nhau trong ví dụ này.



Dáng điệu của hàm  $TOL_n$  trong Bảng 2.5 được mô tả trong Hình 2.5.



Hình 2.5: Dáng điệu của hàm  $TOL_n$  với điều kiện dừng  $TOL_n < 10^{-6}$

## KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Kết quả chính của Chương 2 bao gồm:

- (a) Dựa trên tiếp cận tối ưu thứ nhất, chúng tôi xây dựng ba thuật toán (Thuật toán 2.1.1, 2.1.2 và 2.1.3) giải Bài toán (SFP MOS) và chứng minh sự hội tụ của dãy lặp về nghiệm của bài toán thông qua các Định lý 2.1.1, 2.1.3 và 2.1.4. Các thuật toán này có ưu điểm là vòng lặp đơn giản, thuận tiện trong thực hành tính toán. Tuy nhiên, cỡ bước lặp được thiết kế phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển.
- (b) Dựa trên cách tiếp cận tối ưu thứ hai và phương pháp lặp Halpern, phương pháp xấp xỉ gắn kết, chúng tôi đề xuất hai thuật toán (Thuật toán 2.1.4 và 2.1.5) giải Bài toán (SFP MOS) và chứng minh sự hội tụ của dãy lặp thông qua các Định lý 2.1.5 và 2.1.7. Ưu điểm của các thuật toán này là đơn giản, cỡ bước được xây dựng tự thích nghi, không phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển.
- (c) Chúng tôi áp dụng các Thuật toán 2.1.1, 2.1.3, 2.1.4 và 2.1.5 cho Bài toán (GSFP). Kết quả hội tụ được cho trong các Định lý 2.2.1–2.2.4.
- (d) Cuối cùng, chúng tôi lấy các ví dụ số minh họa cho hiệu quả của các thuật toán đề xuất, cụ thể như sau:

- Thứ nhất, ví dụ số của Bài toán (GSFP) trong không gian hữu hạn chiều và sử dụng các Thuật toán 2.1.1, 2.1.3, 2.1.4 và 2.1.5 để giải bài toán này.
- Thứ hai, minh họa cho hiệu quả của các Thuật toán 2.1.3 và 2.1.5 thông qua giải ví dụ số của Bài toán (SFPMOS) trong không gian hữu hạn chiều.
- Thứ ba, sử dụng các Thuật toán 2.1.1 và 2.1.4 để giải ví dụ số về Bài toán (SFPMOS) trong không gian vô hạn chiều.

Các kết quả được ghi nhận trong các Bảng 2.1–2.5 và các Hình 2.1–2.5.

## Chương 3

# Bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu và đề xuất một số phương pháp lặp xấp xỉ nghiệm bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra trong các không gian Hilbert thực dựa trên thuật toán kiểu CQ và các thuật toán chiếu. Bố cục của chương được chia thành ba mục. Mục 3.1 trình bày việc xây dựng các thuật toán và chứng minh sự hội tụ của các dãy lặp thu được. Mục 3.2 chỉ ra một số áp dụng cho các bài toán liên quan như bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra, bài toán điểm bất động chung tách cho ánh xạ không giãn, bài toán điểm bất động cho ánh xạ không giãn. Mục 3.3 xây dựng một số ví dụ số minh họa cho tính hiệu quả của thuật toán đề xuất. Các kết quả của chương này được viết trên cơ sở các bài báo (CT3) và (CT4) trong Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án.

### 3.1 Thuật toán và sự hội tụ

Trước hết, chúng tôi phát biểu lại bài toán điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra đã được đề cập trong phần Mở đầu: Cho  $H$  và  $H_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  là các không gian Hilbert thực,  $T_i : H \rightarrow H_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  là các toán tử tuyến tính bị chặn,  $S_j : H \rightarrow H$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  và  $\Xi_k^i : H_i \rightarrow H_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $k = 1, 2, \dots, M_i$  là các ánh xạ không giãn.

$$\begin{aligned} & \text{Tìm } x^* \in \text{Fix}(S_j), \forall j = 1, 2, \dots, M \\ & \text{sao cho } T_i x^* \in \text{Fix}(\Xi_k^i), \forall i = 1, 2, \dots, N, \forall k = 1, 2, \dots, M_i. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ký hiệu  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}}$  là tập nghiệm của Bài toán (3.1), tức là

$$\Omega^{\text{SCFPPMOS}} := \{x^* \in \bigcap_{j=1}^M \text{Fix}(S_j) \mid T_i x^* \in \bigcap_{k=1}^{M_i} \text{Fix}(\Xi_k^i), i = 1, 2, \dots, N\}$$

Trong chương này, chúng tôi luôn giả thiết  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \neq \emptyset$ .

### 3.1.1 Một thuật toán kiểu CQ

Để giải Bài toán (3.1), trước hết chúng tôi xây dựng một thuật toán kiểu CQ. Ưu điểm của thuật toán là chúng tôi thiết kế một cỡ bước tự thích nghi trong mỗi vòng lặp mà không phụ thuộc vào thông tin về chuẩn của toán tử chuyển.

#### Thuật toán 3.1.1.

- Bước 0.** – Với xấp xỉ ban đầu  $x_0 \in H$  tùy ý;
- Tham số  $\{\rho_n\} \subset [c, d] \subset (0, 1)$ ;
  - Tham số  $\{\alpha_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $(\alpha)$ ;
  - $\{a_n\}$  là một dãy bị chặn;
  - Ánh xạ co  $f : H \rightarrow H$  với hệ số co  $c \in [0, 1)$ .

Đặt  $n := 1$ .

- Bước 1.** Tính  $y_{j,n} = S_j x_n$  với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$  và đặt

$$d_n = \max_{j=1,2,\dots,M} \{\|y_{j,n} - x_n\|\},$$

$$L_n = \{j \in \{1, 2, \dots, M\} \mid \|y_{j,n} - x_n\| = d_n\}.$$

- Bước 2.** Tính  $z_{k,n}^i = \Xi_k^i(T_i x_n)$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$  và  $k = 1, 2, \dots, M_i$ , đặt

$$d_{i,n} = \max_{k=1,2,\dots,M_i} \{\|z_{k,n}^i - T_i x_n\|\}, i = 1, 2, \dots, N,$$

$$L_{i,n} = \{k \in \{1, 2, \dots, M_i\} \mid \|z_{k,n}^i - T_i x_n\| = d_{i,n}\}, i = 1, 2, \dots, N.$$

- Bước 3.** Đặt  $\Gamma_n := \max\{d_n, \max_{i=1,2,\dots,N} \{d_{i,n}\}\}$ .

Nếu  $d_n = \Gamma_n$  thì chọn  $j_n \in L_n$  và đặt  $t_n = y_{j_n,n}$ ,  $\Theta = I$ .

Ngược lại, nếu  $d_{i_n,n} = \Gamma_n$  thì chọn  $k_n \in L_{i_n,n}$ , và đặt  $t_n = z_{k_n,n}^{i_n}$ ,  $\Theta = T_{i_n}$ .

- Bước 4.** Tính  $u_n = x_n - \delta_n \Theta^*(\Theta x_n - t_n)$ , trong đó

$$\delta_n = \rho_n \frac{\|\Theta x_n - t_n\|^2}{\|\Theta^*(\Theta x_n - t_n)\|^2 + a_n}. \quad (\delta_n)$$

**Bước 5.** Tính  $x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)u_n$ ,  $n \geq 0$ .

Đặt  $n := n + 1$  và quay lại **Bước 1**.

Để chứng minh sự hội tụ của dãy lặp  $\{x_n\}$  xác định bởi Thuật toán 3.1.1, đầu tiên chúng tôi chứng minh hai mệnh đề sau.

**Mệnh đề 3.1.1.** Cho  $H_1$  và  $H_2$  là hai không gian Hilbert thực,  $T : H_1 \rightarrow H_2$  là một toán tử tuyến tính bị chặn và  $\Xi : H_2 \rightarrow H_2$  là một ánh xạ không giãn. Giả sử  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} = \{q \in H_1 \mid Tq \in \text{Fix}(\Xi)\} \neq \emptyset$ . Khi đó, với mỗi  $q \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$  và  $x \in H_1$ , ta có

$$\|x - \delta T^*(I - \Xi)Tx - q\|^2 \leq \|x - q\|^2 - \rho(1 - \rho) \frac{\|(I - \Xi)Tx\|^4}{\|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 + \gamma},$$

trong đó  $\delta = \rho \frac{\|(I - \Xi)Tx\|^2}{\|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 + \gamma}$ ,  $\gamma$  là một số thực dương và  $\rho \in (0, 1)$ .

*Chứng minh.* Với  $q \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$  và  $x \in H_1$ , áp dụng Mệnh đề 1.1.3 iii) và tính không giãn của toán tử  $\Xi$ , ta có

$$\begin{aligned} & \|x - \delta T^*(I - \Xi)Tx - q\|^2 \\ &= \|x - q\|^2 + \delta^2 \|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 - 2\delta \langle x - q, T^*(I - \Xi)Tx \rangle \\ &= \|x - q\|^2 + \delta^2 \|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 - 2\delta \langle Tx - Tq, (I - \Xi)Tx \rangle \\ &= \|x - q\|^2 + \delta^2 \|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 \\ &\quad - \delta (\|Tx - Tq\|^2 + \|(I - \Xi)Tx\|^2 - \|\Xi(Tx) - Tq\|^2) \\ &= \|x - q\|^2 + \delta^2 \|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 \\ &\quad + \delta (\|\Xi(Tx) - \Xi(Tq)\|^2 - \|Tx - Tq\|^2 - \|(I - \Xi)Tx\|^2) \\ &\leq \|x - q\|^2 + \delta^2 \|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 \\ &\quad + \delta (\|Tx - Tq\|^2 - \|Tx - Tq\|^2 - \|(I - \Xi)Tx\|^2) \\ &= \|x - q\|^2 + \delta^2 \|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 - \delta \|(I - \Xi)Tx\|^2 \\ &\leq \|x - q\|^2 + \rho^2 \frac{\|(I - \Xi)Tx\|^4}{(\|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 + \gamma)^2} \|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 \\ &\quad - \rho \frac{\|(I - \Xi)Tx\|^4}{\|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 + \gamma} \\ &\leq \|x - q\|^2 + \rho^2 \frac{\|(I - \Xi)Tx\|^4}{(\|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 + \gamma)^2} (\|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 + \gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \rho \frac{\|(I - \Xi)Tx\|^4}{\|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 + \gamma} \\
& = \|x - q\|^2 + \rho^2 \frac{\|(I - \Xi)Tx\|^4}{\|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 + \gamma} - \rho \frac{\|(I - \Xi)Tx\|^4}{\|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 + \gamma} \\
& = \|x - q\|^2 - \rho(1 - \rho) \frac{\|(I - \Xi)Tx\|^4}{\|T^*(I - \Xi)Tx\|^2 + \gamma}.
\end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh.  $\square$

Mệnh đề sau đây giới thiệu hai tính chất quan trọng được sử dụng để chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi Thuật toán 3.1.1.

**Mệnh đề 3.1.2.** *Giả sử  $\{x_n\}$  là một dãy được xác định bởi Thuật toán 3.1.1. Khi đó, ta có*

i) Với mỗi  $q \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$ , tồn tại một số thực dương  $L$  sao cho

$$\Gamma_n^4 \leq \frac{L}{\rho_n(1 - \rho_n)} (s_n - s_{n+1} + \alpha_n \|f(x_n) - q\|^2), \quad (3.2)$$

với  $s_n = \|x_n - q\|^2$ .

ii) Bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$s_{n+1} \leq [1 - (1 - c)\alpha_n]s_n + \alpha_n b_n, \quad (3.3)$$

trong đó  $b_n = 2\langle f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle$ .

*Chứng minh.* i) Chúng ta xem xét hai trường hợp sau.

**Trường hợp 1:**  $d_n = \max \{d_n, \max_{i=1,2,\dots,N} \{d_{i,n}\}\}$ .

Trong trường hợp này, áp dụng Mệnh đề 3.1.1 với  $T = \theta = I$ ,  $\Xi = S_{j_n}$  và  $\gamma = a_n$ , với mỗi  $q \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$ , ta có

$$\begin{aligned}
\|u_n - q\|^2 & = \|x_n + \delta_n \Theta^*(\Theta x_n - S_{j_n} \Theta x_n)\|^2 \\
& \leq \|x_n - q\|^2 - \rho_n(1 - \rho_n) \frac{\|x_n - y_{j_n,n}\|^4}{\|x_n - y_{j_n,n}\|^2 + a_n}.
\end{aligned} \quad (3.4)$$

Từ đây ta suy ra

$$\|u_n - q\| \leq \|x_n - q\|. \quad (3.5)$$

**Trường hợp 2:**  $d_{i_n, n} = \max \{d_n, \max_{i=1, \dots, N} \{d_{i, n}\}\}$ .

Trong trường hợp này, áp dụng Mệnh đề 3.1.1 với  $T = \theta = T_{i_n}$ ,  $\Xi = \Xi_{k_n}$  và  $\gamma = a_n$ , với mỗi  $q \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$ , ta thu được

$$\begin{aligned}
\|u_n - q\|^2 &= \|x_n - \delta_n \Theta^*(\Theta x_n - t_n) - q\|^2 \\
&= \|x_n - \delta_n \Theta^*(\Theta x_n - z_{k_n, n}^{i_n}) - q\|^2 \\
&= \|x_n - \delta_n \Theta^*(\Theta x_n - \Xi_{k_n}^{i_n}(T_{i_n} x_n)) - q\|^2 \\
&= \|x_n - \delta_n \Theta^*(\Theta x_n - \Xi_{k_n}^{i_n} \Theta x_n) - q\|^2 \\
&= \|x_n - \delta_n \Theta^*(I - \Xi_{k_n}^{i_n}) \Theta x_n - q\|^2 \\
&\leq \|x_n - q\|^2 - \rho_n(1 - \rho_n) \frac{\|(I - \Xi_{k_n}^{i_n}) \Theta x_n\|^4}{\|\Theta^*(I - \Xi_{k_n}^{i_n}) \Theta x_n\|^2 + a_n} \\
&= \|x_n - q\|^2 - \rho_n(1 - \rho_n) \frac{\|(I - \Xi_{k_n}) T_{i_n} x_n\|^4}{\|T_{i_n}^*(I - \Xi_{k_n}) T_{i_n} x_n\|^2 + a_n}. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Từ đây ta cũng suy ra

$$\|u_n - q\| \leq \|x_n - q\|. \tag{3.7}$$

Trước hết, ta chứng minh dãy  $\{x_n\}$  bị chặn. Thật vậy, với một điểm cố định  $q \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$  và sử dụng tính lồi của chuẩn trên  $H_1$ , các bất đẳng thức (3.5) và (3.7), ta có

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - q\| &= \|\alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) u_n - q\| \\
&= \|\alpha_n (f(x_n) - q) + (1 - \alpha_n) (u_n - q)\| \\
&= \|\alpha_n (f(x_n) - f(q) + f(q) - q) + (1 - \alpha_n) (u_n - q)\| \\
&\leq \alpha_n (\|f(x_n) - f(q)\| + \|f(q) - q\|) + (1 - \alpha_n) \|u_n - q\| \\
&\leq c \alpha_n \|x_n - q\| + \alpha_n \|f(q) - q\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - q\| \\
&= [1 - (1 - c) \alpha_n] \|x_n - q\| + (1 - c) \alpha_n \frac{\|f(q) - q\|}{1 - c} \\
&\leq \max \left\{ \|x_n - q\|, \frac{\|f(q) - q\|}{1 - c} \right\} \\
&\quad \vdots \\
&\leq \max \left\{ \|x_0 - q\|, \frac{\|f(q) - q\|}{1 - c} \right\}.
\end{aligned}$$

Do vậy, dãy  $\{x_n\}$  bị chặn. Vì ánh xạ  $S_j$  và  $\Xi_k$  là các ánh xạ không giãn và  $T_i$  là một toán tử tuyến tính bị chặn nên các dãy  $\{y_{j_n}\}$  và  $\{z_{k,n}^i\}$  cũng bị chặn với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  và  $k = 1, 2, \dots, M_i$ . Kết hợp với tính bị chặn của dãy  $\{a_n\}$ , ta suy ra

$$L := \max \left\{ \sup_n \{\|x_n - y_{j_n,n}\|^2 + a_n\}, \sup_n \{\|T_{i_n}^*(I - \Xi_{k_n})T_{i_n}x_n\|^2 + a_n\} \right\} < \infty.$$

Từ (3.4) và (3.6), ta thu được

$$\|u_n - q\|^2 \leq \|x_n - q\|^2 - \rho_n(1 - \rho_n)\frac{\Gamma_n^4}{L}.$$

Điều này tương đương với

$$\Gamma_n^4 \leq \frac{L}{\rho_n(1 - \rho_n)}(\|x_n - q\|^2 - \|u_n - q\|^2). \quad (3.8)$$

Sử dụng tính lồi của hàm  $\|\cdot\|^2$ , ta đánh giá được

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\|^2 &= \|\alpha_n(f(x_n) - q) + (1 - \alpha_n)(u_n - q)\|^2 \\ &\leq \alpha_n\|f(x_n) - q\|^2 + (1 - \alpha_n)\|u_n - q\|^2 \\ &\leq \alpha_n\|f(x_n) - q\|^2 + \|u_n - q\|^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Từ (3.8) và (3.9) suy ra

$$\|x_{n+1} - q\|^2 \leq \alpha_n\|f(x_n) - q\|^2 + \|x_n - q\|^2 - \frac{\rho_n(1 - \rho_n)}{L}\Gamma_n^4.$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\Gamma_n^4 \leq \frac{L}{\rho_n(1 - \rho_n)}(s_n - s_{n+1} + \alpha_n\|f(x_n) - q\|^2),$$

trong đó  $s_n = \|x_n - q\|^2$ .

ii) Với mỗi  $q \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$ , ta có

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\|^2 &= \langle \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)u_n - q, x_{n+1} - q \rangle \\ &= \langle \alpha_n(f(x_n) - q) + (1 - \alpha_n)(u_n - q), x_{n+1} - q \rangle \\ &= (1 - \alpha_n)\langle u_n - q, x_{n+1} - q \rangle + \alpha_n\langle f(x_n) - q, x_{n+1} - q \rangle \\ &\leq \frac{1 - \alpha_n}{2}(\|x_{n+1} - q\|^2 + \|u_n - q\|^2) + \alpha_n\langle f(x_n) - f(q) + f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - \alpha_n}{2} (\|x_{n+1} - q\|^2 + \|u_n - q\|^2) + \alpha_n \langle f(x_n) - f(q), x_{n+1} - q \rangle \\
&\quad + \alpha_n \langle f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle \\
&\leq \frac{1 - \alpha_n}{2} (\|x_{n+1} - q\|^2 + \|u_n - q\|^2) + \frac{\alpha_n}{2} (c\|x_n - q\|^2 + \|x_{n+1} - q\|^2) \\
&\quad + \alpha_n \langle f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle \\
&\leq \frac{1 - \alpha_n}{2} (\|x_{n+1} - q\|^2 + \|u_n - q\|^2) + \frac{\alpha_n}{2} (c\|x_n - q\|^2 + \|x_{n+1} - q\|^2) \\
&\quad + \alpha_n \langle f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle.
\end{aligned}$$

Điều này tương đương với

$$\begin{aligned}
2\|x_{n+1} - q\|^2 &\leq (1 - \alpha_n)(\|x_{n+1} - q\|^2 + \|u_n - q\|^2) \\
&\quad + \alpha_n (c\|x_n - q\|^2 + \|x_{n+1} - q\|^2) \\
&\quad + 2\alpha_n \langle f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle.
\end{aligned}$$

Do đó ta nhận được

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - q\|^2 &\leq (1 - \alpha_n)\|u_n - q\|^2 + c\alpha_n\|x_n - q\|^2 \\
&\quad + 2\alpha_n \langle f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle.
\end{aligned}$$

Vì  $\|u_n - q\|^2 \leq \|x_n - q\|^2$  nên

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - q\|^2 &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - q\|^2 + c\alpha_n\|x_n - q\|^2 + 2\alpha_n \langle f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle. \\
&= [1 - (1 - c)\alpha_n]\|x_n - q\|^2 + 2\alpha_n \langle f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng này có thể viết lại như sau

$$s_{n+1} \leq [1 - (1 - c)\alpha_n]s_n + \alpha_n b_n,$$

trong đó  $b_n = 2\langle f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle$ . □

Định lý sau đây trình bày về sự hội tụ của dãy lặp xác định bởi Thuật toán 3.1.1.

**Định lý 3.1.3.** *Dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi Thuật toán 3.1.1 hội tụ mạnh tới một phần tử  $x^\dagger \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$ , là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân  $VIP(I - f, \Omega^{\text{SFP MOS}})$  với  $\Omega^{\text{SFP MOS}}$  được thay bởi  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}}$ .*

*Chứng minh.* Vì  $f$  là ánh xạ co nên  $P_{\Omega^{\text{SCFPMMOS}}}$   $f$  cũng là ánh xạ co. Theo nguyên lý ánh xạ co Bannach, tồn tại duy nhất một điểm bất động  $x^\dagger \in H$  của ánh xạ co  $P_{\Omega^{\text{SCFPMMOS}}} f$  sao cho  $x^\dagger$  là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân  $\text{VIP}(I - f, \Omega^{\text{SFPMMOS}})$  với  $\Omega^{\text{SFPMMOS}}$  được thay bởi  $\Omega^{\text{SCFPMMOS}}$ .

Đặt  $s_n := \|x_n - x^\dagger\|^2$ . Sử dụng Bất đẳng thức (3.3) trong Mệnh đề 3.1.2, ta có

$$s_{n+1} \leq [1 - (1 - c)\alpha_n]s_n + \alpha_n b_n,$$

với  $b_n = 2\langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x_{n+1} - x^\dagger \rangle$ .

Ta sẽ chứng minh  $s_n \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$  bằng cách sử dụng Bổ đề 1.4.3.

Giả sử rằng  $\{s_{n_k}\}$  là một dãy con của dãy  $\{s_n\}$  thỏa mãn  $\liminf_{k \rightarrow \infty} (s_{n_{k+1}} - s_{n_k}) \geq 0$ . Từ (3.2), ta có

$$\Gamma_{n_k}^4 \leq \frac{L}{\rho_n(1 - \rho_n)} (s_{n_k} - s_{n_{k+1}} + \alpha_{n_k} \|f(x_{n_k}) - x^\dagger\|^2).$$

Vì dãy  $\{f(x_{n_k})\}$  là bị chặn,  $\alpha_n \rightarrow 0$  và  $\{\rho_n\} \subset [c, d] \subset (0, 1)$  nên ta suy ra

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \Gamma_{n_k}^4 &\leq \frac{L}{c(1 - d)} (\limsup_{k \rightarrow \infty} (s_{n_k} - s_{n_{k+1}}) + \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} \|f(x_{n_k}) - x^\dagger\|^2) \\ &= \frac{L}{c(1 - d)} [-\liminf_{k \rightarrow \infty} (s_{n_{k+1}} - s_{n_k}) + \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} \|f(x_{n_k}) - x^\dagger\|^2] \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Do đó  $\Gamma_{n_k} \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Từ định nghĩa của dãy  $\Gamma_n$  có thể thấy dãy  $\{d_{n_k}\}$  và  $\{d_{i, n_k}\}$  cũng hội tụ tới 0. Vì vậy, ta nhận được

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - S_j x_{n_k}\| = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (3.10)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T_i x_{n_k} - \Xi_k(T_i x_{n_k})\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, M_i. \quad (3.11)$$

Tiếp theo, ta chứng minh  $\limsup_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} \leq 0$ . Thật vậy, giả sử  $\{x_{n_{k_l}}\}$  là một dãy con của dãy  $\{x_{n_k}\}$  có tính chất

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x_{n_k} - x^\dagger \rangle = \lim_{l \rightarrow \infty} \langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x_{n_{k_l}} - x^\dagger \rangle.$$

Vì  $\{x_{n_{k_l}}\}$  bị chặn nên tồn tại một dãy con của dãy  $\{x_{n_{k_l}}\}$  hội tụ yếu tới  $x^*$ . Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng  $x_{n_{k_l}} \rightharpoonup x^*$ . Ta sẽ chứng

minh  $x^* \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$ . Theo (3.10), ta nhận thấy  $\|x_{n_{k_l}} - S_j x_{n_{k_l}}\| \rightarrow 0$ , với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$ . Áp dụng nguyên lý nửa đóng (Mệnh đề 1.3.5), ta thu được  $S_j x^* = x^*$  với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$ , tức là  $x^* \in \bigcap_{j=1}^M \text{Fix}(S_j)$ .

Vì  $T_i$  là một toán tử tuyến tính bị chặn nên với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$  ta có  $T_i x_{n_{k_l}} \rightharpoonup T_i x^*$ . Từ Mệnh đề 1.3.5 và theo (3.11) dẫn đến  $\|T_i x_{n_{k_l}} - \Xi_k(T_i x_{n_{k_l}})\| \rightarrow 0$ , với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$  và ta cũng có

$$x^* \in \left( \bigcap_{i=1}^N T_i^{-1} \left( \bigcap_{k=1}^{M_i} \text{Fix}(\Xi_k^i) \right) \right),$$

với mọi  $k = 1, 2, \dots, M_i$ .

Do vậy, ta có  $x^* \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$ . Hơn thế nữa, vì  $x^\dagger = P_{\Omega^{\text{SCFPPMOS}}} f(x^\dagger)$  và (1.1) nên

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x_{n_k} - x^\dagger \rangle = \langle f(x^\dagger) - x^\dagger, x^* - x^\dagger \rangle \leq 0. \quad (3.12)$$

Bây giờ ta chứng minh  $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Thật vậy, từ tính bị chặn của dãy  $\{x_n\}$ ,  $\{u_n\}$  và  $\{f(x_n)\}$ ,  $\alpha_n \rightarrow 0$  và

$$\|x_{n_{k+1}} - u_{n_k}\| = \alpha_{n_k} \|f(x_{n_k}) - u_{n_k}\|,$$

ta có

$$\|x_{n_{k+1}} - u_{n_k}\| \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

Sử dụng (3.4), (3.6) và (3.9), ta nhận được

$$\rho_{n_k} (1 - \rho_{n_k}) \frac{\|\Theta x_{n_k} - t_{n_k}\|^4}{(\|\Theta^*(\Theta x_{n_k} - t_{n_k})\|^2 + a_{n_k})^2} \leq s_{n_k} - s_{n_{k+1}} + \alpha_{n_k} \|f(x_{n_k}) - x^\dagger\|.$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\Theta x_{n_k} - t_{n_k}\|^4}{(\|\Theta^*(\Theta x_{n_k} - t_{n_k})\|^2 + a_{n_k})^2} &\leq \frac{1}{c(1-d)} \left( \limsup_{k \rightarrow \infty} (s_{n_k} - s_{n_{k+1}}) \right. \\ &\quad \left. + \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} \|f(x_{n_k}) - x^\dagger\| \right) \\ &= \frac{1}{c(1-d)} \left( - \liminf_{k \rightarrow \infty} (s_{n_{k+1}} - s_{n_k}) \right. \\ &\quad \left. + \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} \|f(x_{n_k}) - x^\dagger\| \right) \end{aligned}$$

$$\leq 0.$$

Điều này chỉ ra rằng khi  $k \rightarrow \infty$  thì

$$\frac{\|\Theta x_{n_k} - t_{n_k}\|^4}{(\|\Theta^*(\Theta x_{n_k} - t_{n_k})\|^2 + a_{n_k})^2} \rightarrow 0.$$

Từ định nghĩa dãy lặp  $\{u_n\}$  của Thuật toán 3.1.1 dẫn đến

$$\begin{aligned} \|u_{n_k} - x_{n_k}\| &= \delta_{n_k} \|\Theta^*(\Theta x_{n_k} - t_{n_k})\| \\ &= \rho_{n_k} \|\Theta^*(\Theta x_{n_k} - t_{n_k})\| \frac{\|\Theta x_{n_k} - t_{n_k}\|^2}{\|\Theta^*(\Theta x_{n_k} - t_{n_k})\|^2 + a_{n_k}} \\ &\leq \sqrt{\|\Theta^*(\Theta x_{n_k} - t_{n_k})\|^2 + a_{n_k}} \frac{\|\Theta x_{n_k} - t_{n_k}\|^2}{\|\Theta^*(\Theta x_{n_k} - t_{n_k})\|^2 + a_{n_k}} \\ &= \sqrt{\frac{\|\Theta x_{n_k} - t_{n_k}\|^4}{(\|\Theta^*(\Theta x_{n_k} - t_{n_k})\|^2 + a_{n_k})^2}} \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Hay, ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k} - x_{n_k}\| = 0.$$

Kết hợp điều này với (3.13), ta thu được

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| = 0. \quad (3.14)$$

Từ (3.12) và (3.14) suy ra  $\limsup_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} \leq 0$ . Do đó, tất cả các giả thiết của Bổ đề 1.4.3 được thỏa mãn và vì thế  $s_n \rightarrow 0$ , tức là  $x_n \rightarrow x^\dagger = P_{\Omega_{\text{SCFPPMOS}}} f(x^\dagger)$ . Định lý được chứng minh.  $\square$

Tiếp theo, chúng tôi đề xuất phương pháp chiếu lai ghép để giải Bài toán (3.1).

### 3.1.2 Thuật toán chiếu lai ghép

**Thuật toán 3.1.2.** Với xấp xỉ ban đầu  $x_0 \in H$  tùy ý, đặt  $n := 1$ , lược đồ xác định dãy  $\{x_n\}$  bởi thuật toán chiếu lai ghép gồm năm bước với các Bước 1, 2, 3 được thực hiện như Thuật toán 3.1.1 và Bước 4, 5 được thực hiện như sau:

**Bước 4.** Xác định các tập con  $C_n$  và  $Q_n$  của  $H$  như sau:

$$\begin{aligned} C_n &= \{z \in H \mid \|t_n - \Theta z\| \leq \|\Theta x_n - \Theta z\|\}, \\ Q_n &= \{z \in H \mid \langle x_0 - x_n, z - x_n \rangle \leq 0\}. \end{aligned}$$

**Bước 5.** Tính  $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0$ . Đặt  $n := n + 1$  và quay lại **Bước 1**.

Sự xác định của Thuật toán 3.1.2 được thể hiện trong mệnh đề sau.

**Mệnh đề 3.1.4.** *Dãy  $\{x_n\}$  được xây dựng bởi Thuật toán 3.1.2 là hoàn toàn xác định.*

*Chứng minh.* Đầu tiên, ta chứng minh  $C_n$  và  $Q_n$  là các tập con lồi, đóng của  $H$  với mọi  $n \geq 0$ . Thật vậy, với mọi số nguyên  $n \geq 0$ , từ cách xác định tập  $C_n, Q_n$  ta thấy

$$\begin{aligned} C_n &= \{z \in H \mid \|t_n - \Theta z\| \leq \|\Theta x_n - \Theta z\|\} \\ &= \{z \in H \mid \|t_n - \Theta z\|^2 \leq \|\Theta x_n - \Theta z\|^2\} \\ &= \{z \in H \mid \langle \Theta^*(\Theta x_n - t_n), z \rangle \leq \frac{1}{2}(\|\Theta x_n\|^2 - \|t_n\|^2)\}, \\ Q_n &= \{z \in H \mid \langle x_0 - x_n, z - x_n \rangle \leq 0\} \\ &= \{z \in H \mid \langle x_0 - x_n, z \rangle - \langle x_0 - x_n, x_n \rangle \leq 0\} \\ &= \{z \in H \mid \langle x_0 - x_n, z \rangle \leq \langle x_0 - x_n, x_n \rangle\}. \end{aligned}$$

Vì  $C_n, Q_n$  là các nửa không gian đóng nên suy ra  $C_n, Q_n$  là các tập con lồi, đóng của  $H$  và vì thế  $C_n \cap Q_n$  cũng là tập con lồi, đóng của không gian Hilbert  $H$ .

Tiếp theo, để chứng minh  $C_n \cap Q_n \neq \emptyset$  ta chứng minh  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}}$  là tập con của tập  $C_n \cap Q_n$  với mọi  $n \geq 0$ . Thật vậy, với bất kỳ điểm  $p \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$  thì  $S_j p = p$  với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$  và  $\Xi_k^i(T_i p) = T_i p$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$  và  $k = 1, 2, \dots, M_i$ . Từ tính chất của ánh xạ không giãn  $S_j$  và  $\Xi_k^i$ , chúng ta có

$$\begin{aligned} \|t_n - \Theta p\| &= \begin{cases} \|y_{j_n, n} - p\|, & \text{nếu } d_n = \max \{d_n, \max_{i=1,2,\dots,N} \{d_{i,n}\}\}, \\ \|z_{k_n, n}^i - T_i p\|, & \text{nếu } d_{i,n} = \max \{d_n, \max_{i=1,2,\dots,N} \{d_{i,n}\}\}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \|S_{j_n} x_n - S_{j_n} p\|, & \text{nếu } d_n = \max \{d_n, \max_{i=1,2,\dots,N} \{d_{i,n}\}\}, \\ \|\Xi_{k_n}^i(T_i x_n) - \Xi_{k_n}^i(T_i p)\|, & \text{nếu } d_{i,n} = \max \{d_n, \max_{i=1,2,\dots,N} \{d_{i,n}\}\}, \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \|x_n - p\|, & \text{nếu } d_n = \max \{d_n, \max_{i=1,2,\dots,N} \{d_{i,n}\}\}, \\ \|T_i x_n - T_i p\|, & \text{nếu } d_{i,n} = \max \{d_n, \max_{i=1,2,\dots,N} \{d_{i,n}\}\}, \end{cases} \\ &= \|\Theta x_n - \Theta p\|. \end{aligned}$$

Điều này chỉ ra rằng  $p \in C_n$  với mọi  $n \geq 0$  nên suy ra  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset C_n$  với mọi  $n \geq 0$ . Bây giờ chúng ta chứng minh  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset Q_n$  với mọi  $n \geq 0$  bằng phương pháp quy nạp. Với  $n = 0$  thì  $Q_0 = H$  nên  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset H = Q_0$ . Giả sử  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset Q_n$  với một giá trị  $n \geq 0$ . Ta cần chứng minh  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset Q_{n+1}$ . Vì  $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0$  và theo tính chất của phép chiếu mê tric (1.1) nên ta có

$$\langle z - x_{n+1}, x_0 - x_{n+1} \rangle \leq 0, \forall z \in C_n \cap Q_n.$$

Vì  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset C_n \cap Q_n$  và  $p \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$  nên  $\langle p - x_{n+1}, x_0 - x_{n+1} \rangle \leq 0$ . Điều này suy ra  $p \in Q_{n+1}$ , tức là  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset Q_{n+1}$ . Bằng phương pháp quy nạp ta nhận được  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset Q_n$  với mọi  $n \geq 0$ . Vậy  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset C_n \cap Q_n$  với mọi  $n \geq 0$ .

Các chứng minh trên chỉ ra  $C_n \cap Q_n$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $H$  với mọi số nguyên  $n \geq 0$  và vì thế dãy  $\{x_n\}$  là hoàn toàn xác định.  $\square$

Mệnh đề sau khẳng định tính bị chặn của dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi Thuật toán 3.1.2.

**Mệnh đề 3.1.5.** *Dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi Thuật toán 3.1.2 bị chặn và*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0.$$

*Chứng minh.* Nếu đặt  $x^\dagger = P_{\Omega^{\text{SCFPPMOS}}} x_0$  thì  $x^\dagger \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset Q_n$  với mọi  $n \geq 0$ . Mặt khác, từ định nghĩa của tập  $Q_n$  và tính chất của phép chiếu mê tric chúng ta có  $x_n = P_{Q_n} x_0$ , với mọi  $n \geq 0$ . Áp dụng định nghĩa phép chiếu mê tric, ta có

$$\|x_n - x_0\| \leq \|x^\dagger - x_0\|, \quad (3.15)$$

với mọi  $n \geq 0$ . Do vậy dãy  $\{x_n\}$  là bị chặn.

Vì  $x_{n+1} \in Q_n$  và  $x_n = P_{Q_n} x_0$  nên từ Định lý 1.2 suy ra

$$0 \leq \|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq \|x_{n+1} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2 \rightarrow 0. \quad (3.16)$$

Ước lượng trên dẫn đến  $\|x_n - x_0\| \leq \|x_{n+1} - x_0\|$ .

Do đó dãy  $\{\|x_n - x_0\|\}$  là một dãy tăng và bị chặn nên tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|$ . Sử dụng (3.16), ta nhận được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \quad (3.17)$$

Hay nói cách khác, ta có dãy  $\{x_n\}$  bị chặn và  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ . Bổ đề được chứng minh.  $\square$

Với mỗi dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi Thuật toán 3.1.2, ta chứng minh mệnh đề sau.

**Mệnh đề 3.1.6.** *Với mỗi dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi Thuật toán 3.1.2, chúng ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n - \Theta x_n\| = 0$ .*

*Chứng minh.* Từ (3.17) ta có đánh giá sau

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Theta x_{n+1} - \Theta x_n\| \leq \|\Theta\| \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0.$$

Điều này tương đương với

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Theta x_{n+1} - \Theta x_n\| = 0. \quad (3.18)$$

Vì  $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0$  nên  $x_{n+1} \in C_n$ . Từ định nghĩa của tập  $C_n$ , chúng ta thu được

$$0 \leq \|t_n - \Theta x_{n+1}\| \leq \|\Theta x_n - \Theta x_{n+1}\| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Điều này dẫn đến

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n - \Theta x_{n+1}\| = 0. \quad (3.19)$$

Mặt khác, ta có

$$0 \leq \|t_n - \Theta x_n\| \leq \|t_n - \Theta x_{n+1}\| + \|\Theta x_{n+1} - \Theta x_n\|.$$

Kết hợp phân tích này với (3.18), (3.19), ta suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n - \Theta x_n\| = 0$ .  $\square$

Bây giờ, ta chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy  $\{x_n\}$  được xây dựng bởi Thuật toán 3.1.2 trong định lý sau.

**Định lý 3.1.7.** *Giả sử các giả thiết của Bài toán (3.1) được thoả mãn. Khi đó dãy  $\{x_n\}$  được xây dựng bởi Thuật toán 3.1.2 hội tụ mạnh tới  $x^\dagger = P_{\Omega_{\text{SCFPPMOS}}} x_0$ .*

*Chứng minh.* Đặt  $x^\dagger = P_{\Omega_{\text{SCFPPMOS}}} x_0$ . Ta sẽ chứng minh  $x_n \rightarrow x^\dagger$  khi  $n \rightarrow \infty$ .

Theo Mệnh đề 3.1.6 thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n - \Theta x_n\| = 0$  và kết hợp với định nghĩa của  $t_n$ , ta có

$$\|x_n - S_j x_n\| \rightarrow 0, \quad \|T_i x_n - \Xi_k^i(T_i x_n)\| \rightarrow 0, \quad (3.20)$$

với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  và  $k = 1, 2, \dots, M_i$ .

Theo mệnh đề 3.1.5, dãy  $\{x_n\}$  là bị chặn nên tồn tại một dãy con  $\{x_{n_m}\}$  của  $\{x_n\}$  sao cho  $x_{n_m} \rightharpoonup x^*$  khi  $m \rightarrow \infty$ . Vì  $T_i$  là một toán tử tuyến tính bị chặn nên ta cũng có  $T_i x_{n_m} \rightharpoonup T_i x^*$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ . Từ (3.20) suy ra

$$\|(I - S_j)x_{n_m}\| \rightarrow 0 \text{ khi } m \rightarrow \infty,$$

và

$$\|(I - \Xi_k^i)(T_i x_{n_m})\| \rightarrow 0, \text{ khi } m \rightarrow \infty,$$

với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $k = 1, 2, \dots, M_i$ . Theo giả thiết  $S_j$  là ánh xạ không giãn trên  $H$  và  $\Xi_k^i$  là ánh xạ không giãn trên không gian  $H_i$ , tương ứng. Áp dụng nguyên lý nửa đóng (Mệnh đề 1.3.5), ta thu được  $x^* \in \text{Fix}(S_j)$  với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$  và  $T_i x^* \in \text{Fix}(\Xi_k^i)$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $k = 1, 2, \dots, M_i$ . Vậy  $x^* \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$ .

Vì  $x^\dagger = P_{\Omega^{\text{SCFPPMOS}}} x_0$ ,  $x^* \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$  nên từ (3.15) và áp dụng Mệnh đề 1.1.6 ta có

$$\begin{aligned} \|x_0 - x^\dagger\| &\leq \|x_0 - x^*\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_m} - x_0\| \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|x_{n_m} - x_0\| \leq \|x_0 - x^\dagger\|. \end{aligned}$$

Vì  $x^\dagger = P_{\Omega^{\text{SCFPPMOS}}} x_0$  là duy nhất nên  $x^\dagger = x^*$ .

Ta cũng có  $\|x_{n_m} - x_0\| \rightarrow \|x^\dagger - x_0\|$  nên nhờ Mệnh đề 1.1.7, ta nhận được  $x_{n_m} \rightarrow x^\dagger$  khi  $m \rightarrow \infty$ . Sử dụng lại tính duy nhất của  $x^\dagger = P_{\Omega^{\text{SCFPPMOS}}} x_0$  ta thu được  $x_n \rightarrow x^\dagger$  khi  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng thuật toán chiếu thu hẹp để giải Bài toán (3.1).

### 3.1.3 Thuật toán chiếu thu hẹp

**Thuật toán 3.1.3.** Với mỗi  $x_0 \in H$ , đặt  $C_0 = H$  và  $n := 1$ , lược đồ xác định dãy  $\{x_n\}$  bởi thuật toán chiếu thu hẹp gồm năm bước với các Bước 1, 2, 3, cũng được thực hiện như Thuật toán 3.1.1 và Bước 4, 5 được thực hiện như sau:

**Bước 4.** Xác định các tập con  $C_{n+1}$  của  $H$  như sau:

$$C_{n+1} = \{z \in C_n \mid \|t_n - \Theta z\| \leq \|\Theta x_n - \Theta z\|\}.$$



**Bước 5.** Tính  $x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0$ . Đặt  $n := n + 1$  và quay lại **Bước 1**.

**Nhận xét 3.1.8.** Trong Thuật toán 3.1.3, chúng tôi đặt  $C_0 = H$  và ở Bước 4 của thuật toán, chúng tôi xây dựng tập  $C_{n+1} \subseteq C_n$  với mọi  $n \geq 0$ . Khi đó, tại mỗi bước lặp thay vì chiếu phần tử ban đầu  $x_0$  trên giao của hai tập con lồi, đóng, khác rỗng  $C_n$  và  $Q_n$  như Thuật toán 3.1.2, chúng tôi thực hiện phép chiếu phần tử ban đầu  $x_0$  trên một tập con lồi, đóng, khác rỗng  $C_{n+1}$  để xác định phần tử  $x_{n+1}$  với mọi  $n \geq 0$ .

**Mệnh đề 3.1.9.** *Dãy  $\{x_n\}$  được xây dựng bởi Thuật toán 3.1.3 là hoàn toàn xác định.*

*Chứng minh.* Trước hết, ta chứng minh  $C_n$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $H$  bằng phương pháp quy nạp. Với  $n = 0$  thì  $C_0 = H$  nên  $C_0$  là tập con lồi, đóng của  $H$ . Giả sử  $C_n$  là một tập con lồi, đóng của  $H$  với một giá trị  $n \geq 0$  nào đó. Ta cần chứng minh  $C_{n+1}$  là tập con lồi, đóng của  $H$ . Từ cách xác định của tập con  $C_{n+1}$ , ta có thể viết lại

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \{z \in C_n \mid \|t_n - \Theta z\| \leq \|\Theta x_n - \Theta z\|\} \\ &= \{z \in C_n \mid \|t_n - \Theta z\|^2 \leq \|\Theta x_n - \Theta z\|^2\} \\ &= \{z \in C_n \mid \langle \Theta^*(\Theta x_n - t_n), z \rangle \leq \frac{1}{2}(\|\Theta x_n\|^2 - \|t_n\|^2)\} \\ &= C_n \cap \{z \in H_n \mid \langle \Theta^*(\Theta x_n - t_n), z \rangle \leq \frac{1}{2}(\|\Theta x_n\|^2 - \|t_n\|^2)\}. \end{aligned}$$

Vì  $C_{n+1}$  là giao của hai tập lồi, đóng của  $H$  nên  $C_{n+1}$  là tập con lồi, đóng của  $H$ . Vậy  $C_n$  là tập con lồi, đóng của  $H$  với mọi  $n \geq 0$ .

Tiếp theo, ta cần chứng minh tập  $C_n \neq \emptyset$  bằng cách chứng minh với mỗi  $n \geq 0$  thì  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset C_n$ . Ta sử dụng phương pháp quy nạp như sau.

Để thấy, với  $n = 0$  thì  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset H = C_0$ . Giả sử  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset C_n$  với một giá trị  $n \geq 0$  nào đó. Lấy bất kỳ điểm  $p \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$ , bằng một lập luận tương tự như lập luận được sử dụng trong Mệnh đề 3.1.4, ta thu được

$$\|t_n - \Theta p\| \leq \|\Theta x_n - \Theta p\|.$$

Điều này chứng tỏ rằng

$$p \in \{z \in H \mid \|t_n - \Theta z\| \leq \|\Theta x_n - \Theta z\|\}.$$

Vậy  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset \{z \in H \mid \|t_n - \Theta z\| \leq \|\Theta x_n - \Theta z\|\}$ . Kết hợp với giả thiết  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset C_n$ , ta thu được

$$\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset C_n \cap \{z \in H \mid \|t_n - \Theta z\| \leq \|\Theta x_n - \Theta z\|\} = C_{n+1}.$$

Theo phương pháp quy nạp suy ra  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset C_n$  với mọi  $n \geq 0$ . Vậy  $C_n$  là tập con lồng, đóng, khác rỗng của  $H$  với mọi  $n \geq 0$ . Do đó dãy  $\{x_n\}$  là hoàn toàn xác định.  $\square$

Mệnh đề sau đây chỉ ra rằng dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi Thuật toán 3.1.3 là bị chặn

**Mệnh đề 3.1.10.** *Dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi Thuật toán 3.1.3 bị chặn và*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0.$$

*Chứng minh.* Trước hết, ta chứng minh dãy  $\{x_n\}$  là bị chặn. Thật vậy, nếu đặt  $x^\dagger = P_{\Omega^{\text{SCFPPMOS}}} x_0$  thì  $x^\dagger \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$ . Vì  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \subset C_n$  nên  $x^\dagger \in C_n$  với mọi  $n \geq 0$ . Sử dụng  $x_n = P_{C_n} x_0$  và theo định nghĩa của phép chiếu mê tric, ta nhận được

$$\|x_0 - x_n\| \leq \|x_0 - x^\dagger\|, \forall n \geq 0, x^\dagger \in C_n. \quad (3.21)$$

Vậy dãy  $\{x_n\}$  là bị chặn.

Ta có  $x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0 \in C_n$ ,  $x_n = P_{C_n} x_0 \in C_n$ . Áp dụng Mệnh đề 1.2 với  $y = x_{n+1}, x_0 \in H, P_{C_n} x_0 = x_n$ , ta suy ra

$$\|x_n - x_0\|^2 \leq \|x_{n+1} - x_0\|^2 - \|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq \|x_{n+1} - x_0\|^2.$$

Do đó, dãy  $\{\|x_n - x_0\|\}$  là một dãy tăng mà theo chứng minh trên dãy  $\{x_n\}$  bị chặn trên nên tồn tại giới hạn hữu hạn của dãy  $\{\|x_n - x_0\|\}$ .

Bây giờ, chúng ta chỉ ra rằng dãy  $\{x_n\}$  hội tụ mạnh tới một phần tử  $q \in H$ . Thật vậy, với mọi  $m \geq n$ , ta có  $C_m \subset C_n$ . Như vậy  $x_m \in C_n$ . Áp dụng Mệnh đề 1.2 với  $y = x_m, x_0 \in H, P_{C_n} x_0 = x_n$ , ta thu được

$$\|x_m - x_n\|^2 \leq \|x_m - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2 \rightarrow 0,$$

khi  $m, n \rightarrow \infty$ . Vậy dãy  $\{x_n\}$  là một dãy Cauchy. Vì mọi dãy Cauchy đều hội tụ nên tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q$  và vì thế ta có đánh giá sau

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \|x_{n+1} - q\| + \|x_n - q\| \rightarrow 0,$$

tức là  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ .  $\square$

Bằng cách chứng minh tương tự trong Mệnh đề 3.1.6, ta chứng minh được mệnh đề sau đây.

**Mệnh đề 3.1.11.** *Với mỗi dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi Thuật toán 3.1.3, ta luôn có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n - \Theta x_n\| = 0$ .*

Bây giờ, ta chứng minh định lý về sự hội tụ mạnh của dãy  $\{x_n\}$  được xây dựng bởi Thuật toán 3.1.3.

**Định lý 3.1.12.** *Giả sử các giả thiết của Bài toán (3.1) được thoả mãn. Khi đó dãy  $\{x_n\}$  được xây dựng bởi Thuật toán 3.1.3 hội tụ mạnh tới  $x^\dagger = P_{\Omega_{\text{SCFPPMOS}}} x_0$ .*

*Chứng minh.* Đặt  $x^\dagger = P_{\Omega_{\text{SCFPPMOS}}} x_0$ , ta cần chứng minh  $x_n \rightarrow x^\dagger$  khi  $n \rightarrow \infty$ . Chứng minh tương tự Định lý 3.1.7, ta nhận được

$$\|x_n - S_j x_n\| \rightarrow 0, \quad \|T_i x_n - \Xi_k^i(T_i x_n)\| \rightarrow 0, \quad (3.22)$$

với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  và  $k = 1, 2, \dots, M_i$ . Vì  $x_n \rightarrow q$  và  $T_j$  là toán tử tuyến tính bị chặn nên  $T_j x_n \rightarrow T_j q$  với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$ . Sử dụng (3.22) và tính liên tục của  $T_j$  với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$ , và  $\Xi_k^i$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $k = 1, 2, \dots, M_i$  ta suy ra  $q \in \Omega$ .

Cho  $n \rightarrow \infty$  trong (3.21), ta nhận được

$$\|x_0 - q\| \leq \|x_0 - x^\dagger\|$$

và từ tính duy nhất của  $x^\dagger$  ta có  $q = x^\dagger$ . Định lý được chứng minh.  $\square$

## 3.2 Một số áp dụng

### 3.2.1 Áp dụng cho bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra

Như đã trình bày ở phần Mở đầu, Bài toán (3.1) tổng quát hơn Bài toán (2.1). Bây giờ, chúng ta xem xét bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra trong trường hợp tổng quát hơn bài toán được nghiên cứu ở Chương 2: Cho  $H$ ,  $H_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  là các không gian Hilbert thực;  $T_i : H \rightarrow H_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  là các toán tử tuyến tính bị chặn;  $C_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  là các tập con lồi, đóng

của  $H$ ;  $Q_k^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  và  $k = 1, 2, \dots, M_i$  là các tập con lồi, đóng của  $H_i$  tương ứng.

Tìm phần tử  $x^\dagger \in C_j$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots, M$  sao cho

$$T_i x^\dagger \in Q_k^i, \forall i = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, M_i. \quad (\text{GSFPMOS})$$

Ký hiệu  $\Omega^{\text{GSFPMOS}}$  là tập nghiệm của Bài toán (GSFPMOS) và ta luôn giả sử rằng  $\Omega^{\text{GSFPMOS}} \neq \emptyset$ .

Bây giờ, áp dụng Thuật toán 3.1.1 và Định lý 3.1.3 với  $S_j = P_{C_j}$  với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$  và  $\Xi_k^i = P_{Q_k^i}$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $k = 1, 2, \dots, M_i$ , chúng ta thu được một thuật toán kiểu CQ để giải Bài toán (GSFPMOS), trong đó mỗi bước được điều chỉnh để tự thích nghi qua mỗi bước lặp mà không phụ thuộc vào thông tin về chuẩn của toán tử chuyển. Kết quả được khẳng định trong hệ quả sau.

**Hệ quả 3.2.1.** Cho dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi Thuật toán 3.1.1 với  $S_j = P_{C_j}$  với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$  và  $\Xi_k^i = P_{Q_k^i}$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $k = 1, 2, \dots, M_i$ , tương ứng. Nếu dãy  $\{a_n\}$  bị chặn và dãy  $\{\alpha_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $(\alpha)$  thì dãy  $\{x_n\}$  hội tụ mạnh tới một phần tử  $x^\dagger \in \Omega^{\text{GSFPMOS}}$ , là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân  $\text{VIP}(I - f, \Omega^{\text{SFPMOS}})$  trong đó tập  $\Omega^{\text{SFPMOS}}$  được thay bởi  $\Omega^{\text{GSFPMOS}}$ .

Tiếp theo, áp dụng Thuật toán 3.1.2, Thuật toán 3.1.3 và Định lý 3.1.7, Định lý 3.1.12, trong đó thay  $S_j = P_{C_j}$  với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$  và  $\Xi_k^i = P_{Q_k^i}$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $k = 1, 2, \dots, M_i$ , ta thu được thuật toán chiếu lai ghép và thuật toán chiếu thu hẹp tương ứng để giải Bài toán (GSFPMOS) mà cũng không cần biết thông tin về chuẩn của toán tử chuyển. Điều này được khẳng định trong Hệ quả 3.2.2.

**Hệ quả 3.2.2.** Cho  $\{x_n\}$  là một dãy được xác định bởi Thuật toán 3.1.2 hoặc Thuật toán 3.1.3 với  $S_j = P_{C_j}$  với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$  và  $\Xi_k^i = P_{Q_k^i}$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $k = 1, 2, \dots, M_i$ , tương ứng. Khi đó dãy  $\{x_n\}$  hội tụ mạnh tới  $P_{\Omega^{\text{GSFPMOS}}} x_0$  khi  $n \rightarrow \infty$ .

### 3.2.2 Áp dụng cho bài toán điểm bất động chung tách của ánh xạ không giãn

Trong mục này, ta trình bày một áp dụng cho Bài toán (SCFPP). Ký hiệu  $\Omega^{\text{SCFPP}}$  là tập các điểm bất động chung tách của ánh xạ không giãn và ta giả thiết rằng  $\Omega^{\text{SCFPP}} \neq \emptyset$ . Áp dụng Thuật toán 3.1.1, chúng ta thu được một thuật toán để giải Bài toán (SCFPP), trong đó cỡ bước tự điều chỉnh qua mỗi bước lặp mà không phụ thuộc vào thông tin về chuẩn của toán tử chuyển  $T$ . Thuật toán như sau.

#### Thuật toán 3.2.1.

- Bước 0.** – Với xấp xỉ ban đầu  $x_0 \in H_1$  tùy ý;
- Tham số  $\{\rho_n\} \subset [c, d] \subset (0, 1)$ ;
  - Tham số  $\{\alpha_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $(\alpha)$ ;
  - $\{a_n\}$  là một dãy bị chặn;
  - Ánh xạ co  $f : H \rightarrow H$  với hệ số co  $c \in [0, 1)$ .

Đặt  $n := 1$ .

- Bước 1.** Tính  $y_{j,n} = S_j x_n$ , với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$  và đặt

$$d_{1,n} = \max_{j=1,2,\dots,M} \{\|y_{j,n} - x_n\|\},$$

$$L_{1,n} = \{j \in \{1, 2, \dots, M\} \mid \|y_{j,n} - x_n\| = d_{1,n}\}.$$

- Bước 2.** Tính  $z_{k,n} = \Xi_k(Tx_n)$  với mọi  $k = 1, 2, \dots, K$  và đặt

$$d_{2,n} = \max_{k=1,2,\dots,K} \{\|z_{k,n} - Tx_n\|\},$$

$$L_{2,n} = \{k \in \{1, 2, \dots, K\} \mid \|z_{k,n} - Tx_n\| = d_{2,n}\}.$$

- Bước 3.** Cho  $\Gamma_n := \max\{d_{1,n}, d_{2,n}\}$ .

Nếu  $d_{1,n} = \Gamma_n$  thì chọn  $j_n \in L_{1,n}$  và đặt  $t_n = y_{j_n,n}$ ;  $\Theta = I$ .

Ngược lại, nếu  $d_{2,n} = \Gamma_n$  thì chọn  $k_n \in L_{2,n}$  và đặt  $t_n = z_{k_n,n}$ ,  $\Theta = T$ .

- Bước 4.** Tính  $u_n = x_n - \delta_n \Theta^*(\Theta x_n - t_n)$ , với

$$\delta_n = \rho_n \frac{\|\Theta x_n - t_n\|^2}{\|\Theta^*(\Theta x_n - t_n)\|^2 + a_n}.$$

**Bước 5.** Tính  $x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)u_n$ ,  $n \geq 0$ .

Đặt  $n := n + 1$  và quay lại **Bước 1**.

Dãy lặp  $\{x_n\}$  xác định bởi thuật toán này cũng hội tụ mạnh tới một phần tử thuộc tập nghiệm của Bài toán (SCFPP). Từ Định lý 3.1.3, ta nhận được Hệ quả 3.2.3 sau đây.

**Hệ quả 3.2.3.** *Dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi Thuật toán 3.2.1 hội tụ mạnh tới một phần tử  $x^\dagger \in \Omega^{\text{SCFPP}}$ , là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân  $\text{VIP}(I - f, \Omega^{\text{SFP MOS}})$  trong đó thay tập  $\Omega^{\text{SFP MOS}}$  bởi tập  $\Omega^{\text{SCFPP}}$ .*

Bằng việc áp dụng hai Thuật toán 3.1.2 và 3.1.3, ta có hai thuật toán chiếu sau đây để tìm nghiệm của Bài toán (SCFPP).

**Thuật toán 3.2.2.** Với mỗi  $x_0 \in H_1$ , đặt  $n := 1$ , lược đồ xác định dãy  $\{x_n\}$  bởi thuật toán chiếu lai ghép gồm năm bước với các Bước 1, 2 cũng được thực hiện như Thuật toán 3.2.1 và Bước 3, 4, 5 được thực hiện như sau.

**Bước 3.** Nếu  $d_{1,n} \geq d_{2,n}$  thì chọn  $j_n \in L_{1,n}$  và đặt  $t_n = y_{j_n,n}$  và  $\Theta = I^{H_1}$  với  $I^{H_1}$  là toán tử đơn vị của  $H_1$ .

Ngược lại, chọn  $k_n \in L_{2,n}$  và đặt  $t_n = z_{k_n,n}$ ,  $\Theta = T$ .

**Bước 4.** Xác định tập con  $C_n$  và  $Q_n$  của  $H_1$  như sau:

$$C_n = \{z \in H_1 \mid \|t_n - \Theta z\| \leq \|\Theta x_n - \Theta z\|\},$$

$$Q_n = \{z \in H_1 \mid \langle x_0 - x_n, z - x_n \rangle \leq 0\}.$$

**Bước 5.** Tính  $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0$  với mọi  $n \geq 0$ .

Đặt  $n := n + 1$  và quay lại **Bước 1**.

**Thuật toán 3.2.3.** Với mỗi  $x_0 \in H$ , cho  $C_0 = H$ , lược đồ xác định dãy  $\{x_n\}$  bởi thuật toán chiếu thu hẹp gồm năm bước với các Bước 1, 2, 3 cũng được thực hiện như Thuật toán 3.2.2 và Bước 4, 5 được thực hiện như sau.

**Bước 4.** Xác định tập con  $C_{n+1}$  của  $H_1$  như sau:

$$C_{n+1} = \{z \in C_n \mid \|t_n - \Theta z\| \leq \|\Theta x_n - \Theta z\|\},$$

**Bước 5.** Tính  $x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0$  với mọi  $n \geq 0$ .

Sự hội tụ mạnh của dãy lặp  $\{x_n\}$  được xác định bởi hai Thuật toán 3.2.2 và 3.2.3 được khẳng định trong hệ quả sau.

**Hệ quả 3.2.4.** *Nếu các điều kiện của Bài toán (SCFPP) được thỏa mãn thì dãy lặp  $\{x_n\}$  được xác định bởi hai Thuật toán 3.2.2 và 3.2.3 hội tụ mạnh tới  $P_{\Omega^{\text{SCFPP}}} x_0$  khi  $n \rightarrow \infty$ .*

### 3.2.3 Áp dụng cho bài toán điểm bất động của ánh xạ không gian

Cho  $H$  là một không gian Hilbert thực,  $S_j : H \rightarrow H$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  là các ánh xạ không gian.

$$\text{Tìm phần tử } x^\dagger \in \text{Fix}(S_j), \forall j = 1, 2, \dots, M. \quad (3.23)$$

Ký hiệu  $\Omega^{\text{CFPP}} := \bigcap_{j=1}^M \text{Fix}(S_j)$  là tập nghiệm của Bài toán (3.23) và ta giả thiết rằng  $\Omega^{\text{CFPP}} \neq \emptyset$ .

Áp dụng Hệ quả 3.2.3, chúng ta thu được thuật toán tự thích nghi để giải Bài toán (3.23). Thuật toán được trình bày trong hệ quả sau.

**Hệ quả 3.2.5.** *Với mỗi  $x_0 \in H$ , cho dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi*

$$y_{j,n} = S_j x_n, \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

$$\text{chọn } j_n \text{ sao cho } \|y_{j_n,n} - x_n\| = \max_{j=1,2,\dots,M} \|y_{j,n} - x_n\| \text{ và đặt } t_n = y_{j_n,n},$$

$$u_n = x_n - \delta_n(x_n - t_n),$$

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)u_n,$$

trong đó  $\delta_n = \rho_n \frac{\|x_n - t_n\|^2}{\|x_n - t_n\|^2 + a_n}$ , dãy  $\{\rho_n\} \subset [a, b] \subset (0, 1)$  và  $\{a_n\}$  và  $\{\alpha_n\}$  là các dãy số thực dương tùy ý. Nếu dãy  $\{a_n\}$  bị chặn và dãy  $\{\alpha_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $(\alpha)$  thì dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi Thuật toán 3.2.1 hội tụ mạnh tới một phần tử  $x^\dagger \in \Omega^{\text{CFPP}}$  là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân  $\text{VIP}(I - f, \Omega^{\text{SFPMOS}})$  trong đó thay tập  $\Omega^{\text{SFPMOS}}$  bởi tập  $\Omega^{\text{CFPP}}$ .

Áp dụng Thuật toán 3.1.2 và Định lý 3.1.7, ta có hệ quả sau đây để giải Bài toán (3.23).

**Hệ quả 3.2.6.** Với mỗi  $x_0 \in H$ , dãy  $\{x_n\}$  xác định như sau.

$$y_{j,n} = S_j x_n, \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

chọn  $j_n$  sao cho  $\|y_{j_n,n} - x_n\| = \max_{j=1,2,\dots,M} \{\|y_{j,n} - x_n\|\}$  và đặt  $y_n = y_{j_n,n}$ ,

$$C_n = \{z \in H \mid \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\},$$

$$Q_n = \{z \in H \mid \langle x_0 - x_n, z - x_n \rangle \leq 0\},$$

$$x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0, \quad n \geq 0.$$

Khi đó dãy  $\{x_n\}$  hội tụ mạnh tới  $P_{\Omega_{\text{CFPP}}} x_0$  khi  $n \rightarrow \infty$ .

Áp dụng Thuật toán 3.1.3 và Định lý 3.1.12, ta có hệ quả sau đây để giải Bài toán (3.23).

**Hệ quả 3.2.7.** Với mỗi  $x_0 \in H$ , đặt  $C_0 = H$  và xác định dãy  $\{x_n\}$  như sau:

$$y_{j,n} = S_j x_n, \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

chọn  $j_n$  sao cho  $\|y_{j_n,n} - x_n\| = \max_{j=1,2,\dots,M} \{\|y_{j,n} - x_n\|\}$  và đặt  $y_n = y_{j_n,n}$ ,

$$C_{n+1} = \{z \in C_n \mid \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\},$$

$$x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0, \quad n \geq 0.$$

Khi đó dãy  $\{x_n\}$  hội tụ mạnh tới  $P_{\Omega_{\text{CFPP}}} x_0$  khi  $n \rightarrow \infty$ .

### 3.3 Ví dụ số minh họa

**Ví dụ 3.3.1.** Cho các tập con lồi, đóng và khác rỗng

$$C_j = \{x \in \mathbb{R}^{16} \mid \langle a_j, x \rangle \leq b_j\}, \quad Q_k^i = \{x \in \mathbb{R}^{16 \times (i+1)} \mid \langle a_k^i, x \rangle \leq b_k^i\},$$

với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $k = 1, 2, \dots, M_i$  và các tọa độ của  $a_j, a_k^i$  được lấy ngẫu nhiên trong khoảng đóng  $[-1, 1]$ ,  $b_j, b_k^i$  được lấy ngẫu nhiên trong khoảng đóng  $[0, 1]$  với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $k = 1, 2, \dots, M_i$ .

Cho các ánh xạ tuyến tính bị chặn  $T_1 : \mathbb{R}^{16} \rightarrow \mathbb{R}^{32}$ ,  $T_2 : \mathbb{R}^{16} \rightarrow \mathbb{R}^{64}$ ,  $T_3 : \mathbb{R}^{16} \rightarrow \mathbb{R}^{128}$  có các phần tử của ma trận biểu diễn được lấy ngẫu nhiên trên đoạn  $[-5, 5]$ .

Ta xét bài toán: Tìm một phần tử  $x^* \in \mathbb{R}^{16}$  sao cho

$$x^* \in \Omega^{\text{SFPMOS}} := \left( \bigcap_{j=1}^M C_j \right) \cap \left( \bigcap_{i=1}^N T_i^{-1} \left( \bigcap_{k=1}^{M_i} Q_k^i \right) \right).$$



Dễ thấy  $\Omega^{\text{SFPMOS}} \neq \emptyset$  vì  $0 \in \Omega^{\text{SFPMOS}}$ .

Trước hết, ta minh họa sự hội tụ của dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi Thuật toán 3.1.1 trong đó  $S_j = P_{C_j}$  với mọi  $j = 1, 2, \dots, M$ ,  $\Xi_k^i = P_{Q_k^i}$  với mọi  $i = 1, 2, 3$ ,  $k = 1, 2, \dots, M_i$ . Các tham số  $\rho_n = 0.3$ ,  $a_n = 0.1$  và  $\alpha_n = n^{-0.5}$ ,  $\alpha_n = n^{-0.75}$  hoặc  $\alpha_n = n^{-1}$  với mọi  $n \geq 1$ , ánh xạ co  $f : \mathbb{R}^{16} \rightarrow \mathbb{R}^{16}$  xác định bởi  $f(x) = \frac{x}{5}$ . Theo Định lý 3.1.3, dãy  $\{x_n\}$  sẽ hội tụ đến nghiệm của bài toán đang xét và là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân VIP( $I - f, \Omega^{\text{SFPMOS}}$ ). Trong ví dụ này, ta sử dụng điều kiện dừng là  $\text{TOL}_n < \varepsilon$ , trong đó  $\varepsilon$  là một ngưỡng sai số cho trước và  $\text{TOL}_n$  được xác định bởi

$$\begin{aligned} \text{TOL}_n := & \frac{1}{4} \left( \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \|x_n - P_{C_j}(x_n)\|^2 + \frac{1}{M_1} \sum_{k=1}^{M_1} \|T_1 x_n - P_{Q_k^1}(T_1 x_n)\|^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{M_2} \sum_{k=1}^{M_2} \|T_2 x_n - P_{Q_k^2}(T_2 x_n)\|^2 + \frac{1}{M_3} \sum_{k=1}^{M_3} \|T_3 x_n - P_{Q_k^3}(T_3 x_n)\|^2 \right) \end{aligned}$$

với mọi  $n \geq 1$ . Chú ý rằng ở bước lặp thứ  $n$ , nếu  $\text{TOL}_n = 0$ , thì  $x_n \in \Omega^{\text{SFPMOS}}$ , tức là  $x_n$  là một nghiệm của bài toán đang xét.

Chọn  $M = 200$ ,  $M_1 = 300$ ,  $M_2 = 400$  và  $M_3 = 500$  và tọa độ của điểm ban đầu  $x_0$  được lấy ngẫu nhiên trong khoảng đóng  $[5, 10]$ . Khi đó ta thu được kết quả số của Thuật toán 3.1.1 được trình bày trong Bảng 3.1 sau.

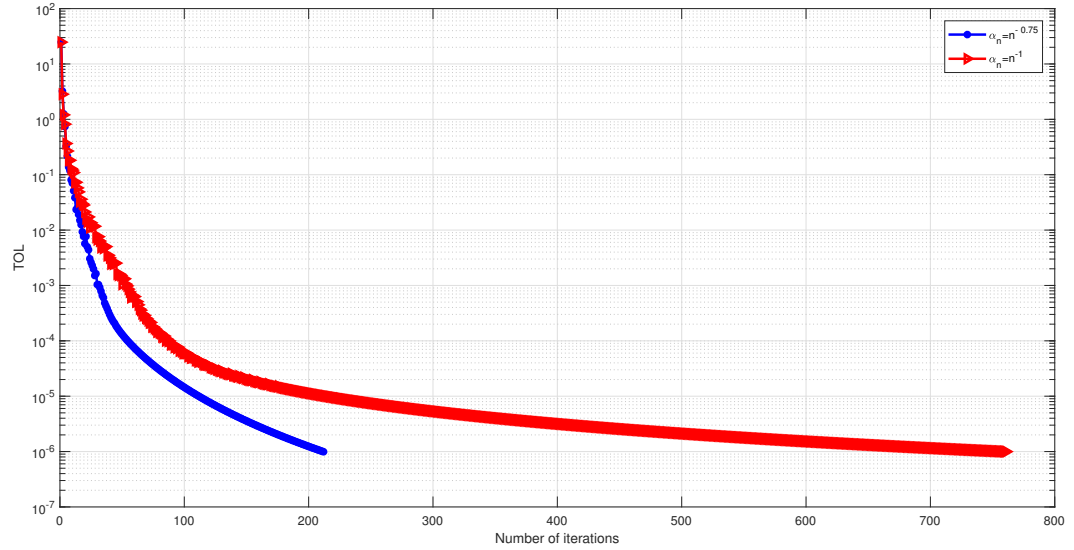
<b>Thuật toán 3.1.1</b>						
	$\alpha_n = n^{-0.75}$			$\alpha_n = n^{-1.0}$		
$\varepsilon$	$\text{TOL}_n$	$n$	TG (giây)	$\text{TOL}_n$	$n$	TG (giây)
$10^{-4}$	$9.6777 \times 10^{-5}$	55	0.2328	$9.8346 \times 10^{-5}$	87	0.3412
$10^{-5}$	$9.8911 \times 10^{-6}$	112	0.4274	$9.9780 \times 10^{-6}$	215	0.8001
$10^{-6}$	$9.9122 \times 10^{-7}$	212	0.7568	$9.9852 \times 10^{-7}$	761	2.4898

Bảng 3.1: Kết quả tính toán số của Thuật toán 3.1.1

Từ kết quả số trong Bảng 3.1 của bài toán đang xét, ta thấy nếu tham số  $\alpha_n$  nhận giá trị lớn hơn thì để đạt được cùng một ngưỡng sai số cần nhiều thời gian hơn và số vòng lặp cũng nhiều hơn.

Dáng điệu của hàm  $\text{TOL}_n$  trong Bảng 3.1 được mô tả trong Hình 3.1.

Tiếp theo, ta minh họa sự hội tụ của Thuật toán 3.1.2 và Thuật toán 3.1.3 với  $T_j = P_{C_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ ,  $\Xi_k^i = P_{Q_k^i}$  với mọi  $i = 1, 2, 3$ ,  $k = 1, 2, \dots, M_i$ .



Hình 3.1: Dạng điệu của hàm  $TOL_n$  với điều kiện dừng  $TOL_n < 10^{-6}$

Chọn  $M = 200$ ,  $M_1 = 300$ ,  $M_2 = 400$  và  $M_3 = 500$  và tọa độ của điểm ban đầu  $x_0$  được lấy ngẫu nhiên trong khoảng đóng  $[5, 10]$ . Khi đó ta thu được kết quả số của hai thuật toán chiếu được trình bày trong Bảng 3.2.

$\varepsilon$	Thuật toán 3.1.2			Thuật toán 3.1.3		
	$TOL_n$	$n$	TG (giây)	$TOL_n$	$n$	TG (giây)
$10^{-3}$	$9.7792 \times 10^{-4}$	14617	154.9003	$9.7596 \times 10^{-4}$	251	7.6294
$10^{-4}$	$9.8184 \times 10^{-5}$	42036	429.0298	$7.9713 \times 10^{-5}$	294	10.9836
$10^{-5}$	$9.9636 \times 10^{-6}$	123967	$1.2399 \times 10^3$	$9.0468 \times 10^{-6}$	334	14.8264

Bảng 3.2: Kết quả tính toán số của Thuật toán 3.1.2 và 3.1.3

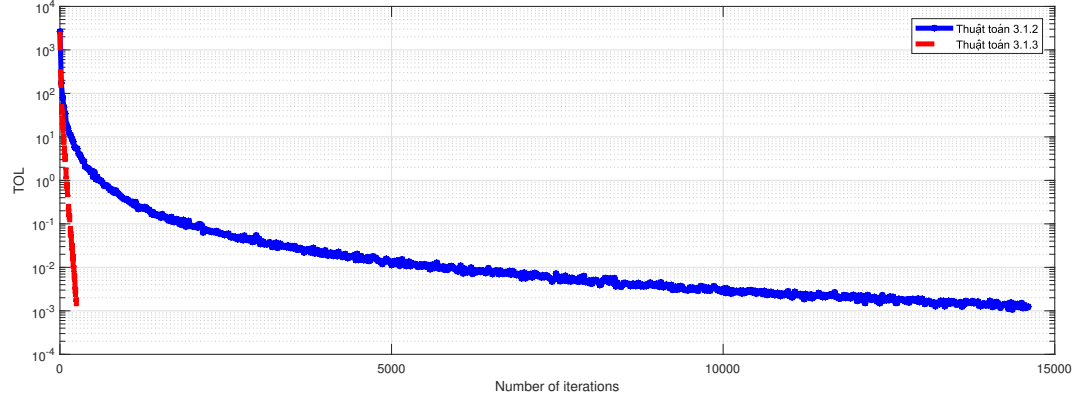
Bảng 3.2 cho thấy Thuật toán 3.1.3 hội tụ với tốc độ nhanh hơn rất nhiều so với Thuật toán 3.1.2.

Dạng điệu của hàm  $TOL_n$  trong Bảng 3.2 được biểu diễn trong Hình 3.2.

**Ví dụ 3.3.2.** Cho các hàm lồi  $g$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  và  $g_4$  xác định trên  $\mathbb{R}^5$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^4$ ,  $\mathbb{R}^6$  tương ứng và được xác định bởi:

$$g(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 - 1)^2 \text{ với mọi } x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5;$$

$$g_1(y) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - 5)^2 \text{ với mọi } y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2;$$



Hình 3.2: Dáng điệu của hàm  $TOL_n$  với điều kiện dừng  $TOL_n < 10^{-3}$

$$g_2(z) = \frac{1}{2}(2z_1 + z_2 - z_3 - 4)^2 \text{ với mọi } z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$g_3(u) = \frac{1}{2}(u_1 - u_2 - u_3 + u_4 - 1)^2 \text{ với mọi } u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4;$$

$$g_4(v) = \frac{1}{2}(v_1 + 2v_2 - v_3 + v_4 + v_5 + v_6)^2 \text{ với mọi } v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) \in \mathbb{R}^6.$$

Cho các ánh xạ tuyến tính bị chặn

$$T_1 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ xác định bởi } T_1 y = [y_1, y_2]^\top.$$

$$T_2 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ xác định bởi } T_2 z = [z_1, z_2, z_3]^\top.$$

$$T_3 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ xác định bởi } T_3 u = [u_1, u_2, u_3, u_4]^\top.$$

$$T_4 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^6 \text{ xác định bởi } T_4 v = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6]^\top.$$

Ma trận của các ánh xạ chuyển  $T_1, T_2, T_3, T_4$  tương ứng như sau.

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Xét bài toán: Tìm phần tử  $x^* \in \mathbb{R}^5$  sao cho

$$\begin{aligned} x^* &\in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^5} g(x); \quad T_1 x^* \in \arg \min_{y \in \mathbb{R}^2} g_1(y); \quad T_2 x^* \in \arg \min_{z \in \mathbb{R}^3} g_2(z); \\ T_3 x^* &\in \arg \min_{u \in \mathbb{R}^4} g_3(u); \quad T_4 x^* \in \arg \min_{v \in \mathbb{R}^6} g_4(v). \end{aligned}$$

Đặt  $\Omega$  là tập nghiệm của bài toán đang xét. Không khó để kiểm tra được  $g$  và  $g_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  là các hàm lồi và  $\Omega = \{(a - b + c + 3, a, b, c, 1) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ .

Dễ thấy, bài toán trên tương đương với bài toán: Tìm phần tử  $x^* \in \mathbb{R}^5$  sao cho:

$$\begin{aligned} x^* &\in \nabla g^{-1}(0); \quad T_1 x^* \in \nabla g_1^{-1}(0); \quad T_2 x^* \in \nabla g_2^{-1}(0); \\ T_3 x^* &\in \nabla g_3^{-1}(0); \quad T_4 x^* \in \nabla g_4^{-1}(0). \end{aligned}$$

Ta biết rằng nếu  $F$  là một toán tử đơn điệu cực đại thì  $p \in F^{-1}(0)$  tương đương với  $p = (I + F)^{-1}(p)$  và  $(I + F)^{-1}$  là ánh xạ không giãn. Trong ví dụ này,  $\nabla g$  và  $\nabla g_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  là các toán tử đơn điệu cực đại do đó  $(I + \nabla g)^{-1}$  và  $(I + \nabla g_i)^{-1}$  với mọi  $i = 1, 2, 3, 4$  là các ánh xạ không giãn. Vì vậy bài toán trên tương đương với bài toán tìm điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra: Tìm phần tử  $x^* \in \mathbb{R}^5$  sao cho

$$\begin{aligned} x^* &\in \text{Fix} \left( (I + \nabla g)^{-1} \right); \quad T_1 x^* \in \text{Fix} \left( (I + \nabla g_1)^{-1} \right); \quad T_2 x^* \in \text{Fix} \left( (I + \nabla g_2)^{-1} \right); \\ T_3 x^* &\in \text{Fix} \left( (I + \nabla g_3)^{-1} \right); \quad T_4 x^* \in \text{Fix} \left( (I + \nabla g_4)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Ký hiệu  $\Omega^{\text{SCFPPMOS}}$  là tập nghiệm của bài toán tìm điểm bất động chung tách với nhiều tập đầu ra này. Khi đó

$$\Omega^{\text{SCFPPMOS}} \equiv \Omega = \{(a - b + c + 3, a, b, c, 1) : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Chúng tôi minh họa sự hội tụ của Thuật toán 3.1.1 trong đó các ánh xạ không giãn  $S = (I + \nabla g)^{-1}$ ;  $\Xi_i = (I + \nabla g_i)^{-1}$  với mọi  $i = 1, 2, 3, 4$ , các tham số  $\alpha_n = n^{-1}$ ,  $a_n = 0.00001$ ,  $\rho_n = 0.95$ , ánh xạ co  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  là hàm hằng xác định bởi  $f(x_n) = x_0$ , với mọi  $n \geq 1$  và xấp xỉ ban đầu  $x_0 = (1, -1, 1, -1, 1)$ . Theo Định lý 3.1.3, dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi thuật toán tự thích nghi sẽ hội tụ mạnh tới  $x^* \in \Omega^{\text{SCFPPMOS}}$ . Trong trường hợp này, ta dễ nhận thấy  $x^* = (0.75, -0.75, 0.75, -0.75, 1)$  là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân

VIP( $I - f, \Omega^{\text{SFPMMOS}}$ ) trong đó thay tập  $\Omega^{\text{SFPMMOS}}$  bởi tập  $\Omega^{\text{SCFPMMOS}}$ . Ta sử dụng điều kiện

$$\text{TOL}_n := \|x_n - x^*\| < \varepsilon,$$

với  $\varepsilon$  là một ngưỡng sai số cho trước để dừng quá trình lặp.

Tiếp theo, chúng tôi minh họa sự hội tụ của Thuật toán 3.1.2 và 3.1.3 trong đó các ánh xạ không giãn  $S$  và  $\Xi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , được xác định như trên. Theo Định lý 3.1.7 và 3.1.12, dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi hai thuật toán 3.1.2 và 3.1.3 hội tụ mạnh về phần tử  $x^* = P_{\Omega^{\text{SCFPMMOS}}} x_0$ . Thật dễ dàng để tính được  $x^* = P_{\Omega^{\text{SCFPMMOS}}} x_0 = (0.75, -0.75, 0.75, -0.75, 1)$ . Ta cũng sử dụng điều kiện  $\text{TOL}_n := \|x_n - x^*\| < \varepsilon$ , với  $\varepsilon$  là một ngưỡng sai số cho trước để dừng quá trình lặp.

Kết quả số trong Bảng 3.3 minh họa cho sự hội tụ của thuật toán tự thích nghi, thuật toán chiếu lai ghép, thuật toán chiếu thu hẹp với phần tử ban đầu  $x_0 = (1, -1, 1, -1, 1)$ .

$\varepsilon$		Thuật toán 3.1.1	Thuật toán 3.1.2	Thuật toán 3.1.3
$10^{-4}$	$\text{TOL}_n$	$9.9881 \times 10^{-5}$	$9.9141 \times 10^{-5}$	$5.2862 \times 10^{-5}$
	$n$	621	175	14
	TG (giây)	0.0400	1.3368	0.0820
$10^{-5}$	$\text{TOL}_n$	$9.9965 \times 10^{-6}$	$9.9752 \times 10^{-6}$	$4.6409 \times 10^{-6}$
	$n$	2526	979	19
	TG (giây)	0.1313	5.9919	0.1082
$10^{-6}$	$\text{TOL}_n$	$9.9998 \times 10^{-7}$	$9.9967 \times 10^{-7}$	$9.1672 \times 10^{-7}$
	$n$	23854	3899	23
	TG (giây)	1.1318	26.6064	0.1204

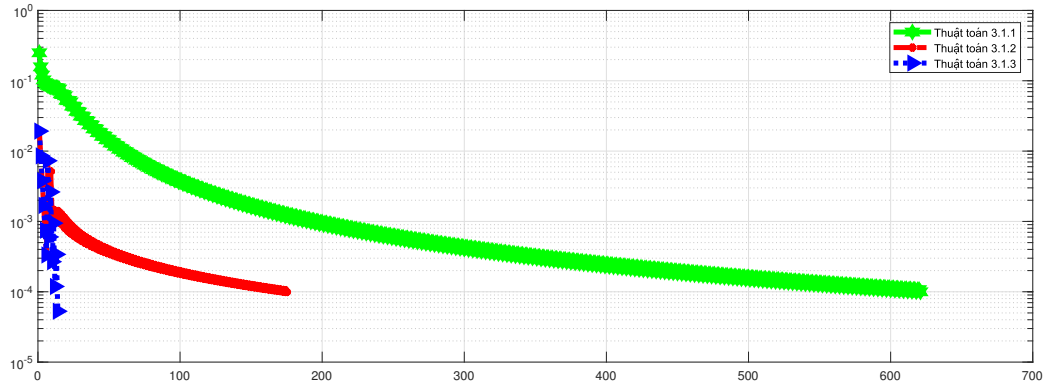
Bảng 3.3: Kết quả tính toán số của Thuật toán 3.1.1; 3.1.2 và 3.1.3

Kết quả số ở Bảng 3.3 cho thấy với cùng một ngưỡng sai số, Thuật toán 3.1.3 cần thời gian và số bước lặp ít nhất, trong khi đó Thuật toán 3.1.2 cần số bước lặp ít hơn Thuật toán 3.1.1 nhưng cần nhiều thời gian hơn.

Dáng điệu của hàm  $\text{TOL}_n$  trong Bảng 3.3 được biểu diễn trong Hình 3.3.

**Ví dụ 3.3.3.** Quay trở lại Ví dụ 2.2.7, ta tìm nghiệm của Bài toán (2.44) bằng phương pháp chiếu lai ghép và phương pháp chiếu thu hẹp.

Ta minh họa sự hội tụ của dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi Thuật toán 3.1.2 và Thuật toán 3.1.3 với các ánh xạ không giãn  $S = P_C$  và  $\Xi_i = P_{Q_i}$  với mọi



Hình 3.3: Dáng điệu của hàm  $TOL_n$  với điều kiện dừng  $TOL_n < 10^{-4}$

$i = 1, 2, 3$ , tương ứng. Ta sử dụng điều kiện dừng  $TOL_n := \|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon$ , với  $\varepsilon$  là một số thực dương nhỏ tùy ý. Nhưng với điều kiện dừng này, chúng ta cũng không khẳng định được dãy  $\{x_n\}$  hội tụ về một phần tử thuộc tập nghiệm của bài toán đang xét. Do vậy, để kiểm tra xem dãy  $\{x_n\}$  có hội tụ về nghiệm của Bài toán (2.44), ta sử dụng tham số

$$m := \max\{\langle a_0, x_n \rangle - 1, \max_{i=1,100} \langle a_i, T_i x_n \rangle\}.$$

Khi đó, nếu  $m \leq 0$  thì  $x_n$  là một nghiệm của bài toán đang xét.

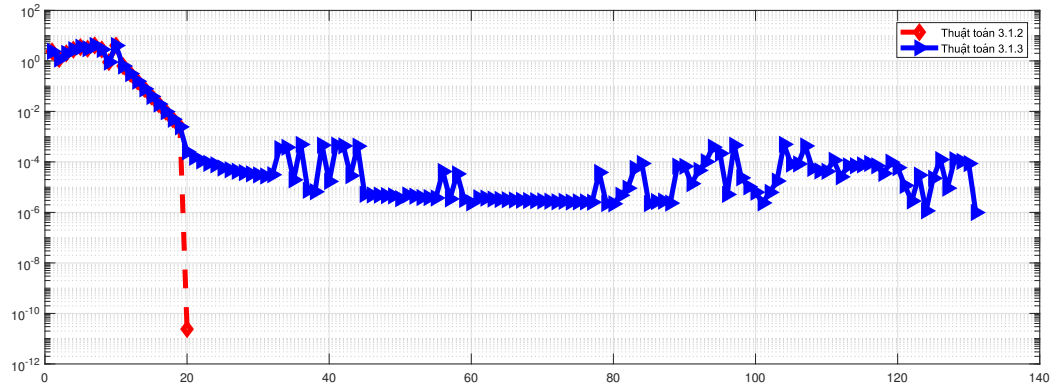
Với phần tử ban đầu  $x_0(t) = e^t$ , kết quả số của Thuật toán 3.1.2 và Thuật toán 3.1.3 được trình bày trong Bảng 3.4.

Trong ví dụ này, Thuật toán 3.1.2 hội tụ với tốc độ nhanh hơn so với Thuật toán 3.1.3.

Dáng điệu của hàm  $TOL_n$  trong Bảng 3.4 được mô tả trong Hình 3.4.

$\varepsilon$		Thuật toán 3.1.2	Thuật toán 3.1.3
$10^{-4}$	TOL <sub>n</sub>	$2.3950 \times 10^{-11}$	$8.7460 \times 10^{-5}$
	$n$	20	23
	$m$	$1.4 \times 10^{-4}$	$1.0605 \times 10^{-4}$
	TG (giây)	0.1702	0.2304
$10^{-5}$	TOL <sub>n</sub>	$2.3950 \times 10^{-11}$	$7.5226 \times 10^{-6}$
	$n$	20	37
	$m$	$1.4 \times 10^{-4}$	$5.2 \times 10^{-5}$
	TG (giây)	0.1623	0.4274
$10^{-6}$	TOL <sub>n</sub>	$2.3950 \times 10^{-11}$	$9.8884 \times 10^{-7}$
	$n$	20	131
	$m$	$1.4 \times 10^{-4}$	$3.4659 \times 10^{-5}$
	TG (giây)	0.3849	4.6206

Bảng 3.4: Kết quả tính toán số của Thuật toán 3.1.2 và Thuật toán 3.1.3

Hình 3.4: Dạng điệu của hàm TOL<sub>n</sub> với điều kiện dừng TOL<sub>n</sub> < 10<sup>-6</sup>

### KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Sử dụng phương pháp CQ, phương pháp chiếu lai ghép và phương pháp chiếu thu hẹp, trong chương này, chúng tôi đề xuất ba thuật toán giải Bài toán 3.1 trong các không gian Hilbert thực. Các thuật toán này có ưu điểm chung là vòng lặp đơn giản và cỡ bước lặp được thiết kế tự thích nghi. Kết quả cụ thể như sau:

- (a) Xây dựng thuật toán kiểu CQ (Thuật toán 3.1.1) giải Bài toán (3.1). Với các điều kiện phù hợp, chúng tôi chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp về nghiệm của bài toán thông qua Định lý 3.1.7.

- (b) Xây dựng thuật toán chiếu lai ghép (Thuật toán 3.1.2) giải Bài toán 3.1 và chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp thông qua các Định lý 3.1.3.
- (c) Xây dựng thuật toán chiếu thu hẹp (Thuật toán 3.1.3) giải Bài toán 3.1 và chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp thông qua các Định lý 3.1.12.
- (c) Áp dụng các Thuật toán 3.1.1 và 3.1.2 cho bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra; Thuật toán 3.1.1, 3.1.2 và 3.1.3 cho bài toán điểm bất động chung tách của ánh xạ không giãn và bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn.
- (d) Lấy các ví dụ số minh họa cho các thuật toán mà chúng tôi đề xuất cùng việc áp dụng giải bài toán tối ưu không ràng buộc. Các kết quả được ghi nhận trong các Bảng 3.1–3.4 và các Hình 3.1–3.4.



# Kết luận

Luận án tập trung nghiên cứu đề xuất các thuật toán giải Bài toán (SFPMOS) ra và Bài toán (SCFPPMOS). Các thuật toán được nghiên cứu dựa trên phương pháp CQ, phương pháp lặp Halpern, phương pháp xấp xỉ mềm và phương pháp chiếu.

## 1. Những kết quả chính đã đạt được trong luận án

- Chúng tôi đề xuất được 5 thuật toán giải Bài toán (SFPMOS) (Thuật toán 2.1.1–2.1.5), đề xuất và chứng minh các định lý hội tụ yếu và hội tụ mạnh của các thuật toán này. Các thuật toán này được chúng tôi phát triển từ thuật toán CQ của Byrne cho bài toán chấp nhận tách trong không gian hữu hạn chiều dựa trên cách tiếp cận tối ưu. Ưu điểm của các Thuật toán 2.1.1–2.1.3 là sự đơn giản trong tính toán tại mỗi bước lặp. Ưu điểm của các Thuật toán 2.1.4 và 2.1.5, ngoài sự đơn giản trong tính toán tại mỗi bước lặp, là cỡ bước không phụ thuộc vào thông tin về chuẩn của các toán tử chuyển. Kết quả này được thể hiện trong công trình (CT1) và (CT2).
- Đề xuất được 3 thuật toán xấp xỉ nghiệm của Bài toán (SCFPPMOS) (Thuật toán 3.1.1–3.1.3) và chứng minh các định lý về sự hội tụ của các thuật toán đó. Bằng việc sử dụng phương pháp CQ, kỹ thuật chiếu lai ghép và kỹ thuật chiếu thu hẹp kết hợp với phương pháp xấp xỉ mềm, chúng tôi thiết kế các thuật toán với cỡ bước tự thích nghi. Kết quả này được thể hiện trong công trình (CT3) và (CT4).
- Các thuật toán này được áp dụng cho bài toán chấp nhận tách tổng quát, bài toán chấp nhận tách với nhiều tập đầu ra, bài toán điểm bất động chung tách với ánh xạ không giãn hay bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn. Các kết quả thử nghiệm số trong không gian Hilbert thực hữu hạn chiều và vô hạn chiều cho thấy hiệu quả của các phương pháp đề xuất.

## 2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Sau đây là các hướng mà chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu sau khi hoàn thành luận án.

- Nghiên cứu về bài toán chấp nhận tách cùng với các bài toán liên quan trong không gian Banach.
- Nghiên cứu Bài toán (SFP MOS) khi ít nhất một tập ràng buộc không lồi hoặc ít nhất một ánh xạ chuyển không là ánh xạ tuyến tính.
- Nghiên cứu tính ổn định của các thuật toán khi các dữ liệu đầu vào có nhiễu.
- Nghiên cứu đánh giá tốc độ hội tụ của các thuật toán.

## Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án

- (CT1) Reich S., Tuyen T.M., Ha M.T.N. (2020), “The split feasibility problem with multiple output sets in Hilbert spaces”, *Optim. Lett.*, **14**, pp. 2335–2353 (SCIE-Q2).
- (CT2) Reich S., Tuyen T.M., Ha M.T.N. (2021), “An optimization approach to solving the split feasibility problem in Hilbert spaces”, *J. Global Optim.*, **70**, pp. 837–852 (SCIE-Q1).
- (CT3) Kim J.K., Tuyen T.M., Ha M.T.N. (2021), “Two projection methods for solving the split common fixed point problem with multiple output sets in Hilbert spaces”, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **42**(8), pp. 973–988 (SCIE-Q2).
- (CT4) Reich S., Tuyen T.M., Thuy N.T.T., Ha M.T.N. (2022), “A new self-adaptive algorithm for solving the split common fixed point problem with multiple output sets in Hilbert spaces”, *Numer. Algorithms*, **89**, pp. 1031–1047 (SCIE-Q1).

## Tài liệu tham khảo

- [1] Agarwal R.P., O'Regan D., Sahu D.R. (2009), *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*, Springer, New York.
- [2] Alofi A.S., Alsulami M., Takahashi W. (2016), “Strongly convergent iterative method for the split common null point problem in Banach spaces”, *J. Nonlinear Convex Anal.*, **2**, pp. 311–324.
- [3] Anh T.V, Muu L.D. (2015), “A projection-fixed point method for a class of bilevel variational inequalities with split fixed point constraints”, *Optimization*, **65**(6), pp. 1229–1243.
- [4] Bauschke H.H., Combettes P.L., Kruk S.G. (2006), “Extrapolation algorithm for affine-convex feasibility problems”, *Numer. Algorithms*, **41**(3), pp. 239–274.
- [5] Bauschke H.H., Combettes P.L. (2017), *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer, New York.
- [6] Buong N. (2017), “Iterative algorithms for the multiple-sets split feasibility problem in Hilbert spaces”, *Numer. Algorithms*, **76**(3), pp. 783–798.
- [7] Byrne C. (2001), "Bregman–Legendre multidistance projection algorithms for convex feasibility and optimization", *Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and their Applications* ed D Butnairu, Y Censor and S Reich (Amsterdam: Elsevier), pp. 87–100.
- [8] Byrne C. (2002), “Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility problem”, *Inverse Problems*, **18**(2), pp. 441–453.
- [9] Byrne C. (2004), “A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction”, *Inverse Problems*, **18**, pp. 103–120.

- [10] Byrne C., Censor Y., Gibali A., Reich S. (2012), “The split common null point problem”, *J. Nonlinear Convex Anal.*, **13**, pp. 759–775.
- [11] Censor Y., Elfving T. (1994), “A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space”, *Numer. Algorithms*, **8**, pp. 221–239.
- [12] Censor Y., Elfving T., Kopf N., Bortfeld T. (2005), “The multiple-sets split feasibility problem and its application”, *Inverse Problems*, **21**, pp. 2071–2084.
- [13] Censor Y., Bortfeld T., Martin B., Trofimov A. (2006), “A unified approach for inversion problems in intensity-modulated radiation therapy”, *Phys. Med. Biol.*, **51**, pp. 2353–2365.
- [14] Censor Y., Motova A., Segal A. (2007), “Perturbed projections and sub-gradient projections for the multiple-sets split feasibility problem”, *Math. Anal. Appl.*, **327**, pp. 1244–1256.
- [15] Chen Y., Guo Y., Yu Y., Chen R. (2012), “Self-adaptive and relaxed self-adaptive projection methods for solving the multiple-set split feasibility problem”, *Abstr. Appl. Anal.*, **2012**, pp. 1–11.
- [16] Cuong T.L., Anh T.V., Van T.H.M. (2022), “A self-adaptive step size algorithm for solving variational inequalities with the split feasibility problem with multiple output sets constraints”, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **43**(9), pp. 1009–1026.
- [17] Dadashi V. (2017), “Shrinking projection algorithms for the split common null point problem”, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **99**(2), pp. 299–306.
- [18] Dang Y., Gao Y. (2012), “An extrapolated iterative algorithm for multiple-set split feasibility problem”, *Abstr. Appl. Anal.*, **2012**, pp. 1–12.
- [19] Gibali A., Mai D.T., Vinh N.T. (2019), “A new relaxed CQ algorithm for solving split feasibility problems in Hilbert spaces and its applications”, *J. Ind. Manag. Optim.*, **15**(2), pp. 963–984.

- [20] Goebel K., Kirk W.A. (1990), *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge University Press.
- [21] Halpern B. (1967), “Fixed points of nonexpanding maps”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**, pp. 591–597.
- [22] He S., Zhao Z. (2013), “Strong convergence of a relaxed CQ algorithm for the split feasibility problem” *J. Inequal. Appl.*, **2013**(1), 197 (11 pages).
- [23] He S., Zhao Z., Luo B. (2015), “A relaxed self-adaptive CQ algorithm for the multiple-sets split feasibility problem”, *Optimization*, **64**(9), pp. 1907–1918.
- [24] Jailoka P., Suantai S. (2017), “Split common fixed point and null point problems for demicontractive operators in Hilbert spaces”, *Optim. Methods Softw.*, **34**(2) pp. 1–16.
- [25] López G., Martín-Márquez V., Wang F., Xu H-K. (2012), “Solving the split feasibility problem without prior knowledge of matrix norms”, *Inverse Problems*, **28**(8), 085004.
- [26] Maingé P.E. (2008), “Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization”, *Set-Valued Anal.*, **16**, pp. 899–912.
- [27] Mann W. (1953), “Mean value methods in iteration”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4**, pp. 506–510.
- [28] Moudafi A. (2000), “Viscosity approximation methods for fixed-points problems”, *J. Math. Ana. Appl.*, **241**, pp. 46–55.
- [29] Moudafi A. (2010), “The split common fixed point problem for demicontractive mappings”, *Inverse Problems*, **26**, 055007.
- [30] Peypouquet. J (2015), *Convex Optimization in Normed Spaces, Theory, Methods and Examples*, (Springer Briefs in Optimization), Springer, Cham.
- [31] Reich S., Tuyen T.M. (2019), “Iterative methods for solving the generalized split common null point problem in Hilbert spaces”, *Optimization*, **69**, pp. 1013–1038.

- [32] Reich S., Tuyen T. M. (2021), “Two new self-adaptive algorithms for solving the split common null point problem with multiple output sets in Hilbert spaces”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **23**(2), 19 pages.
- [33] Rockafellar R.T. (1970), “On the maximal monotonicity of subdifferential mappings”, *Pacific J. Math.*, **33**(1), pp. 209–216 .
- [34] Saejung S., Yotkaew P. (2012), “Approximation of zeros of inverse strongly monotone operators in Banach spaces”, *Nonlinear Anal.*, **75**, pp. 742–750.
- [35] Schopfer F., Schuster T., Louis A.K. (2008), “An iterative regularization method for the solution of the split feasibility problem in Banach spaces”, *Inverse Problems*, **24**, 055008.
- [36] Shehu Y. (2016), “Strong convergence theorem for multiple sets split feasibility problem in Banach spaces”. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **37**(8), pp. 1021–1036.
- [37] Shehu Y., Cholanjiak P. (2016), “Another look at the split common fixed point problem for demicontractive operators”, *RACSAM*, **110**(1), pp. 201–218.
- [38] Shehu Y., Iyiola O.S., Enyi C.D. (2016), “An iterative algorithm for solving split feasibility problems and fixed point problems in Banach spaces”, *Numer. Algorithms*, **72**, pp. 835–864.
- [39] Shehu Y., Agbebaku D.F. (2017), “On split inclusion problem and fixed point problem for multi-valued mappings”, *Comp. Appl. Math.*, **37**(2), pp. 1807–1824.
- [40] Takahashi W., Kubota R.Y. (2008), “Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, **341**, pp. 276–286.
- [41] Takahashi S., Takahashi W., Toyoda M. (2010), “Strong convergence theorems for maximal monotone operators with nonlinear mappings in Hilbert spaces”, *J. Optim. Theory Appl.*, **147**, pp. 27–41.

- [42] Takahashi W. (2014), “The split feasibility problem in Banach spaces”, *J. Nonlinear Convex Anal.*, **15**, pp. 1349–1355.
- [43] Takahashi W. (2015), “The split feasibility problem and the shrinking projection method in Banach spaces”, *J. Nonlinear Convex Anal.*, **16**, pp. 1449–1459.
- [44] Takahashi W. (2015), “The split common null point problem in Banach spaces”, *Arch. Math.*, **104**, pp. 357–365.
- [45] Takahashi S., Takahashi W. (2016), “The split common null point problem and the shrinking projection method in Banach spaces”, *Optimization*, **65**, pp. 281–287.
- [46] Tang Y.C., Peng J.G., Liu L.W. (2012), “A cyclic algorithm for the split common fixed point problem of demicontractive mappings in Hilbert spaces”, *Math. Model. Anal.*, **17**, pp. 457–466.
- [47] Tang Y., Zhu Ch., Yu H. (2015), “Iterative for solving the multiple-sets split feasibility problem with splitting self-adaptive step size”, *J. Fixed Point Theory Appl.* **2015**(1), 15 pages.
- [48] Thong D.V. (2017), “Viscosity approximation methods for solving fixed-point problems and split common fixed-point problems”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **19**(2), pp. 1481–1499.
- [49] Thong D.V., Hieu D.V. (2017), “An inertial method for solving split common fixed point problems”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **19**(4), pp. 3029–3051.
- [50] Thuy N.T.T., Tung T.T. (2023), “A self adaptive inertial algorithm for solving variational inequalities over the solution set of the split variational inequality problem”, *Optim Lett.*, doi.org/10.1007/s11590-023-02080-y.
- [51] Thuy N.T.T., Tung T.T. (2024), “Two relaxed CQ methods for the split feasibility problem with multiple output sets”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, pp. 47–68.



- [52] Tuyen T.M., Ha N.S., Thuy N.T.T. (2019), “A shrinking projection method for solving the split common null point problem in Banach spaces”, *Numer. Algorithms*, **81**, pp. 813–832.
- [53] Uzor V., Alakoya T., Mewomo O.T. (2023), “On split monotone variational inclusion problem with multiple output sets with fixed point constraints”, *Comput Methods Appl. Math.*, **23**(3), pp. 729–749.
- [54] Wang F. (2014), “A new algorithm for solving the multiple-sets split feasibility problem in Banach spaces”, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **35**, pp. 99–110.
- [55] Wang F. (2017), “A new iterative method for the split common fixed point problem in Hilbert spaces”, *Optimization*, **66**(3), pp. 407–415.
- [56] Wang F. (2022), “The split feasibility problem with multiple output sets for demi contractive mappings”, *J. Optim. Theory Appl.*, **195**(3), pp. 837–853.
- [57] Xu H-K. (2002), “Iterative algorithms for nonlinear operators”, *J. London Math. Soc.*, **66**(2), pp. 240–256.
- [58] Xu H-K. (2006), “A variable Krasnosel’skii-Mann algorithm and the multiple-set split feasibility problem”, *Inverse Problems*, **22**, pp. 2021–2034.
- [59] Xu H-K. (2010), “Iterative methods for the split feasibility problem in infinite-dimensional Hilbert spaces”, *Inverse Problems*, **26**, 105018.
- [60] Yen L.H., Muu L.D., Huyen N.T.T. (2016), “An algorithm for a class of split feasibility problems: application to a model in electricity production”, *Math. Methods Oper. Res.*, **84**(3), pp. 549–565.
- [61] Yu H., Wang F. (2022), “A new relaxed method for the split feasibility problem in Hilbert spaces”, *Optimization*, **73**(5), pp. 1417–1432.
- [62] Zhang W., Han D., Li Z. (2009), “A self-adaptive projection method for solving the multiple-sets split feasibility problem”, *Inverse Problems*, **25**(11), 115001.

- [63] Zhao J., Yang Q. (2013), “A simple projection method for solving the multiple-sets split feasibility problem”, *Inverse Probl. Sci. Eng.*, **21**(3), pp. 537–546.
- [64] Zhao J., Zhang Y., Yang Q. (2012), “Modified projection methods for the split feasibility problem and the multiple-sets split feasibility problem”, *Appl. Math. Comput.*, **219**, pp. 1644–1653.
- [65] Zhou H., Wang P. (2014), “Adaptively relaxed algorithm for solving the multiple-sets split feasibility problem”, *J. Inequal. Appl.*, **448** (12 pages).